DEVOIR MAISON 3:GIBIER DE NILPOTENCE

PSI 1 2024/2025 **pour le vendredi 04 octobre 2024**

PARTIE 1 : IMAGES ET NOYAUX

1.1 L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$ est une partie non vide (par hypothèse) de $\mathbb{N}$, elle possède donc un minimum qu'on appelle p. $\boxed{\text{Si } q \geqslant p,\ f^q = f^p \circ f^{q-p} = 0}$ car $f^p = 0$. $\boxed{\text{Si } q < p, \text{ alors } f^q \neq 0}$ par minimalité de p. Dans le premier cas, $\boxed{\text{si } p = 1, \text{ alors } f^p = f = 0.}$ Par contre, $\boxed{\text{si } p = 2, \text{ alors } f^2 = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$

1.2 Ça monte et ça descend

1.2.1 Pour $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$, $f^k(x) = 0_E$ d'où $f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = 0_E \Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$: $\boxed{\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}).}$

1.2.2 Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Soit maintenant $q \geqslant k+1$ tel que $\mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^k)$, on sait déjà d'après la question 1.2.1 que $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^q) \subset \mathrm{Ker}(f^{q+1})$ donc $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{q+1})$. Si $x \in \mathrm{Ker}(f^{q+1})$, alors $f^{k+1}(f^{q-k}(x)) = 0_E$ donc $f^{q-k}(x) \in \mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^k)$ donc $f^k(f^{q-k}(x)) = f^q(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^k)$ par hypothèse de récurrence. On a prouvé l'autre inclusion : $\mathrm{Ker}(f^{q+1}) \subset \mathrm{Ker}(f^k)$. Par principe de récurrence, on a établi que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1}) \Longrightarrow \big(\forall q \geqslant k,\ \mathrm{Ker}(f^q) = \mathrm{Ker}(f^k)\big).}$

1.2.3 Comme $\mathrm{Ker}(f^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(0) = E$ car $f^p = 0$, la question 1.2.1 montre les inclusions. Si l'une d'entre elles était une égalité, alors la question 1.2.2 montre que la croissance de la suite des noyaux itérés s'arrêterait, ce qui n'est pas le cas avant $\mathrm{Ker}(f^p)$ par définition de p. Ainsi, on a l'égalité et les inclusions strictes suivantes : $\boxed{\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(f^{p-1}) \subset \mathrm{Ker}(f^p) = E.}$

1.2.4 Pour $k \in \mathbb{N}$, si $x \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$, il existe $a \in E$ tel que $x = f^{k+1}(a) = f^k(f(a))$ donc $x \in \mathrm{Im}(f^k)$ ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$. Comme $\mathrm{Im}(f^p) = \{0_E\}$ car $f^p = 0$ et $\mathrm{Im}(f^0) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E) = E$, on a donc l'égalité et les inclusions. Si l'une de ces inclusions était une égalité, avec la formule du rang appliquée à f^k et f^{k+1} on conclurait à une égalité dans la liste des inclusions de la question précédente, ce qui ne se peut ! Ainsi, on a bien l'égalité et les inclusions strictes suivantes : $\boxed{\{0_E\} = \mathrm{Im}(f^p) \subset \mathrm{Im}(f^{p-1}) \subset \cdots \subset \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f) \subset E.}$

1.3 Majoration de p

1.3.1 Les inclusions strictes de 1.2.3 montrent que $\forall i \in [\![0;p-1]\!],\ \dim(\mathrm{Ker}(f^{i+1})) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^i))+1$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f^0)) = 0$, $\boxed{\forall k \in [\![0;p]\!],\ \dim \mathrm{Ker}(f^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \big(\dim(\mathrm{Ker}(f^{i+1})) - \dim(\mathrm{Ker}(f^i))\big) \geqslant k.}$

1.3.2 Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f^p)) \geqslant p$ mais $\mathrm{Ker}(f^p) = E$ est de dimension n donc $\boxed{p \leqslant n.}$

PARTIE 2 : ORDEM E PROGRESSO

2.1 Les bases de la liberté

2.1.1 Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$. Supposons que $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \cdots, 0)$ et posons $r = \mathrm{Min}(k \in [\![0; p-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0)$ de sorte que $\sum\limits_{k=r}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$. On peut appliquer f^{p-r-1} à cette relation ce qui donne $\sum\limits_{k=r}^{p-1} \lambda_k f^{p-r-1+k}(x_0) = \lambda_r f^{p-1}(x_0) = f(0_E) = 0_E$ (car $f^p = 0$). Mais comme $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$ par hypothèse, on obtient $\lambda_r = 0$ ce qui contredit la définition de r. Par l'absurde, on vient de prouver que $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) = (0, \cdots, 0)$ donc que $\boxed{(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est une famille libre.}}$

2.1.2 Cette famille libre possède p vecteurs dans un espace de dimension n donc $\boxed{p \leqslant n.}$

2.1.3 Si $p = n$, la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est libre avec n vecteurs dans un espace de dimension n donc $\boxed{(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)) \text{ est une base de } E.}$

2.2 Un exemple : soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x - y + z, 2x, x + y - z)$

2.2.1 Méga-classique pour la linéarité. Après calculs, on trouve que $f^2(x, y, z) = 2(0, x - y + z, x - y + z)$ puis que $f^3(x, y, z) = (0, 0, 0)$ donc $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ ce qui, par définition, prouve que $\boxed{f \text{ est nilpotent d'indice } 3.}$

2.2.2 $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff x - y + z = 2x = x + y - z = 0 \iff x = y - z = 0 \iff (x, y, z) = y(0, 1, 1)$. On en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ est la droite d'équations } x = y - z = 0 \text{ engendrée par le vecteur } e_2 + e_3 = (0, 1, 1).}$

De même $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f^2) \iff x - y + z = 0 \iff (x, y, z) = (x, x + z, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f^2) \text{ est le plan d'équation } x - y + z = 0 \text{ et de base } ((1, 1, 0), (0, 1, 1)).}$

Comme $f^3 = 0$, on a $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$. Comme $\mathrm{rg}(f^2) = 1$ et $\mathrm{rg}(f) = 2$ par le théorème du rang, ces inclusions et l'égalité des dimensions montrent que $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f).}$

2.2.3 Il suffit de prendre, d'après ce qui précède, un vecteur x_0 tel que $f^2(x_0) \neq (0, 0, 0)$. Comme le vecteur $f^2(1, 0, 0) = (0, 2, -2)$ n'est pas nul, on a $\boxed{(x_0, f(x_0), f^2(x_0)) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \text{ si } x_0 = (1, 0, 0).}$

PARTIE 3 : ESPACES STABLES PAR f

3.1 Noyaux et images

3.1.1 Puisque $(x_0, \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E, on sait que $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Vect}(f^k(x_0), \cdots, f^{n-1+k}(x_0))$. Mais comme $f^m(x_0) = 0_E$ si $m \geqslant n$, on a $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Vect}(f^k(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$. Cette famille $(f^k(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une sous-famille d'une base donc une famille libre, mais elle est aussi génératrice de $\mathrm{Im}(f^k)$ avec ce qui précède : $\boxed{(f^k(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f^k) \text{ et } \mathrm{rg}(f^k) = \dim(\mathrm{Im}(f^k)) = n - k.}$

3.1.2 D'après la formule du rang, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) = n-(n-k) = k.}$ Comme $(f^{n-k}(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de k vecteurs de $\mathrm{Ker}(f^k)$, ainsi $\boxed{(f^{n-k}(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f^k).}$

3.2 Condition nécessaire de stabilité

3.2.1 f_F est un linéaire car f l'est et va de F dans F car F est stable par f. Ainsi $f \in \mathcal{L}(F)$. De plus, pour un vecteur x de F, on a $(f|_F)^n(x) = f^n(x) = 0$ car f est nilpotent donc $f|_F$ est aussi nilpotent. Alors, $\boxed{f_F \text{ est un endomorphisme nilpotent de } F.}$ Comme $\dim(F) = m$, on sait d'après la partie 1 que $(f|_F)^m = 0$ ce qui signifie que pour tout vecteur x de F, on a $f^m(x) = 0_E$ donc que $\boxed{F \subset \mathrm{Ker}(f^m).}$

3.2.2 $F \subset \mathrm{Ker}(f^m)$ et ces deux sous-espaces ont la même dimension, ainsi $\boxed{F = \mathrm{Ker}(f^m).}$

3.3 Si F est stable par f, la question précédente nous apprend alors qu'il existe m (la dimension de F) tel que $F = \mathrm{Ker}(f^m)$. Réciproquement, $(\mathrm{Ker}(f^m))_{0\leqslant m\leqslant n}$ constitue une famille de $n+1$ (distincts deux à deux) sous-espaces stables par f : $\boxed{\text{il existe } n+1 \text{ sous-espaces } f\text{-stables, ce sont les } \mathrm{Ker}(f^m) \text{ pour } m \in [\![0;n]\!].}$

PARTIE 4 : COMMUTANT DE f

4.1 • L'application nulle et id_E sont clairement dans $\mathcal{C}(f)$ car elles commutent avec f.

Soit maintenant $(g,h) \in \mathcal{C}(f)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

• $(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ donc $g \circ h \in \mathcal{C}(f)$.

• $(\lambda g + h) \circ f = \lambda g \circ f + h \circ f = \lambda f \circ g + f \circ h = f \circ (\lambda g + h)$ donc $\lambda g + h \in \mathcal{C}(f)$.

$\mathcal{C}(f)$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(f)$: $\boxed{\mathcal{C}(f) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).}$

4.2 Condition nécessaire de commutation : soit $g \in \mathcal{C}(f)$

4.2.1 Déjà fait en partie 2 car on a encore dans cette partie $p = n$. Or $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E et $g(x_0) \in E$ qu'on décompose $g(x_0) = a_0x_0 + a_1f(x_0) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0)$ avec $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

4.2.2 Comme g commute avec f, on en déduit (par une récurrence facile) que $\forall k \in \mathbb{N},\ g \circ f^k = f^k \circ g$.

Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$, alors $g(f^k(x_0)) = (g \circ f^k)(x_0) = (f^k \circ g)(x_0) = f^k(g(x_0))$. Avec l'écriture ci-dessus, $g(f^k(x_0)) = f^k(a_0x_0 + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0)) = a_0f^k(x_0) + \cdots + f^{n-1}(f^k(x_0)) = (a_0\,\mathrm{id}_E + \cdots + a_{n-1}f^{n-1})(f^k(x_0))$.

Comme g et $a_0\,\mathrm{id}_E + a_1f + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}$ prennent les mêmes valeurs sur la base $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$, ces deux endomorphismes sont égaux : $\boxed{g = a_0\,\mathrm{id}_E + a_1f + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}.}$

4.3 Par hypothèse, on a $g \in \mathbb{K}[f]$ et on sait que $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$ donc $\boxed{g \in \mathcal{C}(f).}$

4.4 D'après 4.2 et 4.3, la famille $\mathcal{B} = (\mathrm{id}_E, \cdots, f^{n-1})$ engendre $\mathcal{C}(f)$. De plus, si $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $a_0\,\mathrm{id}_E + a_1f + \cdots + a_{n-1}f^{n-1} = 0$, en appliquant ceci en x_0, on a $a_0x_0 + a_1f(x_0) + \cdots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0) = 0_E$ donc $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$ car $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre et génératrice dans $\mathcal{C}(f)$ donc $\boxed{\mathcal{B} = (\mathrm{id}_E, \cdots, f^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{C}(f) \text{ et } \dim(\mathcal{C}(f)) = n.}$

PARTIE 5 : APPLICATION ANALYTIQUE

5.1 La linéarité de f provient de celle de la dérivation. Par contre, la stabilité de E par f n'est pas évidente. Soit $\varphi \in E$, alors $\varphi''' - 3\varphi'' + 3\varphi' - \varphi = 0$ qu'on dérive pour obtenir $\varphi^{(4)} - 3\varphi''' + 3\varphi'' - \varphi' = 0$. On soustrait ces deux équations pour avoir $\varphi^{(4)} - 3\varphi''' + 3\varphi'' - \varphi' - \varphi''' + 3\varphi'' - 3\varphi' + \varphi = 0$ qui s'écrit aussi $(\varphi' - \varphi)''' - 3(\varphi' - \varphi)'' + 3(\varphi' - \varphi)' - (\varphi' - \varphi) = 0$. On a donc $f(\varphi) \in E$ d'où $f \in \mathcal{L}(E)$. De plus, soit $\varphi \in E$, alors $f^3(\varphi) = f^2(\varphi' - \varphi) = f(\varphi'' - 2\varphi' + \varphi) = \varphi''' - 2\varphi'' + \varphi' - \varphi'' + 2\varphi' - \varphi = \varphi''' - 3\varphi'' + 3\varphi' - \varphi = 0$ car $\varphi \in E$. Par conséquent, $f^3 = 0$ donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme nilpotent d'indice inférieur ou égal à } 3.}$

5.2 φ est clairement de classe C^∞ et $\varphi_0'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, $\varphi_0''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$, $\varphi_0'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$ de sorte que $\varphi_0'''(x) - 3\varphi_0''(x) + 3\varphi_0'(x) - \varphi_0(x) = (x^2 + 6x + 6 - 3(x^2 + 4x + 2) + 3(x^2 + 2x) - x^2)e^x = 0$: $\boxed{\varphi_0 \in E.}$ $f^2(\varphi_0)(x) = \varphi_0''(x) - 2\varphi_0'(x) + \varphi_0(x) = (x^2 + 4x + 2 - 2(x^2 + 2x) + x^2)e^x = 2e^x$ donc $f^2(\varphi_0)$ n'est pas la fonction nulle donc $f^2 \neq 0$. $\boxed{f \text{ est donc d'indice de nilpotence } 3.}$ On sait aussi d'après la partie 2 que $(\varphi_0, f(\varphi_0), f^2(\varphi_0))$ est une base de E. Les fonctions de E sont donc de la forme $x \mapsto (\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma)e^x$ ce qui prouve que $\boxed{(x \mapsto x^2e^x, x \mapsto xe^x, x \mapsto e^x) \text{ est aussi une base de } E.}$