TD 06 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 11 octobre 2024**

6.1 Par une récurrence simple, on montre que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, b_n est bien défini et strictement positif. Ainsi, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Comme $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n}{b_n} > 0$, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. D'après le théorème de la limite monotone, soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n(b_{n+1} - b_n)$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par opérations. En passant à la limite dans la relation $a_n = b_n(b_{n+1} - b_n)$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell(\ell - \ell) = 0$.

b. $(\Longrightarrow)$ Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, comme $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $b_0 = 1$, on a $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \geqslant 1 > 0$. Par dualité suite-série, $\sum\limits_{n\geqslant 0}(b_{n+1} - b_n)$ converge. De plus, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n}{b_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{\ell}$ donc, par comparaison (les termes sont positifs), la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{\ell}$ converge et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge aussi.

$(\Longleftarrow)$ Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geqslant 1$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_{n+1} - b_n \leqslant a_n$. Puisque $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0}(b_{n+1} - b_n)$ converge donc, par dualité suite-série, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Par double implication, on a bien établi l'équivalence : $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

6.2 Définissons la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ si l'écriture en base 10 de n ne contient pas le chiffre 5 et $u_n = 0$ sinon. L'énoncé nous demande d'étudier la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n = \sum\limits_{n\in A} \dfrac{1}{n^\alpha}$. Deux cas élémentaires :

- si $\alpha \leqslant 0$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 car $\forall n \in A,\ u_n \geqslant 1$ et que A est infini. $\sum\limits_{n\in A} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- si $\alpha > 1$, $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc $\sum\limits_{n\in A} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge par comparaison aux séries de Riemann ($\alpha > 1$).

Pour $\alpha \in]0;1[$, posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n de cette série. Puisque l'énoncé parle d'écriture en base 10, on va considérer la suite extraite $(S_{10^n-1})_{n\geqslant 1}$ (cela consiste à prendre dans la somme partielle tous les entiers dont l'écriture en base 10 contient au plus n chiffres).

Le plus petit nombre à avoir p chiffres en base 10 est $10^{p-1} = (10\cdots 00)_{10}$ et $10^p - 1 = (99\cdots 99)_{10}$ est le plus grand. On écrit donc $S_{10^n-1} = \sum\limits_{p=1}^{n} \sum\limits_{k=10^{p-1}}^{10^p-1} u_k$ (on scinde la somme selon le nombre de chiffres en base 10). Or, dans l'intervalle $[\![10^{p-1}; 10^p - 1]\!]$ qui contient les entiers avec p chiffres en base 10, il existe $8 \times 9^{p-1}$ entiers qui ne contiennent pas le chiffre 5. En effet, on a 8 choix pour le premier chiffre $(1,2,3,4,6,7,8,9)$ et 9 choix pour les $p-1$ chiffres suivants jusqu'au chiffre des unités $(0,1,2,3,4,6,7,8,9)$. Par conséquent, $\dfrac{8\times 9^{p-1}}{10^{p\alpha}} \leqslant \sum\limits_{k=10^{p-1}}^{10^p-1} u_k \leqslant \dfrac{8\times 9^{p-1}}{10^{(p-1)\alpha}}$ car si $k \in A \cap [\![10^{p-1}; 10^p - 1]\!]$, on a $\dfrac{1}{10^{p\alpha}} \leqslant u_k \leqslant \dfrac{1}{10^{(p-1)\alpha}}$. Ainsi, en sommant ces inégalités, on obtient : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{8\times 9^{p-1}}{10^{p\alpha}} \leqslant S_{10^n-1} \leqslant \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{8\times 9^{p-1}}{10^{(p-1)\alpha}}$. Si on note $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{9}{10^\alpha}\right)^k$ la somme partielle de la série géométrique, on a donc l'encadrement $\dfrac{8}{10^\alpha} \times T_n \leqslant S_{10^n-1} \leqslant 8T_n \quad (\mathrm{I})$.

On sait que $(T_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $\dfrac{9}{10^\alpha} \in]0;1[$ et qu'elle tend vers $+\infty$ dans le cas contraire.

$(\Longrightarrow)$ Si $\dfrac{9}{10^\alpha} \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ donc l'inégalité de gauche de (I) montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{10^n-1} = +\infty$ par minoration. Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ étant croissante, elle ne peut tendre que vers $+\infty$ (car si elle tendait vers un réel ℓ, toutes ses suites extraites tendraient vers cette limite ℓ). Ainsi, la série $\sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

($\Longleftarrow$) Si $\frac{9}{10^\alpha} < 1$, alors $T_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^k \leqslant \frac{1}{1-\frac{9}{10^\alpha}}$. L'inégalité de droite de (I) montre alors que la suite $(S_{10^n-1})_{n\geqslant 1}$ est majorée et, à nouveau, comme elle est croissante, elle converge vers un réel ℓ. $(S_n)_{n\geqslant 1}$ étant croissante, elle ne peut pas tendre vers $+\infty$ comme avant donc elle converge, ainsi $\sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

En général, et on l'utilise assez fréquemment : Quand une suite est monotone, sa convergence équivaut à la convergence de l'une quelconque de ses suites extraites !!!!

Or $\frac{9}{10^\alpha} < 1 \Longleftrightarrow \alpha > \frac{\ln(9)}{\ln(10)}$. Ce qui précède montre alors que $\sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{\ln(9)}{\ln(10)}$.

6.3 **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$ par le théorème de la limite monotone. Si on avait $\ell > 0$, en prenant $v_n = \frac{1}{n+1}$, on aurait bien $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 alors que, puisque $u_n v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ divergerait par comparaison. Absurde ! Ainsi $\ell = 0$.

b. Prenons $N_0 = 0$ et construisons les termes de $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

Initialisation : comme $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Ainsi, il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $S_n = \sum_{k=N_0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \geqslant 1$. Prenons par exemple pour N_1 le plus petit entier n qui vérifie $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \geqslant 1$ de sorte qu'on aura donc $\sum_{k=N_0}^{N_1-1} u_k \geqslant 1$.

Hérédité : soit $p \geqslant 1$, supposons construit $(N_0, \cdots, N_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ vérifiant $0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_p$ et $\forall k \in [\![0; p-1]\!]$, $\sum_{k=N_k}^{N_{k+1}-1} u_k \geqslant 1$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}(S_{n-1} - S_{N_p-1}) = +\infty$, on a encore l'existence de $n_{p+1} > N_p$ tel que $\forall n \geqslant n_{p+1}$, $S_{n-1} - S_{N_p-1} = \sum_{k=N_p}^{n-1} u_k \geqslant 1$. Prenons à nouveau (par exemple) pour N_{p+1} le plus petit entier n tel que $\sum_{k=N_p}^{n-1} u_k \geqslant 1$ de sorte que $N_{p+1} > N_p$ et que $\sum_{k=N_p}^{N_{p+1}-1} u_k \geqslant 1$.

Conclusion : on conclut par principe de récurrence à l'existence de cette suite strictement croissante d'entiers $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=N_i}^{N_{i+1}-1} u_k \geqslant 1$.

c. On constate d'abord que $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante et entière, elle tend naturellement vers $+\infty$ puisqu'on peut montrer facilement par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \geqslant k$. Définissons alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![N_i; N_{i+1}-1]\!]$, $v_k = \frac{1}{i+1}$. Alors, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, il vient $\sum_{k=0}^{N_p-1} u_k v_k = \sum_{i=0}^{p-1}\left(\sum_{k=N_i}^{N_{i+1}-1} u_k v_k\right) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i+1}\left(\sum_{k=N_i}^{N_{i+1}-1} u_k\right) \geqslant \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} = H_p$ (en posant $m = i+1$). Alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{N_p-1} u_k v_k\right)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ car on sait que $H_p \underset{+\infty}{\sim} \ln(p) \to +\infty$, cela implique que la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k v_k$ diverge. De plus, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement décroissante et elle tend vers 0.

d. On peut affirmer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante, on a équivalence entre :

(i) pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge.

(ii) la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

En effet, on a (i) $\Longrightarrow$ (ii) avec **b.** et **c.** par contraposée. Réciproquement, si on suppose (ii), soit une suite complexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, $u_nv_n \underset{+\infty}{=} o(u_n)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_nv_n$ converge absolument donc elle converge.

6.4 **a.** Pour $n\geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3(n+1)-2}{3(n+1)} = 1-\dfrac{2}{3n+3} = 1-\dfrac{2}{3n}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$ ce qui donne par développements limités $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1-\dfrac{2}{3n}\Big(1+o(1)\Big) \underset{+\infty}{=} 1-\dfrac{2}{3n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. De même, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n^{3/4}}{(n+1)^{3/4}} = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-3/4} \underset{+\infty}{=} 1-\dfrac{3}{4n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{=} \Big(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}\Big)\dfrac{1}{n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n} > 0$ ce qui prouve, comme deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang, que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 0$ pour n assez grand.

b. On en déduit que $\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \Longleftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geqslant \dfrac{u_n}{v_n}$. Ainsi, la suite $\Big(\dfrac{u_n}{v_n}\Big)_{n\geqslant n_0}$ est croissante ce qui montre que $\forall n\geqslant n_0$, $\dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ donc $u_n \geqslant \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}v_n$ et comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ diverge avec Riemann, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge aussi.

Mieux, on peut poser $w_n = \ln\Big(u_n n^{2/3}\Big)$ de sorte que $w_{n+1}-w_n = \ln\Big(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big)-\dfrac{2}{3}\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$ donc, $w_{n+1}-w_n = \ln\Big(1-\dfrac{2}{3n+3}\Big)-\dfrac{2}{3}\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{2}{3(n+1)}-\dfrac{2}{3n}+O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(w_{n+1}-w_n)$ converge absolument donc converge et, par dualité suite-série, $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge (vers $K\in\mathbb{R}$) ce qui, par continuité de $\exp$, montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n n^{2/3} = e^K = A > 0$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^{2/3}}$.

6.5 **a.** Par une récurrence simple, u_n est bien défini et $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $\ln(u_n)$ est bien défini.

<u>Méthode 1</u> : par récurrence, on montre que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k}{2k+3}$. Ainsi, $\ln(u_n) = -\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\dfrac{3}{2k}\Big)$. Par conséquent, d'après l'énoncé, $w_n = \ln(u_n)+\dfrac{3}{2}\ln(n) \underset{+\infty}{=} \dfrac{3}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\dfrac{3}{2k}\Big)-\dfrac{3\gamma}{2}+o(1)$ donc $w_n \underset{+\infty}{=} \sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{3}{2k}-\ln\Big(1+\dfrac{3}{2k}\Big)\Big)-\dfrac{3\gamma}{2}+o(1)$. Or $\dfrac{3}{2k}-\ln\Big(1+\dfrac{3}{2k}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$ donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\Big(\dfrac{3}{2k}-\ln\Big(1+\dfrac{3}{2k}\Big)\Big)$ converge absolument par comparaison aux séries de Riemann. Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{3}{2k}-\ln\Big(1+\dfrac{3}{2k}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} S+o(1)$ avec $S\in\mathbb{R}$ et on a bien $w_n \underset{+\infty}{=} S-\dfrac{3\gamma}{2}+o(1)$ ce qui prouve la convergence de la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ (vers $S-\dfrac{3\gamma}{2}$).

<u>Méthode 2</u> : posons, pour $n\geqslant 1$, $w_n = \ln(u_n)+\dfrac{3}{2}\ln(n)$. Par dualité suite-série, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(w_{n+1}-w_n)$ converge. Or $w_{n+1}-w_n = \ln\Big(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big)+\dfrac{3}{2}\ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)$ donc $w_{n+1}-w_n = \ln\Big(\dfrac{2n+2}{2n+5}\Big)+\dfrac{3}{2}\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) = \ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)-\ln\Big(1+\dfrac{5}{2n}\Big)+\dfrac{3}{2}\ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$. Ainsi, à l'ordre 2, $w_{n+1}-w_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{2n}+\dfrac{3}{2n}+O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc, avec Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1}(w_{n+1}-w_n)$ converge absolument. Par dualité suite-série, $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge et vérifie bien $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = -\dfrac{3}{2}\ln(n)+w_n$.

b. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, alors $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{+\infty}{=} \exp\Big(-\dfrac{3}{2}\ln(n)+\ell+o(1)\Big) \underset{+\infty}{=} \dfrac{e^{\ell}e^{o(1)}}{n^{3/2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\ell}}{n^{3/2}}$ par continuité de l'exponentielle. Ainsi, à nouveau par Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge car $\dfrac{3}{2}>1$.

c. Soit $n\geqslant 1$, pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, on a $(2k+5)u_{k+1} = (2k+2)u_k$ donc $2(k+1)u_{k+1}+3u_{k+1} = 2ku_k+2u_k$.

On somme pour avoir $2\sum_{k=0}^{n}(k+1)u_{k+1}+3\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}=2\sum_{k=0}^{n}ku_k+2\sum_{k=0}^{n}u_k$. On pose $m=k+1$ dans les deux premières sommes et on a bien $2\sum_{m=1}^{n+1}mu_m+3\sum_{m=1}^{n+1}u_m=2\sum_{k=0}^{n}ku_k+2\sum_{k=0}^{n}u_k$.

On peut aussi le montrer par récurrence. En effet, on a $2\sum_{k=1}^{0+1}ku_k+3\sum_{k=1}^{0+1}u_k=2u_1+3u_1=5u_1$ mais aussi $2\sum_{k=0}^{0}ku_k+2\sum_{k=0}^{0}u_k=2u_0$ et on a bien $u_1=\dfrac{2.0+2}{2.0+5}u_0$ donc la relation est vraie pour $n=0$. Soit $n\geqslant 0$ tel que $2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k+3\sum_{k=1}^{n+1}u_k=2\sum_{k=0}^{n}ku_k+2\sum_{k=0}^{n}u_k$, alors, par hypothèse de récurrence, il vient $2\sum_{k=1}^{n+2}ku_k+3\sum_{k=1}^{n+2}u_k=2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k+3\sum_{k=1}^{n+1}u_k+\big(2(n+2)+3\big)u_{n+2}=2\sum_{k=0}^{n}ku_k+2\sum_{k=0}^{n}u_k+(2n+7)u_{n+2}$ donc $2\sum_{k=1}^{n+2}ku_k+3\sum_{k=1}^{n+2}u_k=2\sum_{k=0}^{n}ku_k+2\sum_{k=0}^{n}u_k+(2n+4)u_{n+1}=2\sum_{k=0}^{n+1}ku_k+2\sum_{k=0}^{n+1}u_k$. Par principe de récurrence, la relation $2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k+3\sum_{k=1}^{n+1}u_k=2\sum_{k=0}^{n}ku_k+2\sum_{k=0}^{n}u_k$ est vraie pour tout entier $n\geqslant 0$.

d. Posons $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ la somme partielle de $\sum_{n\geqslant 0}u_n$. On sait que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$. La relation de la question **c.** s'écrit, après télescopage, $2(n+1)u_{n+1}+3S_{n+1}-3u_0=2S_n$ (R). Or $nu_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{e^{\ell}}{\sqrt{n}}$ d'après **b.**, donc $\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$. En passant à la limite dans (R), $3S-3=2S$. Ainsi, $S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=3$.

6.6 **a.** Avec ces hypothèses, pour $n \geqslant N$, $u_n v_n - v_{n+1}u_{n+1} \geqslant c u_n > 0$ donc la suite $(u_n v_n)_{n \geqslant N}$ est décroissante donc $\forall n \geqslant N$, $u_n v_n \leqslant u_N v_N$ donc $u_n \leqslant \dfrac{u_N v_N}{v_n}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{v_n}\Big)$. Comme $\sum\limits_{n \geqslant N} \dfrac{1}{v_n}$ converge par hypothèse, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge aussi.

b. Ici, pour $n \geqslant N$, $u_n v_n - v_{n+1}u_{n+1} \leqslant 0$ donc $(u_n v_n)_{n \geqslant N}$ est croissante donc $\forall n \geqslant N$, $u_n v_n \geqslant u_N v_N$ ou $u_n \geqslant \dfrac{u_N v_N}{v_n}$. Comme $\sum\limits_{n \geqslant N} \dfrac{1}{v_n}$ diverge par hypothèse, par minoration, $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ diverge aussi.

c. Prenons ici $v_n = n^{1+\frac{c}{2}}$ pour $n \geqslant 0$, alors $w_n = v_n - \dfrac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n} \geqslant n^{1+\frac{c}{2}} - (n+1)^{1+\frac{c}{2}}\Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big) = z_n$ et on écrit $z_n = n^{1+\frac{c}{2}}\Big(1 - \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{1+\frac{c}{2}}\Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big)\Big)$. Or on sait que $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{1+\frac{c}{2}} \underset{+\infty}{=} 1 + \Big(1+\dfrac{c}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ donc $z_n \underset{+\infty}{=} n^{1+\frac{c}{2}}\Big(1 - \Big(1+\Big(1+\dfrac{c}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} n^{1+\frac{c}{2}}\Big(\dfrac{c}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$ donc $z_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{c\, n^{\frac{c}{2}}}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = +\infty$ donc $\exists N \geqslant 0$, $\forall n \geqslant N$, $z_n \geqslant 1$ donc $\forall n \geqslant N$, $w_n \geqslant 1$. D'après la question **a.**, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{v_n}$ converge car $1 + \dfrac{c}{2} > 1$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

d. Prenons ici $v_n = n - 1 > 0$ pour $n \geqslant 2$ alors, par hypothèse, on a $\forall n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$ donc $w_n = v_n - \dfrac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n} = (n-1) - n\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant n\Big[\dfrac{n-1}{n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big] = n\Big[1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big] \leqslant 0$ dont on déduit, d'après la question **b.**, que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ diverge.

e. Selon l'énoncé, traitons deux cas :

$\underline{A > 1}$ Par hypothèse, pour $c > 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big) = 1 - \dfrac{A}{n} + \dfrac{f(s)}{n^s} - \Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big) \underset{+\infty}{=} \dfrac{c+1-A}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Il suffit donc de prendre $c = \dfrac{A-1}{2} > 0$ pour que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \Big(1 - \dfrac{1+c}{n}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{A-1}{2n} < 0$ donc qu'à partir d'un certain rang, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \dfrac{1+c}{n}$. D'après la question **c.**, $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

$\underline{A < 1}$ Prenons $v_0 = v_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2$, $v_n = n - 1$ de sorte que la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{v_n}$ diverge et calculons $w_n = n - 1 - \dfrac{n u_{n+1}}{u_n} = n - 1 - n + A - \dfrac{f(s)}{n^{s-1}} \underset{+\infty}{=} A - 1 + o(1)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = A - 1 < 0$ ce qui montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N$, $w_n \leqslant 0$. D'après **b.**, $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ diverge.

$\underline{A = 1}$ Posons $a_n = \ln(n u_n)$ pour $n \geqslant 1$, alors $a_{n+1} - a_n = \ln\Big(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big) + \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$ donc, par hypothèse, on a $a_{n+1} - a_n = \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big) + \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc, par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n \geqslant 1}(a_{n+1} - a_n)$ converge donc, par dualité suite-série, la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ converge. Notons ℓ sa limite, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n u_n) = \ell$ et, par continuité de $\exp$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = \lambda = e^{\ell}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$ qui montre, comme la série harmonique diverge, que $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ diverge.

On conclut bien avec ces trois cas que $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $A > 1$.

f. Posons $u_n = \Big(\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\Big)^{\alpha} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \Big(\dfrac{2n+1}{2n+2}\Big)^{\alpha}$ qui se simplifie en $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \Big(1 + \dfrac{1}{2n}\Big)^{\alpha} \times \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{-\alpha} \underset{+\infty}{=} \Big(1 + \dfrac{\alpha}{2n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big(1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big) \underset{+\infty}{\sim} 1 - \dfrac{\alpha}{2n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc, d'après la question **e.**, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \Big(\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\Big)^{\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$ (avec $s = 2$).

On pouvait aussi utiliser l'équivalent de STIRLING car $\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ par un calcul classique donc $u_n=\left(\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)^\alpha\underset{+\infty}{\sim}\left(\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}(e^n)^2}{e^{2n}2^{2n}\sqrt{2\pi n}^2(n^n)^2}\right)^\alpha=\dfrac{1}{(\sqrt{\pi n})^\alpha}=\dfrac{1}{\pi^{\frac{\alpha}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}}}$. D'après le critère des séries de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge si et seulement si $\alpha>2$.

$\boxed{6.7}$ **a.** On suppose qu'il existe deux réels $A\neq 0$ et $r\neq 0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ g_n=Ar^n$. Pour que $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$ soit défini pour tout entier n, il est nécessaire et suffisant que $A>0$ et $r>0$. Alors $g_{n+1}-g_n=Ar^n(r-1)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{A}}r^{-\frac{n}{2}}$. On traite deux cas :

- Si $r=1$, on a $g_{n+1}-g_n=0$ alors que $\dfrac{1}{\sqrt{g_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{A}}\neq 0$.
- Si $r\neq 1$, $Ar^n(r-1)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{A}}r^{-\frac{n}{2}}$ équivaut à $A^{3/2}r^{3n/2}(r-1)\underset{+\infty}{\sim}1$ ou encore $(Ar^n)^{3/2}=\dfrac{1}{r-1}>0$.

Or $(Ar^n)_{n\geqslant 0}$ ne peut pas converger vers un réel strictement positif sans que r soit égal à 1.

Il n'existe donc aucune suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g_{n+1}-g_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$.

b. Soit $(A,\alpha)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et $v_n=An^\alpha>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Alors $\dfrac{1}{\sqrt{v_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{An^\alpha}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{A}}n^{\frac{-\alpha}{2}}$ et on a aussi $v_{n+1}-v_n=A(n+1)^\alpha-An^\alpha=An^\alpha\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)\underset{+\infty}{=}An^\alpha\left(1+\dfrac{\alpha}{n}-1+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\underset{+\infty}{=}A\alpha n^{\alpha-1}+o\left(n^{\alpha-1}\right)$ donc $v_{n+1}-v_n\underset{+\infty}{\sim}A\alpha n^{\alpha-1}$. Ainsi, $v_{n+1}-v_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{v_n}}\iff A\alpha n^{\alpha-1}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{A}}n^{\frac{-\alpha}{2}}\underset{+\infty}{\sim}n^{\frac{3\alpha}{2}-1}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{A^{3/2}\alpha}$ ce qui impose $A^{3/2}\alpha=1$ et $\dfrac{3\alpha}{2}-1=0$. Il existe donc un unique couple $(A,\alpha)=\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2/3},\dfrac{2}{3}\right)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tel qu'en posant $v_n=An^\alpha$, on ait $v_{n+1}-v_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$.

c. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car $u_0>0$ et, si $u_n>0$ pour un entier $n\in\mathbb{N}$, alors $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}>0$ donc, par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$ est bien défini.

La relation $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ (1) montre que $u_{n+1}>u_n$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. De plus, si elle était majorée, elle convergerait vers un réel $\ell>u_0=1$ d'après le théorème de la limite monotone et, en passant à la limite dans (1), on a $\ell=\ell+\dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$ qui est absurde. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ toujours d'après le théorème de la limite monotone.

Comme $\beta>0$ et que $t\mapsto t^\beta$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité $u_{n+1}>u_n$ implique $u_{n+1}^\beta>u_n^\beta$ donc $p_n=\left(\dfrac{1}{u_n}\right)^\beta-\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)^\beta$ est bien défini et $p_n>0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n^\beta}=0$, la suite $\left(\dfrac{1}{u_n^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, par dualité suite-série, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}p_n$ converge et on sait qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_n=\dfrac{1}{u_0^\beta}-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n^\beta}=1$.

d. <u>Initialisation</u> : comme $u_1=u_0+\dfrac{1}{\sqrt{u_0}}=1+1=2$, on a bien $1\leqslant u_1=2\leqslant 2\times 1=2$.

<u>Hérédité</u> : soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant 2n$, alors $\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\leqslant u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}\leqslant 2n+\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$.

Or on a $\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\geqslant\sqrt{n+1}\iff n+\sqrt{2}+\dfrac{1}{2n}\geqslant n+1\iff\sqrt{2}+\dfrac{1}{2n}\geqslant 1$ est vrai en élevant au carré. De plus, $2n+\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}\leqslant 2(n+1)\iff\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}\leqslant 2$ est clairement vrai pour $n\geqslant 1$. On a donc $\sqrt{n+1}\leqslant\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\leqslant u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}\leqslant 2n+\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}\leqslant 2n+2$ et, par transitivité, $\sqrt{n+1}\leqslant u_{n+1}\leqslant 2n+2$.

<u>Conclusion</u> : par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant 2n$.

e. Pour avoir un équivalent de u_n, on emploie une méthode classique mais maintenant hors programme en cherchant un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^m - u_n^m) = \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $u_{n+1}^m - u_n^m = \left(u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}\right)^m - u_n^m = u_n^m\left[\left(1+\dfrac{1}{u_n^{3/2}}\right)^m - 1\right] \underset{+\infty}{\sim} u_n^m\left(1 + \dfrac{m}{u_n^{3/2}} - 1 + o\left(\dfrac{1}{u_n^{3/2}}\right)\right)$ ce qui montre que $u_{n+1}^m - u_n^m \underset{+\infty}{=} \dfrac{m}{u_n^{3/2-m}} + o\left(\dfrac{1}{u_n^{3/2-m}}\right)$ donc que $u_{n+1}^m - u_n^m \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{m}{u_n^{3/2-m}}$. Il est donc nécessaire et suffisant de prendre $m = \dfrac{3}{2}$ pour avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^m - u_n^m) = \lambda = \dfrac{3}{2} \neq 0$. D'après le théorème de Cesaro (hors programme), et puisque $\dfrac{u_n^m - u_0^m}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^m - u_k^m)$ par télescopage, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^m - u_0^m}{n} = \dfrac{3}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^m}{n} = \dfrac{3}{2}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_0^m}{n} = 0$. On a donc $u_n^m \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3n}{2}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}} = An^\alpha$!!!

f. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, $p_n = \left(\dfrac{1}{u_n}\right)^\beta - \left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)^\beta = \left(\dfrac{1}{u_n}\right)^\beta\left(1 - \dfrac{1}{(1+u_n^{-3/2})^\beta}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\dfrac{1}{(1+u_n^{-3/2})^\beta} = (1+u_n^{-3/2})^{-\beta} \underset{+\infty}{=} 1 - \beta u_n^{-3/2} + o(u_n^{-3/2})$ ce qui donne $p_n \underset{+\infty}{=} \beta u_n^{-3/2-\beta} + o(u_n^{-3/2-\beta})$. Ainsi, on a $p_n \underset{+\infty}{\sim} \beta u_n^{-3/2-\beta}$ donc $p_n u_n \underset{+\infty}{\sim} \beta u_n^{-1/2-\beta} \underset{+\infty}{\sim} \beta\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}-\frac{2\beta}{3}} n^{-\frac{1}{3}-\frac{2\beta}{3}}$. Par conséquent, par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n u_n$ converge si et seulement si $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2\beta}{3} > 1 \iff \beta > 1$.

6.8 **a.** On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1)$ donc $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et, par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}(u_n - u_{n-1})$ converge donc, par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Si on note γ sa limite, on a donc $u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$ donc $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b. D'après **a.**, $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1) \underset{+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \ln(2)$.

c. Pour $n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{j=n+1}^{2n}\dfrac{1}{j} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$ en posant $j = n+k$ qu'on écrit aussi comme une somme de Riemann $H_{2n} - H_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ en posant $a = 0$, $b = 1$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Comme f est continue sur le segment $[0;1]$, par un théorème du cours relatif à la convergence des sommes de Riemann, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

d. Posons, pour $n \geqslant 1$, $S_{1,n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, $S_{2,n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(2k-1)}$ et $S_{3,n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} i^2}$ les trois sommes partielles associées aux séries proposées.

$\underline{S_1}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, ce qui garantit l'existence de sa somme S_1. Pour $n \geqslant 1$, on a $S_{1,2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k}\right) - 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k} = \sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ donc $S_{1,2n} = H_{2n} - H_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{1,2n} = \ln(2)$. Comme on a vu que $(S_{1,n})_{n\geqslant 1}$ converge vers S_1, sa suite extraite $(S_{1,2n})_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers S_1 donc $S_1 = \ln(2)$.

$\underline{S_2}$ La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n-1)}$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN car on a $\frac{1}{n(2n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ d'où l'existence de sa somme S_2. $S_{2,n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2k-1} - \frac{1}{k}\right)$ en décomposant en éléments simples donc $S_{2,n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\Big) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S_{2,n} = 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ donc $S_{2,n} = 2H_{2n} - 2H_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2,n} = 2\ln(2)$. Ainsi, $S_2 = 2\ln(2)$.

$\underline{S_3}$ On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} > 0$. Comme $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^3}$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN. Et on peut décomposer la fraction rationnelle $\frac{6}{X(X+1)(2X+1)}$ en éléments simples en trouvant trois réels a, b, c tels que l'on ait la relation $\frac{6}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1} = \frac{a(X+1)(2X+1) + bX(2X+1) + cX(X+1)}{X(X+1)(2X+1)}$ et qui donne, par identification, $(2a+2b+c)X^2 + (3a+b+c)X + a = 6$. On a donc le système linéaire $a - 6 = 3a + b + c = 2a + 2b + c = 0$ qui se résout en $a = 6$, $b = 6$ et $c = -24$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $S_{3,n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1}\right) = 6H_n + 6(H_{n+1} - 1) + 24 - 24\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\Big)$, d'où $S_{3,n} = 12H_n - 6 + \frac{6}{n+1} + 24 - 24H_{2n} + 12H_n - \frac{24}{2n+1} = 18 - 24(H_{2n} - H_n) + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$. D'après le résultat des questions **b.** et **c.**, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{24}{2n+1} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3,n} = 18 - 24\ln(2)$. Ainsi, $S_3 = 18 - 24\ln(2) \sim 1,36$.