CHAPITRE 3
SÉRIES NUMÉRIQUES

PARTIE 3.1 : RÉVISIONS

3.1.1 : Généralités

DÉFINITION 3.1 :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*, on dit que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est une* **série convergente** *si, en posant* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *(***somme partielle d'ordre** n*), la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est elle-même convergente. Sinon,* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est dite* **divergente***.*

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, on définit sa* **somme** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *et* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *son* **reste d'ordre** n*.*

PROPOSITION 3.1 :
Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$**. De plus,** $\forall n \geqslant -1,\ S = S_n + R_n$ **avec** $R_{-1} = S$ **et** $S_{-1} = 0$**.**

PROPOSITION 3.2 :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **deux suites d'éléments de** $\mathbb{K}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ **les séries associées :**

- **(i) Si** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ **CV :** $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + \lambda v_n)$ **CV et** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- **(ii) Si** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **CV et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ **DV :** $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ **DV.**

<u>REMARQUE 3.1</u> : On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes.

PROPOSITION 3.3 :
<u>Si</u> la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge <u>alors</u> la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** 0**.**

<u>REMARQUE 3.2</u> : $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *telle que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas vers* 0 *est dite* **grossièrement divergente***.*

THÉORÈME ÉNORME 3.4 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$**, on a l'équivalence :** $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge**$\big) \iff \big(\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ **converge**$\big)$.

PROPOSITION 3.5 :
$\Big(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **CV**$\Big) \iff \Big(\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ **CV**$\Big)$**. Dans ce cas,** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

PROPOSITION 3.6 :
Soit $a \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a^n$ **converge ssi** $|a| < 1$**. Dans ce cas** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$ **et** $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a^k = \dfrac{a^{n+1}}{1-a}$**.**

3.1.2 : Séries à termes positifs

PROPOSITION 3.7 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs :

(i) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

(ii) Si c'est le cas : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$; sinon on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

<u>REMARQUE 3.3</u> : • On a un résultat analogue pour les suites réelles à valeurs négatives.

• *Cette équivalence est valable même si le terme général u_n n'est positif qu'à partir d'un certain rang n_0 : mais si la série converge on a seulement $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname{Sup}\limits_{n\geqslant n_0} S_n$ et pas forcément $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname{Sup}\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$.*

<u>REMARQUE 3.4</u> : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$: $\sum\limits_{n\geqslant 0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

PROPOSITION 3.8 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, à propos des séries de RIEMANN : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 3.5</u> : • **Fonction zêta de** RIEMANN $\zeta :]1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

• *Quelques valeurs classiques sont à connaître :* $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

• *L'encadrement établi lors de la démonstration de la proposition précédente montre la double inégalité :* $\forall\alpha > 1,\ \frac{1}{\alpha-1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} + 1$ *; donc l'équivalent* $\zeta(\alpha) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}$ *et la limite* $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha) = 1$.

<u>REMARQUE 3.6</u> : On peut se servir de cette comparaison série-intégrale pour les équivalents des sommes partielles des séries de RIEMANN *divergentes et des restes des séries de* RIEMANN *convergentes :*

• *Si* $\alpha \in [0; 1[$ *alors* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

• *Si* $\alpha > 1$ *alors* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

THÉORÈME ÉNORME 3.9 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs :

(i) Si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

(ii) Si $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(iii) Si $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

(iv) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

<u>REMARQUE 3.7</u> : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ; alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge aussi.

<u>REMARQUE HP 3.8</u> : On se rappelle du théorème de CESARO *: si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite des moyennes arithmétiques $\left(m_n = \frac{u_0 + \cdots + u_{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.*

THÉORÈME ÉNORME 3.10 :
Équivalent de STIRLING : $n! \underset{\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

REMARQUE FONDAMENTALE 3.9 : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ *avec* $\gamma \sim 0,577$ *(constante d'EULER).*

PROPOSITION 3.11 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite de réels positifs et** $k > 0$ **:**

(i) S'il existe $\alpha > 1$ **tel que** $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$ **alors** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **converge.**

(ii) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ **tel que** $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$ **alors** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **diverge.**

(iii) S'il existe $\alpha > 1$ **tel que** $u_n \underset{\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ **alors** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **converge.**

(iv) S'il existe $\alpha \leqslant 1$ **et** $n_0 \in \mathbb{N}$ **tes que** $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant \frac{k}{n^\alpha}$ **alors** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **diverge.**

REMARQUE 3.10 : En pratique, on montre souvent, pour une série de terme général $u_n > 0$ *:*

- *qu'elle converge en établissant que* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ *avec* $\alpha > 1$,
- *qu'elle diverge en montrant que* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ *avec* $\alpha \leqslant 1$.

REMARQUE HP 3.11 : Nature des **séries de** BERTRAND $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *avec* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

PARTIE 3.2 : SÉRIES GÉNÉRALES

DÉFINITION 3.2 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, *on dit que* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est* **une série absolument convergente** *si* $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ *converge.*

PROPOSITION 3.12 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **ACV si et seulement si** $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ **et** $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ **sont ACV.**

THÉORÈME ÉNORME 3.13 :
Toute série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **ACV est une série CV. Et alors** $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

REMARQUE 3.12 : Une série CV mais non ACV est dite une **série semi-convergente**.

THÉORÈME ÉNORME 3.14 :
(i) Si $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ **absolument convergente** $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **absolument convergente.**
(ii) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **absolument convergente** $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ **absolument convergente.**

REMARQUE 3.13 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ *est telle que* $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k < 1$ *alors la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge. C'est un résultat du à* D'ALEMBERT *mais en pratique on utilise plutôt :*

THÉORÈME ÉNORME 3.15 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, **la règle de** D'ALEMBERT **s'énonce :**

- **Si** $\ell > 1$ **alors la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **diverge grossièrement.**
- **Si** $\ell < 1$ **alors** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge absolument.**

REMARQUE 3.14 : Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème ci-dessus :

- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, *on ne peut a priori rien dire de la convergence de la série car c'est le cas pour toutes les séries de* RIEMANN *pour lesquelles on a* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1^+$, *alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge (grossièrement) car* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante à partir d'un certain rang et strictement positive donc ne tend pas vers* 0.

DÉFINITION 3.3 :
On dit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *est une* **série alternée** *s'il existe* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *réelle de signe fixe et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n v_n$.

THÉORÈME ÉNORME 3.16 :
Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **est alternée et si** $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante et tend vers** 0 **alors** $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge (CSSA). Dans ce cas, pour** $n \geqslant -1$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ **est du signe de** u_{n+1} **et** $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

REMARQUE 3.15 : Ne pas utiliser les équivalents pour des séries non positives

DÉFINITION 3.4 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites complexes, on appelle* **produit de** CAUCHY *des séries* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$.

THÉORÈME 3.17 :
Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **et** $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ **sont ACV, leur produit de** CAUCHY **l'est aussi et** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

REMARQUE 3.16 : Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ *convergent, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ *converge absolument et on a l'inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}\sqrt{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2}$.