Correction du DS2

PROBLÈME 1 : (inspiré de CCINP MP 2023 maths 1) **Partie I**

1. $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $1-\alpha<1$ donc $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$. Enfin, $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $2-\alpha>1$ donc $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ aussi et donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. On pose $x=u^{1/\alpha}$: l'application $u \mapsto u^{1/\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; de plus, on a $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha}u^{(1/\alpha)-1}\,\mathrm{d}u$ donc $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)}}{1+u^{1/\alpha}}\dfrac{1}{\alpha}u^{1/\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ donc $\boxed{I(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+u^{1/\alpha}}\,\mathrm{d}u}$

3. $\boxed{I(\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}}$

Partie II

1. $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ et $1-\alpha<1$ car $\alpha>0$; puis $t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, par croissances comparées, donc $\boxed{t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}}$

2. $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\left|\dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}\right| \leqslant \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ donc, par comparaison, $x \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x \geqslant 0$ et $\boxed{f_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R}^+}$

3. $t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{1+t}e^{-xt}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ car $\alpha>0$ et $t^\alpha e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $x>0$ donc $\boxed{t \mapsto t^\alpha e^{-xt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$

4. On pose $t=\dfrac{u}{x}$: l'application $u \mapsto \dfrac{u}{x}$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}u$ donc $f_\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{(u/x)^{\alpha-1}}{1+u/x}e^{-u}\dfrac{\mathrm{d}u}{x}=\dfrac{1}{x^\alpha}\int_0^{+\infty}\dfrac{u^{\alpha-1}}{1+u/x}e^{-u}\,\mathrm{d}u$. De plus, pour $u \geqslant 0$, on a $\dfrac{1}{1+u/x}\leqslant 1$ donc $\dfrac{u^{\alpha-1}}{1+u/x}e^{-u}\leqslant u^{\alpha-1}e^{-u}$, ce qui donne, en intégrant (la convergence des intégrales est déjà assurée) $\boxed{f_\alpha(x)\leqslant\dfrac{G_\alpha}{x^\alpha}}$

5. On a l'encadrement $0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \dfrac{G_\alpha}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{\lim_{+\infty} f_\alpha = 0}$

Partie III

1. On a, par linéarité, $f_\alpha(x)-f'_\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{\alpha-1}+t^\alpha}{1+t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\dfrac{t^\alpha(1+t)}{1+t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}t^\alpha e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ donc, en utilisant le changement de variable $u=xt$ déjà justifié précédemment, on obtient $\boxed{f_\alpha(x)-f'_\alpha(x)=\dfrac{G_\alpha}{x^\alpha}}$

2. a) Si $x>0$, $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $[x,+\infty[$ et $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(e^{-xt}\right)$ donc $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[x,+\infty[$ et $\boxed{g_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R}^{+*}}$

b) On écrit $g_\alpha(x)=-\displaystyle\int_1^x\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t+g_\alpha(1)$ donc, comme $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $x\mapsto\displaystyle\int_1^x\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $x\mapsto\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$ qui s'annule en 1 donc $\boxed{g_\alpha \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } g'_\alpha(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha} \text{ pour } x>0}$

c) Par produit, h_α est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x>0$, $h'_\alpha(x)=h_\alpha(x)+G_\alpha e^x f'_\alpha(x)=h_\alpha(x)+G_\alpha e^x\dfrac{e^{-x}}{x^\alpha}$ donc $\boxed{h_\alpha(x)-h'_\alpha(x)=\dfrac{G_\alpha}{x^\alpha} \text{ pour } x>0}$

d) L'application $t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[x,+\infty[$ donc, pout $t\geqslant x$, on a $0\leqslant\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}\leqslant\dfrac{e^{-t}}{x^\alpha}$, ce qui donne en intégrant, $0\leqslant h_\alpha(x)\leqslant G_\alpha e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x=G_\alpha e^x\dfrac{1}{x^\alpha}\Big[e^{-t}\Big]_x^{+\infty}=\dfrac{G_\alpha}{x^\alpha}$. Par encadrement, on a $\boxed{\lim_{+\infty}h_\alpha=0}$

e) Comme f_α et h_α sont solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la même équation différentielle linéaire, $f_\alpha-g_\alpha$ est solution de l'équation homogène $y-y'=0$ donc il existe une constante $\lambda\in\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f_\alpha(x)-h_\alpha(x)=\lambda e^x$. Comme $\lim\limits_{+\infty}(f_\alpha-h_\alpha)=0$, on en déduit $\lambda=0$ donc $\boxed{f_\alpha=h_\alpha}$

3. Il s'agit de prolonger l'égalité, valable sur $\mathbb{R}^{+*}$, entre f_α et g_α en $x=0$: f_α est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en 0 et comme $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha<1$, la fonction $t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, ce qui donne $\lim\limits_{x\to 0} h_\alpha(x) = G_\alpha \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Par passage à la limite quand x tend vers 0 dans l'égalité de **III.2.e**, on a $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = f_\alpha(0) = G_\alpha \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}$

4. En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = G_{1-\alpha}$ et avec la valeur de $I(\alpha)$ vue en **I.3**, on déduit $\boxed{G_\alpha G_{1-\alpha} = \dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}}$

5. Avec $\alpha = \dfrac12 \in]0,1[$, on a $G_{1/2}^2 = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$ et comme $t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt t}$ est positive, on a $G_{1/2}\geqslant 0$ donc $\boxed{G_{1/2} = \sqrt\pi}$

On pose alors $t=u^2$: l'application $u\mapsto u^2$ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$ donc $G_{1/2} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\times 2u\,\mathrm{d}u = 2J_0$ ce qui donne $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt\pi}{2}}$

Partie IV

1. a) La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $\mathbb{R}$; pour $k\leqslant n$, on a les dérivées $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k\cos(0) = (-1)^k$ et $\cos^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\sin(0) = 0$ puis $|\cos^{(2n+2)}| = |\cos| \leqslant 1$ donc l'inégalité de Taylor-Lagrange donne $\left|\cos(u) - \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{u^k}{k!}\cos^{(k)}(0)\right| \leqslant \dfrac{|u|^{2n+2}}{(2n+2)!}\|\cos^{(2n+2)}\|_\infty$, ce qui, compte tenu des termes impairs qui sont nuls donne $\boxed{\left|\cos(u) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{u^{2n+2}}{(2n+2)!}}$

b) On applique à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\varphi : u\mapsto e^{-u}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$; on a $\varphi^{(k)}(0) = (-1)^k$ et $|\varphi^{(n+1)}(u)| = e^{-u}\leqslant 1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $\left|e^{-u} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}u^k\right| \leqslant \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par encadrement, $\boxed{e^{-u} = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}u^k}$

2. a) La fonction $t\mapsto t^{2n}e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $t^{2n}e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t\mapsto t^{2n}e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$

b) Les fonctions $u : t\mapsto e^{-t^2}$ et $v : t\mapsto \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{0} uv = \lim\limits_{+\infty} uv = 0$ donc, par IPP, $J_n = \Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\times\left(-2te^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}J_{n+1}$. On a donc $\boxed{J_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2}J_n}$

c) Une récurrence suffit : $J_0 = J_0\times\dfrac{0!}{4^0 0!}$ et si $J_n = J_0\dfrac{(2n)!}{4^n n!}$ pour $n\in\mathbb{N}$, alors $J_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2}J_n \overset{\text{HR}}{=} \dfrac{2n+1}{2}\times J_0\dfrac{(2n)!}{4^n n!}$ puis $J_{n+1} = J_0\dfrac{(2n+2)!}{(2n+2)2\times 4^n n!} = J_0\dfrac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}$. Par principe de récurrence, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ J_n = J_0\dfrac{(2n)!}{4^n n!}}$

3. a) $t\mapsto\cos(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\cos(xt)e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t\mapsto\cos(xt)e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$

b) On a les inégalités suivantes (toutes les intégrales convergent d'après **IV.2.a**) :

$$\begin{aligned}\left|F(x) - \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}t^{2k}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{+\infty}\left(\cos(xt) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}t^{2k}\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\left|\cos(xt) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}t^{2k}\right|e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\textbf{IV.1.a}}{\leqslant} \int_0^{+\infty}\frac{(xt)^{2n+2}}{(2n+2)!}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}J_{n+1} \\ &\leqslant J_0\frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat par encadrement.

c) Par linéarité de l'intégrale (toutes les convergences ont déjà été prouvées), on a

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} J_k = J_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k k!} x^{2k} = J_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k$$

donc, avec **IV.1.b** et $\frac{x^2}{4} \in \mathbb{R}^+$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} t^{2k} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = J_0 e^{-x^2/4}$. Par unicité de la limite, on conclut $\boxed{F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4} \text{ pour tout réel } x}$

PROBLÈME 2 : Partie I

1. a) $(x,y,z) \in \ker(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$ donc $\ker(a) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ est une droite car $\boxed{u_1 = (1,1,1)}$ est non nul, donc (u_1) est libre et constitue une base de $\ker(a)$.

b) On a $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Vect}\{C_1, C_2, C_3\}$ mais $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Vect}\{C_2, C_3\}$. On vérifie ensuite que (u_1, C_2, C_3) est une base se $\mathbb{R}^3$ car $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, C_2, C_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc on a la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\{u_1\} \oplus \mathrm{Vect}\{C_2, C_3\}$, ie $\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(a) \oplus \mathrm{Im}(a)}$

2. a) $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $(x,y,z) \in \ker(a - id)^2 \Leftrightarrow x + y - z = 0$; $\ker(a - id)^2 = \mathrm{Vect}\{(1,0,1), (0,1,1)\}$; les deux vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$ ne sont pas colinéaires donc $\boxed{((1,0,1),(0,1,1)) \text{ est une base de } \ker(a - id)^2}$

$\boxed{u_2 = (0,1,1)}$ convient puisque $a(u_2) - u_2 = (-2, 0, -2) \neq 0$.

b) $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, u_3, u_2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

c) Par construction, on a les relations $\begin{cases} a(u_1) = 0 \\ a(u_3) - u_3 = (a - id)^2(u_2) = 0 \\ a(u_2) = u_2 + u_3 \end{cases}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = T$. Il suffit donc, par la formule de changement de base, de prendre $\boxed{P = P(\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$ pour avoir $A = PTP^{-1}$.

3. On note T^+ la matrice $T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) On vérifie $AA^+ = QTQ^{-1}QT^+Q^{-1} = QTT^+Q^{-1} = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}Q^{-1}$ et $A^+A = QT^+TQ^{-1} = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}Q^{-1}$

b) $AA^+A = QTT^+TQ^{-1} = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}TQ^{-1} = QTQ^{-1}$ donc $\boxed{AA^+A = A}$

De même, on trouve $\boxed{A^+AA^+ = A^+}$

c) On a $(AA^+)^2 = (AA^+A)A^+ = AA^+$ donc $\boxed{a \circ a^+ \text{ est un projecteur}}$

On a $\ker(a \circ a^+) = \ker(a^+ \circ a)$ puis $\ker(a) \subset \ker(a^+ \circ a)$; de plus, $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(T) = 2$ et, Q étant inversible, $rg(a \circ a^+) = \mathrm{rg}(TT^+) = \mathrm{rg}(I_2) = 2$ donc, avec le théorème du rang, on a $\dim(\ker(a \circ a^+)) = \dim(\ker(a))$ et $\boxed{\ker(a \circ a^+) = \ker(a)}$

De même, on a $\mathrm{Im}(a \circ a^+) \subset \mathrm{Im}(a)$ et, par égalité des dimensions, $\boxed{\mathrm{Im}(a \circ a^+) = \mathrm{Im}(a)}$

Partie II

1. i)$\Rightarrow$ii) On a toujours $\ker(a) \subset \ker(a^2)$, et si $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$, d'après la formule du rang, on a $\dim\ker(a) = \dim\ker(a^2)$ donc $\ker(a) = \ker(a^2)$.

ii)$\Rightarrow$iii) Si $x \in \ker(a) \cap \mathrm{Im}(a)$, on a $x = a(x')$ pour un $x' \in E$ et $0 = a(x) = a^2(x')$ donc $x' \in \ker(a^2) = \ker(a)$. Ainsi, $x = a(x') = 0$ donc $\mathrm{Im}(a) \cap \ker(a) = \{0\}$. Puis d'après la formule du rang, on a $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a)$.

iii)⇒iv) Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $\mathrm{Im}(a)$ est stable par a, avec $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ où $r = \dim \mathrm{Im}(a) = \mathrm{rg}(a)$. On a alors $\mathrm{rg}(a) = r = \mathrm{rg}(B)$ donc B est inversible. On a donc iv) avec P la matrice de passage de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$.

iv)⇒i) On a $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(B) = r$ car B est inversible et $\mathrm{rg}(a^2) = \mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}(B^2) = r$ car B^2 est inversible.

2. a) On a $\mathrm{rg}(A^2) \leqslant \mathrm{rg}(A)$ et si A admet un pseudo-inverse A' alors $A = AA'A$ et $AA' = A'A$ donc $A = A^2A'$ puis $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(\mathrm{rg}(A'), \mathrm{rg}(A^2)) \leqslant \mathrm{rg}(A^2)$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)}$

b) Si $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec P et B inversibles, il suffit de prendre $\boxed{A' = P \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}$

3. a) a et a'' commutent donc si $x \in \ker(a)$ alors $a(a''(x)) = a''(a(x)) = a''(0) = 0$ et si $y \in \mathrm{Im}(a)$ alors $y = a(x)$ pour un $x \in E$ puis $a''(y) = a''(a(x)) = a(a''(x)) \in \mathrm{Im}(a)$. On conclut $\boxed{\ker(a) \text{ et } \mathrm{Im}(a) \text{ sont stables par } a''}$

b) Si $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, alors P est la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$, comme B est inversible, on a :
$\ker(a) = \mathrm{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ et $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}$. (Ce qui prouve en fait qu'une telle base est obligatoirement une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a)$.)
Comme $\ker(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a'', la matrice de a'' dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs :
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a'') = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D' \end{pmatrix}$. Enfin, on vérifie que si $A'' = A''AA''$, on a $D' = 0$ donc $\boxed{A'' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}$

c) Si $A = AA''A$, alors $AA'' = AA''AA'' = (AA'')^2$ donc $\boxed{a \circ a'' \text{ est un projecteur}}$

On a $\ker(a) \subset \ker(a'' \circ a)$ et comme $a = a \circ (a'' \circ a)$, on a $\ker(a'' \circ a) \subset \ker(a)$ donc $\boxed{\ker(a \circ a'') = \ker(a)}$ car $a \circ a'' = a'' \circ a$.
De même, $\mathrm{Im}(a \circ a'') \subset \mathrm{Im}(a)$ et comme $a = (a \circ a'') \circ a$, on a $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Im}(a \circ a'')$ puis $\boxed{\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a \circ a'')}$
(*on peut aussi montrer une inclusion et utiliser la formule du rang en repartant de l'égalité des noyaux.*)

On a $\boxed{P^{-1}(AA'')P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ car c'est la matrice du projecteur $a \circ a''$ écrite dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(a \circ a'') \oplus \ker(a \circ a'')$.

d) On en déduit que $BD = I_r$ donc $D = B^{-1}$ et l'unique pseudo-inverse est celui obtenu à la question **III.2.b.**

4. On détermine des bases de $\ker(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$: par exemple $((1,1,1),(0,1,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(a)$ et $(0,1,-1)$ un vecteur directeur de $\ker(a)$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est inversible (ce qui signifie que $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \ker(a)$ et assure donc l'existence du pseudo-inverse). On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A' = P \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

On conclut donc $\boxed{A' = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 7 & -4 & -4 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$ car $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.