DEVOIR 06 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2024-2025 **mardi 08 octobre 2024**

QCM

1 *Propriétés : soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

1.1 Si A inversible, $\det(I_n + A^{-1}B) = \det(I_n + BA^{-1})$

1.2 $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \det(A + \lambda B) = \det(A) + \lambda^n \det(B)$

1.3 $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est surjectif

1.4 $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est injectif

2 *Somme de sous-espaces : soit* E *un espace de dimension finie,* $E_1, \cdots, E_d$ *des sous-espaces de* E

2.1 $\dim\left(\sum\limits_{k=1}^{d} E_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{d} \dim(E_k)$

2.2 $\dim\left(\prod\limits_{k=1}^{d} E_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{d} \dim(E_k)$

2.3 $\sum\limits_{k=1}^{d} E_k$ est directe $\Longleftrightarrow \dim\left(\sum\limits_{k=1}^{d} E_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{d} \dim(E_k)$

2.4 $\sum\limits_{k=1}^{d} E_k$ est directe $\Longleftrightarrow \left(\forall p \in [\![1; d]\!],\ E_p \cap \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{d} E_k = \{0_E\}\right)$

3 *Matrices : soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ *avec* A, B *inversibles*

3.1 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ **3.2** $\det(AB) = \det(BA)$ **3.3** $(AB)^T = A^T B^T$ **3.4** $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

4 *Par blocs : soit* $n \geqslant 2$ *et six matrices* A, B, C, A', B', C' *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, puis les matrices suivantes définies par blocs*
$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ *et* $M'' = \begin{pmatrix} A'A & A'B + BC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix}$

4.1 $\det(M) = \det(AC)$

4.2 $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(C)$

4.3 $M'' = MM'$

4.4 $\mathrm{tr}(M'') = \mathrm{tr}(MM')$

Énoncé Soit un $\mathbb{K}$-espace E de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace de E, G un supplémentaire de F dans E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de F de sorte que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \amalg \mathcal{B}_G$ est une base de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ pour que F soit stable par f (écrire M dans ce cas). Que représente l'une des matrices définie lors de cette écriture de M dans le cas où F est stable par f ?

Preuve Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 1 Soit $n \geqslant 3$ et la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_n = (|i-j|)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer $\det(A_n)$.
Indication : on pourra commencer par l'opération de Gauss $C_1 \longleftarrow C_1 + C_n$.

Exercice 2 Soit $n \geqslant 1$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f : E \to E$ par $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I_n$. On admet que f est linéaire (ce qui découle très simplement de la linéarité de la fonction trace).
a. Déterminer la dimension de $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
b. Calculer $f(I_n)$. Est-ce que $I_n \in F$?
c. En déduire la matrice de f dans une base bien choisie. Que valent $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$?

DEVOIR 06 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 06	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1	X		X		
2	X	X	X	X	
3	X	X			
4	X			X	

1.1 Vrai : $\det(I_n + A^{-1}B) = \det(A^{-1}A + A^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(A+B) = \det(A+B)\det(A^{-1})$ ce qui donne $\det(I_n + A^{-1}B) = \det(AA^{-1} + BA^{-1}) = \det(I_n + BA^{-1})$ **1.2** Faux : affreux ! **1.3** Vrai : si $\lambda \neq 0$, la matrice $D_1(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{1,1}$ de dilatation a pour déterminant λ **1.4** Faux : $\det(E_{1,1}) = \det(E_{2,2}) = 0$ si $n \geqslant 2$.
2.1 Vrai : pour $d = 2$ c'est la formule de GRASSMANN et ensuite c'est une récurrence sur d en utilisant $\sum\limits_{k=1}^{d+1} E_k = E_{d+1} + \sum\limits_{k=1}^{d} E_k$ et GRASSMANN **2.2** Vrai : du cours **2.3** Vrai : du cours **2.4** Vrai : du cours.
3.1 Vrai : du cours **3.2** Vrai : $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$ **3.3** Faux : c'est $(AB)^T = B^TA^T$ en général **3.4** Faux : c'est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ en général.
4.1 Vrai : car $\det(AC) = \det(A)\det(C)$ **4.2** Faux : car $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(C) \neq \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(C)$ en général **4.3** Faux : $MM' = \begin{pmatrix} AA' & BA' + BC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix}$ et le produit n'est pas commutatif dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **4.4** Vrai : car avec le produit précédent, on a $\mathrm{tr}(MM') = \mathrm{tr}(AA') + \mathrm{tr}(CC') = \mathrm{tr}(A'A) + \mathrm{tr}(CC')$.

Énoncé F est stable par f si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure par blocs. Si F est stable par f, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f|_F)$ où $f|_F$ est l'endomorphisme induit dans F par f.

Preuve • Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_E$. Ainsi $0_E = g(0_E) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(f)$ est bien stable par g.
• Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. Ainsi $g(x) = g(f(a)) = g \circ f(a) = f \circ g(a) = f(g(a))$ donc $g(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Par conséquent $\mathrm{Im}(f)$ est bien stable par g.

Exercice 1 Avec l'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + C_n$, on impose une colonne de $n-1$ en première colonne, on peut donc factoriser le déterminant de A_n par $n-1$ pour avoir une colonne de 1 à la place. Ensuite les opérations $L_n \longleftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \longleftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$ jusqu'à $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ permettent d'obtenir (sans changer le déterminant ni la première ligne) des 1 et des -1 partout dans les $n-1$ dernières lignes (à dessiner). On termine en effectuant les opérations $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$, ensuite $L_4 \longleftarrow L_4 + L_2$ jusqu'à $L_n \longleftarrow L_n + L_2$ et on arrive à une matrice triangulaire supérieure. Ainsi, $\det(A_n) = (n-1)(-1)(-2)^{n-2} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Exercice 2 **a.** Pour $M \in E$, $M \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \iff f(M) = M \iff \mathrm{tr}(M)I_n = 0 \iff \mathrm{tr}(M) = 0$ ce qui prouve que $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Comme tr est une forme linéaire non nulle sur E, F est un hyperplan de E : $\dim(F) = n^2 - 1$.
b. On a $f(I_n) = I_n + nI_n = (n+1)I_n$. Comme $n+1 \neq 0$, $I_n \notin F$.
c. Si on prend une base $\mathcal{B}_1$ de F, comme $I_n \notin F$ car $\mathrm{tr}(I_n) \neq 0$, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg (I_n)$ est libre et elle comporte n^2 vecteurs dans E de dimension n^2, ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, n+1)$ par construction donc $\mathrm{tr}(f) = (n^2 - 1) \times 1 + 1 \times (n+1) = n^2 + n$ et $\det(f) = 1^{n^2-1} \times (n+1)^1 = n+1$.