PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 05

PSI 1 2024-2025 **du lundi 14/10 au vendredi 18/10**

1 **Révisions d'algèbre linéaire** : voir le programme précédent

2 **Algèbre linéaire** : ce qui est nouveau !

- espaces produits de plusieurs espaces : définition et dimension ;
- somme de plusieurs sous-espaces vectoriels dans un espace ;
- somme directe de plusieurs sous-espaces et caractérisations ; projecteurs associés ;
- caractérisation de sous-espaces en somme directe sur les dimensions ;
- produit matriciel par blocs et stabilité ;
- stabilité des noyaux et images si les endomorphismes commutent ;
- déterminant des matrices diagonales ou triangulaires par blocs ;
- trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme, trace d'un projecteur ;
- polynôme d'interpolation de LAGRANGE et lien avec les déterminants de VANDERMONDE ;
- définition des polynômes d'endomorphismes, "morphisme d'algèbres" si on fixe f ;
- structure de sous-algèbre commutative des polynômes en f, sous-espaces stables, commutant ;
- polynômes annulateurs de f, polynôme minimal en dimension finie (hors programme) ;
- exemples en dimension infinie où le seul polynôme annulateur est 0 ;
- utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer les puissances d'un endomorphisme ou d'une matrice ;

3 **Séries numériques, propriétés** :

- définition, série convergente, divergente, somme partielle et reste d'une série convergente ;
- opérations algébriques sur les séries convergentes (et leurs sommes), divergentes ;
- condition nécessaire de convergence ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$) : divergence grossière ;
- équivalence entre convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \big(u_{n+1} - u_n\big)$;
- pour les séries complexes, passage par les parties réelles et imaginaires ;
- séries de RIEMANN et séries géométriques : CNS de convergence, somme, équivalent ;

4 **Séries à termes positifs** :

- une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée ;
- théorème de comparaison : majoration, grand O, équivalence entre les termes ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir ce qu'est un polynôme d'endomorphisme (déf. 2.44)
2 prouver la formule des déterminants de VANDERMONDE (prop. 2.86)
3 prouver que si $f \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension finie, il existe un $P \neq 0$ annulateur de f (prop. 2.89)
1 énoncer les différentes implications sur la "linéarité" de la convergence des séries (prop. 3.3)
2 énoncer le théorème de comparaison version séries à termes positifs (th. 3.9)
3 énoncer le théorème de comparaison version séries à termes quelconques (th. 3.12)
4 prouver le théorème sur la dualité suite/série (th. 3.5)

Prévision pour la prochaine semaine : révision d'algèbre linéaire et séries numériques