ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 2 ALGÈBRE GÉNÉRALE ET LINÉAIRE

2.1 Complexes

2.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

2.2 Pour $x\in\mathbb{R}$ et $p\in\mathbb{N}$, calculer $S_p(x)=\sum_{k=1}^{2p}(-1)^{k-1}\dfrac{\cos(kx)}{2^k}$. Déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty}S_p(x)$.

2.3 Résoudre $(1+z)^{2n}=(1-z)^{2n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

2.4 <u>*Centrale PC 2011 d'après RMS*</u> Déterminer les $z\in\mathbb{C}$ tels que z, z^2 et z^5 soient alignés.

2.5 <u>*Centrale PSI 2012*</u> **a.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que $\forall(a,b)\in\mathbb{C}^2,\ \prod_{k=0}^{n-1}\left(a+\omega^k b\right)=a^n-(-b)^n$.

b. Avec ces notations, établir que : $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{2k}-2\omega^k\cos(\theta)+1\right)=2\big(1-\cos(n\theta)\big)$.

2.6 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit z_0 un nombre complexe fixé.

a. Soit $\theta\in]-\pi;\pi[$, déterminer en fonction de θ le module et un argument de $1+e^{i\theta}$.
b. Résoudre $(E)\ :\ z+|z|=z_0$ selon les valeurs de z_0 (on cherche les solutions complexes z).

2.7 <u>*Centrale PC 2011 d'après RMS*</u> Soit $\Phi : z\ \mapsto\ \dfrac{z-i}{z+i}$.
Montrer que Φ réalise une bijection de $\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ sur $\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$.

2.8 <u>*Centrale PSI 2012*</u> On se donne 4 points A, B, C, D du plan dont les affixes respectives sont a, b, c, d.

a. Montrer que : $\forall(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3,\ |z_2|\,|z_1-z_3|\leqslant|z_1|\,|z_2-z_3|+|z_3|\,|z_1-z_2|$.
b. En déduire que $AC.BD\leqslant AB.CD+AD.BC$.
c. Montrer que si A, B, C, D sont cocycliques "dans cet ordre" (A, B, C et D sont sur un cercle $\mathcal{C}$ et on rencontre ces 4 points sur $\mathcal{C}$ dans l'ordre indiqué) alors $AC.BD=AB.CD+AD.BC$.

2.2 Dénombrement

2.9 Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n^2}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$.

2.10 <u>*Centrale PSI 2008 d'après RMS*</u> Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer $\sum_{X\in\mathcal{P}(E)}\mathrm{card}\,(X)$.

2.11 <u>*Mines PSI 2008 d'après RMS*</u> Soient E un ensemble fini, A, B des parties de E.
Combien y a-t-il de parties X de E telles que $A\cup X=B$?

2.12 <u>*ENSEA PSI 2008 d'après RMS*</u> Calculer $\sum_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

2.13 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dénombrer les surjections de $[\![1;n+1]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.
Faire ensuite de même pour celles de $[\![1;n+2]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.

2.14 *Nombre de surjections*

a. Montrer que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \sum\limits_{k=p}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = 1$ si $n = p$ et 0 si $n > p$.

b. En déduire que si on a deux suites $(x_0, \cdots, x_n)$ et $(y_0, \cdots, y_n)$ tels que : $\forall p \in [\![0;n]\!],\ y_p = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x_k$ alors on a aussi : $\forall q \in [\![0;n]\!],\ x_q = \sum\limits_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} y_k$.

c. Justifier que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall p \in [\![1;n]\!],\ p^n = \sum\limits_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$ où $S_{n,q}$ qui est le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;q]\!]$ (pour $q \in [\![1;n]\!]$). En déduire une expression de $S_{n,q}$ pour $q \in [\![1;n]\!]$.

2.15 *Centrale PSI 2012* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit a_n le nombre de n-uplets formés de 1, de 2, de 3 qui ont un nombre pair de 1. Les couples vérifiant ceci sont $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(1,1)$: $a_2 = 5$. On convient que $a_0 = 1$.
a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner b_n : le nombre de tous les n-uplets formés de 1, de 2, de 3 (sans condition) ?
b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer a_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
c. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de a_n en fonction de n.

2.3 Groupes, anneaux, corps

2.16 *Centrale PSI 2012* Soit H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G tels que $H \cap K = \{e\}$ (e désignant le neutre de G). On note $HK = \{hk \mid h \in H \text{ et } k \in K\}$. Montrer que $\text{card}\,(HK) = \text{card}\,(H)\text{card}\,(K)$.

2.17 *Centrale PC 2011 d'après RMS* Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & y & y \\ 0 & y & y \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \right\}$ est un groupe.

2.18 *Centrale PSI 2010 d'après RMS* Soient A un anneau, a et b dans A tels que $1 + ab$ est inversible.
Montrer que $1 + ba$ est inversible d'inverse $1 - b(1+ab)^{-1}a$.

2.19 *Centrale PSI 2010 d'après RMS* Soient A un anneau tel que $0 \neq 1$ et $M = \{x \in A,\ x^2 = x\}$.
On suppose que M est fini. Montrer que son cardinal est pair.

2.20 *Centrale PC 2011 d'après RMS* Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ l'ensemble des entiers de Gauss.
a. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
b. Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}[i]^2$ avec $y \neq 0$. Montrer qu'il existe $(q,r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tels que $x = qy + r$ avec $|r| < |y|$.

2.4 Arithmétique

2.21 Connaissant le quotient de la division euclidienne de l'entier $a - 1 \geqslant 2$ par l'entier $b \geqslant 2$, déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

2.22 *CCP PSI 2011 d'après RMS* Existe-t-il $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 2011$?

2.23 *Centrale PSI 2008 d'après OdlT* Soit σ_n la somme des chiffres de n écrit en base 10. Justifier l'existence de $\text{Sup}\left\{\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $\text{Inf}\left\{\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Quelles sont leurs valeurs et sont-ils atteints ?

2.5 Groupe symétrique

2.24 Soit $c = (a_1, \cdots, a_k)$ un cycle de $\mathfrak{S}_n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

2.25 Quelle est la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n+2 & n+1 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$?

2.26 Soit $n \geqslant 2$, $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i < j < n$, déterminer $(\, j \quad j+1\,) \circ (\, i \quad j\,) \circ (\, j \quad j+1\,)$. En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $\big((\, i \quad i+1\,)\big)_{i \in [\![1;n-1]\!]}$. Montrer que cette partie génératrice est minimale : c'est à dire qu'une partie plus petite que celle-ci au sens de l'inclusion ne peut engendrer $\mathfrak{S}_n$.

2.27 Soit $n \geqslant 2$ et $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, déterminer $(\, 1 \quad j\,) \circ (\, 1 \quad i\,) \circ (\, 1 \quad j\,)$. En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $\big((\, 1 \quad i\,)\big)_{i \in [\![2;n]\!]}$. Montrer que cette partie génératrice est minimale : c'est à dire qu'une partie plus petite que celle-ci au sens de l'inclusion ne peut engendrer $\mathfrak{S}_n$.

2.28 Quelle est la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$?

2.29 Montrer que les seuls morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ sont $u : \sigma \mapsto 1$ ou la signature.

2.6 Polynômes et fractions rationnelles

2.30 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin\alpha + \cos\alpha)^n$ par $X^2 + 1$.

2.31 Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux, montrer que $(X^p - 1)(X^q - 1)$ divise $(X-1)(X^{pq} - 1)$.

2.32 Soit $n \geqslant 1$ et $P_n = (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$. Montrer que P_n est divisible par $(X^2 + X + 1)^2$.

2.33 Soit p un nombre premier, $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{p}\right)$ et $P = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$.
Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire que $p = \displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant p-1} (1 - \omega^k)$.

2.34 Décomposer $X^8 + X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles réels.

2.35 Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le système : $x + y + z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = a$ possède-t-il des solutions réelles et les déterminer alors.

2.36 Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \dfrac{2X+3}{X^2(X^2+1)}$.

2.37 <u>*Centrale PSI 2012*</u> **a.** Montrer que si $Q(X) = Q(X-1)$ alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme constant.
b. En déduire tous les polynômes P tels que $(X-2)P(X) = (X+1)P(X-1)$.

2.38 <u>*Centrale PC 2011 d'après RMS*</u> Résoudre $P(X^2) = P(X)^2$.

2.39 <u>*Centrale PC 2011 d'après RMS*</u> Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+9)\,P(X) = X\,P(X+1)$.

2.40 <u>*Centrale PSI 2011 d'après RMS*</u> Soit l'ensemble $\mathcal{E}$ des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

a. Donner des exemples de tels polynômes.

b. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathcal{E}$ avec $a_0 a_n \neq 0$. On pose $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$. Montrer que $PQ = X^n$ puis que $n = 0$.

c. Montrer que $\mathcal{E} = \{\pm X^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

2.41 <u>*Centrale PSI 2010 d'après RMS*</u> Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose que toutes ses racines ont une partie imaginaire strictement négative.
Montrer que le polynôme $Q(X) = \mathrm{Re}\,(a_0) + \mathrm{Re}\,(a_1)X + \cdots + \mathrm{Re}\,(a_n)X^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

2.42 <u>*Centrale PC 2011 d'après RMS*</u> Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

2.43 <u>*Centrale PC 2011 d'après RMS*</u> Soit $n \geqslant 2$. Factoriser $P = 1 + X + \cdots + X^n$ et en déduire $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

2.44 <u>*Centrale PC 2011 d'après RMS*</u> Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

2.45 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$.

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire une expression compacte de $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(4 + \mathrm{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

2.46 <u>*Centrale PSI 2011 d'après RMS*</u> Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

a. Déterminer les $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(X-a) + Q(X+a) = 2\,Q(X)$ et $Q(0) = 0$.

b. Déterminer les $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(X-a) + Q(X+a) = 2\,Q(X)$.

2.7 Applications linéaires

2.47 Soit E et F deux espaces de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

a. Montrer que : $|\mathrm{rang}\, u - \mathrm{rang}\, v| \leqslant \mathrm{rang}\,(u + v) \leqslant \mathrm{rang}\, u + \mathrm{rang}\, v$.

b. Montrer que : $\dim \mathrm{Ker}\,(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) + \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)$.

2.48 Soit p et q deux projecteurs de E qui commutent.

Montrer que $p \circ q$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$.

2.49 Soit p et q deux projecteurs de E. Montrer que : $p + q$ projecteur de $E \iff p \circ q = q \circ p = 0$.

Prouver alors que $p + q$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

2.50 Soit E et F deux espaces de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

a. Montrer que : $|\mathrm{rang}\, u - \mathrm{rang}\, v| \leqslant \mathrm{rang}\,(u + v) \leqslant \mathrm{rang}\, u + \mathrm{rang}\, v$.

b. Montrer que : $\dim \mathrm{Ker}\,(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) + \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)$.

2.51 <u>*CCP PSI 2011 d'après RMS*</u> Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}\, u$ puis que $v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

2.52 *Centrale PSI 2012* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

On dit que f vérifie la propriété (A) s'il existe un projecteur p de E tel que $f = p \circ f - f \circ p$.
a. Supposons que f vérifie (A), déterminer $p \circ f \circ p$ et en déduire que $f^2 = 0$.
b. Réciproquement, montrer que si $f^2 = 0$, alors f vérifie la propriété (A).
c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (les polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $2n-1$), on définit $f : E \to E$ par : $\forall P \in E,\ f(P) = P^{(n)}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$, un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire un projecteur simple p de E tel que $f = p \circ f - f \circ p$.

2.53 Soit E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $F = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f^k)$ et $G = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}\,(f^k)$.
a. Montrer qu'il existe p tel que $F = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $G = \mathrm{Im}\,(f^p)$.
b. Montrer aussi que :
(i) F et G sont des sous-espaces stables par f.
(ii) f_F est nilpotent et f_G est un automorphisme de G.
(iii) $E = F \oplus G$.
c. Établir l'unicité du couple (F, G) vérifiant les conditions ci-dessus.

2.54 *X-ENS PSI 2011 d'après RMS* Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u \circ v = v$ et $u \circ v \circ u = u$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Ker}(v \circ u)$, que $\mathrm{Im}\,v = \mathrm{Im}(v \circ u)$ et aussi que $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,v$.
b. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,u$ dans E et F_1 un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,u$ dans F. Soit $w \in \mathcal{L}(E_1, \mathrm{Im}\,u)$ tel que : $\forall x \in E_1$, $w(x) = u(x)$.
(1) Montrer que w est un isomorphisme.
Soit $v \in \mathcal{L}(F, E)$ défini par : $v(y) = w^{-1}(y)$ si $y \in \mathrm{Im}\,u$ et $v(y) = 0$ si $y \in F_1$.
(2) Montrer que $E_1 = \mathrm{Im}\,v$, $F_1 = \mathrm{Ker}\,v$, $v \circ u \circ v = v$ et $u \circ v \circ u = u$.
(3) Montrer que v est l'unique élément de $\mathcal{L}(F, E)$ vérifiant les conditions de (ii).

2.55 *Compléments OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 218 abordable dès la 1ère année*

Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice p, alors $p \leqslant n$.
Donner une condition suffisante pour qu'il n'existe pas de matrice X vérifiant $X^2 = M$.
Trouver l'inverse de $I_n - M$.

2.56 *Compléments OdlT 2016/2017 Saint-Cyr PSI planche 541I abordable dès la 1re année*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$.
Montrer que si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires.
Montrer que dans le cas contraire, alors $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ ne sont pas forcément supplémentaires.

2.57 *Compléments OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 568II incomplet*

Montrer que si f est un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace E de dimension n, tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$, alors l'entier n est pair. Montrer que pour x non nul, $(x, f(x))$ est libre.

2.8 Polynômes d'endomorphismes

2.58 *Mines PSI 2007 d'après RMS* Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace de dimension $n \geqslant 1$.

Montrer que l'on a l'équivalence : $u \in \mathrm{Vect}\Big(u^k \mid k \geqslant 2\Big)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u = E$.

2.59 *CCP PSI 2011 d'après RMS* Soit E un espace vectoriel, p un projecteur de E et Q un polynôme.

À quelle condition $Q(p)$ est-il un projecteur ?

2.60 *X MP* Soit E un espace de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$, on suppose que f est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $g = f \circ P(f)$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $f = g \circ Q(g)$.

2.61 *TPE* Soit E un espace de dimension finie, $f \in GL(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^p = 0$.

a. Montrer que $\mathrm{id}_E + f^{-1} \circ g \circ f$ est un automorphisme de E et exprimer son inverse.
b. Montrer que $H = \{\mathrm{id}_E + P(g) \mid P \in \mathbb{K}[X] \text{ et } P(0) = 0\}$ est un sous-groupe commutatif de $GL(E)$.

2.9 Matrices

2.62 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on pose alors $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
a. Calculer le rang de M en fonction de A et B.
b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.
c. Si M est inversible, exprimer son inverse M^{-1} en fonction de A et B.

2.63 *Centrale PSI 2012* Soit E un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie $n \geqslant 2$, φ une forme linéaire non nulle sur E, u un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$; on définit alors l'application $f : E \to E$ par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)u$.
a. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, déterminer $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$. Calculer $(f - \mathrm{id}_E)^2$.
b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n + E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c. Réciproquement, si $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\mathrm{rang}\,(g - \mathrm{id}_E) = 1$ et $(g - \mathrm{id}_E)^2 = 0$, montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle ψ et un vecteur non nul v tels que $\forall x \in E,\ g(x) = x + \psi(x)v$.
d. Revenons à f, justifier que si E est euclidien, f^{-1} a une forme analogue à celle de f.

2.64 *Centrale PSI 2012* Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tel que $AB = C$ où $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On appelle f, g et h les applications linéaires canoniquement associées à A, B, C respectivement.
a. Déterminer le rang de h ; puis ceux de f et de g. Que peut-on en déduire sur f et g ?
b. Calculer C^2. Caractériser géométriquement l'endomorphisme h. Montrer que $BA = I_2$.
c. Plus généralement, soit deux entiers p et q tels que $1 \leqslant p < q$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ qui vérifient $(AB)^2 = (AB)$ avec $\mathrm{rang}\,(AB) = p$; montrer que $BA = I_p$.
d. Soit E, F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et q avec $1 \leqslant p < q$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Justifier que $f \circ g$ est un projecteur et déterminer son rang, son image et son noyau.

2.65 *Centrale PSI 2012* Soit $n \geqslant 1$, $E = \mathbb{C}^n$, on s'intéresse aux couples $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $u^2 = v^2 = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$. Décrire tous les couples solutions (en précisant les matrices dans une base convenablement choisie) ; montrer qu'il en existe une infinité si $n = 4$, mais aucun si $n = 3$.

2.66 *X-ENS PSI 2007 d'après RMS* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec $A + B$ inversible et $C = (A + B)^{-1}$. Montrer que $ACB = BCA$.

2.67 *Mines PSI 2007 d'après RMS* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r. Dimension de $F = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid ABA = 0\}$?

2.68 *Mines PSI 2007 d'après RMS* Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{rang}\,(AB - BA) = 1$. Montrer : $(AB - BA)^2 = 0$.

2.69 *Centrale PSI 2007 d'après RMS* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et $f \in GL(E)$. Montrer que $f + g$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Tr}\,(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

2.70 *TPE PSI 2007 d'après RMS* Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $X + \mathrm{Tr}\,(X)A = B$.

2.71 *ENSAM PSI 2007 d'après RMS* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AX + XA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que f est un endomorphisme. Calculer $\mathrm{Tr}\, f$.

2.72 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Établir $\mathrm{rang}\,(M) = \mathrm{rang}\,(A) + \mathrm{rang}\,(B)$.

2.73 Soit $A \in GL_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C = \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.
Déterminer le rang de M en fonction de celui de C.

2.74 Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$ (il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $AP = PB$).
Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

2.75 Soit deux entiers n et p supérieurs ou égaux à 1, une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, un entier $r \in [\![0; \mathrm{Min}(n,p)]\!]$ et la matrice $J_{n,p,r} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui ne contient que des 0 sauf $j_{1,1} = \cdots = j_{r,r} = 1$.
a. Montrer que A et $J_{n,p,r}$ sont équivalentes si et seulement si $r = \mathrm{rang}\,(A)$.
b. En déduire que A et ${}^tA$ sont de même rang.

2.76 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que A est inversible si et seulement si B l'est.
Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2.77 *Compléments OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 111I abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année*
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer les matrices X telles que ${}^tX + X = \mathrm{Tr}\,(X)\, A$.

2.10 Déterminants

2.78 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en établissant une relation de récurrence $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$. On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ avec $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

2.79 *Déterminants circulants* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et la matrice $P = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer P^2 et $P\overline{P}$.
Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ a_n & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer PA. En déduire $\det(PA)$ puis $\det(A)$.

2.80 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en établissant une relation de récurrence $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.81 *Mines PSI 2007 d'après RMS*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X) = \det(A) + \det(X)$. Montrer que $A = 0$.

2.82 *Mines PSI 2007 d'après RMS* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$ telle que $A + kB \in GL_n(\mathbb{Z})$ (elle est inversible et son inverse est aussi à coefficients entiers) pour $k \in [\![0; 2n]\!]$. Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.

2.83 *Déterminants circulants*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et la matrice $P = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer P^2 et $P\overline{P}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & a_{n-2} \\ a_n & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer PA. En déduire $\det(PA)$ puis $\det(A)$.

2.84 *Centrale PSI 2012*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ qui sont exactement de degré n.

a. Montrer : $\big(P$ et Q ont au moins une racine commune$\big) \iff \big(\exists (U, V) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]^2 \setminus \{(0,0)\},\ UP + VQ = 0\big)$.

b. Trouver une CNS portant sur $\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X]^2 \to \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ telle que $\forall (U, V) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]^2,\ \varphi(U, V) = UP + VQ$ pour que les deux assertions apparaissant dans l'équivalence de la question **a.** soient vraies.

c. Décrire la matrice A de φ dans les bases canoniques en fonction des coefficients des polynômes P et Q.

d. En déduire (sans chercher à calculer leurs racines) une condition nécessaire et suffisante portant sur $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^2 + X + a$ et $Q = X^2 + bX + 1$ aient au moins une racine commune.

2.85 *Centrale PSI 2012*

Soit $n \geqslant 2$, déterminer le rang de $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = (i + j + 2015)^p$ où $p \in [\![1; n-1]\!]$.

2.86 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en établissant une relation de récurrence $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$. On exprimera le résultat à l'aide des termes de la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ avec $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2.87 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (déterminant $n+1$ sur $n+1$).

2.88 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & \ddots & \ddots & \ddots & & n-1 \\ n-1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix}$.

2.11 Systèmes linéaires

2.89 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \cdots, a_{n-1}, b_1, \cdots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-2}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 1 & a_1 & b_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_2 & \ddots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On pose aussi $D = \det(A)$. Soit aussi n autres réels $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.
a. Calculer D. Déterminer aussi le rang r de A en fonction des $a_1, \cdots, a_{n-1}, b_1, \cdots, b_{n-1}$.
b. Déterminer à quelle condition le système (S) admet des solutions si $(S)\ :\ AX = C$ avec X la matrice colonne des inconnues (${}^tX = (x_1 \cdots x_n)$) et C la matrice colonne second membre (${}^tC = (c_1 \cdots c_n)$).
Résoudre (S) s'il est de Cramer.

2.90 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ distincts deux à deux. Résoudre $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$ (on pourra calculer les déterminants de Vandermonde ou introduire $P = X^3 - (x + yX + zX^2)$).

2.12 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

2.91 *Mines PSI 2013* Adrien Le Graët

Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f admet une droite ou un plan stable.

2.92 *Mines PSI 2013* Félix

Soit une famille $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose $P_i = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - a_j)$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice telle que $m_{i,j} = a_j^{i-1}$ si $i \leqslant n-1$ et $a_{n,j} = P_j$. Calculer $\det(M)$.

2.93 *Mines PSI 2013* Pierre-Simon

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Montrer que les sous-espaces stables par p sont de la forme $A + B$ où A est un sous-espace de $\mathrm{Ker}(p)$ et B un sous-espace de $\mathrm{Im}\,(p)$.
Montrer que cette somme est directe.

2.94 *Mines PSI 2013* Jordan Diby

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 = 0$.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.95 *CCP PSI 2013* Anaïs Espéron

Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$ est libre avec $f_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $g_k : t \mapsto \sin(kt)$.

2.96 *Mines PSI 2014* Tanguy Cazalets

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

a. Montrer que A est inversible.

b. On suppose de plus que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} > 0$, montrer que $\det(A) > 0$.

2.97 *Mines PSI 2014* Aymeline Martin

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A+X) = \det(A) + \det(X)$.

Montrer que $\det(A) = 0$, puis que $A = 0$.

2.98 *E3A PSI 2014* Soufiane Eddamani

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $u^2 = 0 \iff \big($il existe deux projecteurs p et q de même image tels que $u = p - q\big)$.

2.99 *Centrale Maths1 PSI 2015* Mathieu Dubes et Gaël Perez

Soit E un espace complexe de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

On note $I_k = \mathrm{Im}\,(f^k)$ et $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$.

a. Montrer que tous les N_k et les I_k sont stables par f puis montrer les inclusions strictes : $N_0 \subset \cdots \subset N_n$.

b. Déterminer la dimension de N_k et de I_k.

c. Déterminer l'ensemble des sous-espaces stables par f.

d. Pour quels couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ a-t-on $N_i = N_j$?

2.100 *Centrale Maths1 PSI 2015* Arthur Lacombe

a. Montrer que $(M,N) \mapsto \mathrm{Tr}\ ({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit φ une forme linéaire, montrer que : $\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}\ (AM)$.

c. En déduire si de plus $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(MN) = \varphi(NM)$, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \mathrm{Tr}$.

d. On considère $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ telle que $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ \Psi(u \circ v) = \Psi(u) \circ \Psi(v)$ et $\Psi(\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$.

Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Tr}\ (\Psi(u)) = \mathrm{Tr}\ (u)$.

2.101 *Mines PSI 2015* Agatha Courtenay

Soit E un espace de dimension finie et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Résoudre l'équation $u \circ f = v$ d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

2.102 *Mines PSI 2015* Benjamin Dieu

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ et $A^2 = 0$.

Déterminer la dimension du commutant de A noté $C(A)$ et défini par $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

2.103 *Mines PSI 2015* Gaël Perez

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 0$ sauf si $|i-j| = 1$ et alors $a_{i,j} = 1$.

On pose $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$.

a. Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

b. Pour $x \in]-2;2[$, on pose $x = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0;\pi[$. Montrer que $P_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

c. En déduire les racines de P_n et le factoriser.

2.104 *E3A PSI 2015* Vincent Barrère

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie vérifiant $f^2 = \frac{1}{2}\Big(f + \mathrm{id}_E\Big)$.

a. Montrer qu'il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E$.

b. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles uniques ? Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

c. Posons $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Montrer que $af + b\mathrm{id}_E$ est un projecteur.

2.105 *E3A PSI 2015* Bastien Chevallier

Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.

a. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.

b. Est-ce qu'on a $E = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$?

c. Est-ce que ce résultat est toujours vrai en dimension infinie ?

d. Montrer que $\mathrm{rang}\,(f - \mathrm{id}_E)$ est pair.

Indication : montrer que f induit un endomorphisme u dans $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.

2.106 *X-Cachan PSI 2016* Clément Suberchicot II

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathrm{rang}\,(AB) = \mathrm{rang}\,(B) \iff \big(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}\,(B) = \{0\}\big)$.

2.107 *Centrale Maths1 PSI 2016* Owain Biddulph

Soit E un espace de dimension n, f un endomorphisme E.

a. Si $n = 3$, $f^2 = 0$ et $f \neq 0$, montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que : $f^2 = 0 \iff (\exists (g,h) \in \mathcal{L}(E)^2,\ f = h \circ g$ et $g \circ h = 0)$.

2.108 *Centrale Maths1 PSI 2016* Thomas Corbères

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

b. Montrer qu'il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(N^T M)$.

c. Montrer que si A et B sont semblables, alors $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$.

d. Supposons que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ \varphi(PAP^{-1}) = \varphi(A)$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi = \lambda \mathrm{Tr}$.

Indication : on admet que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{R})$, alors $M = \lambda I_n$.

f. Montrer le résultat qu'on vient d'admettre.

2.109 *Mines PSI 2016* Antoine Badet I

Soit $a = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $A = (A_0, \ldots, A_n) \in \mathbb{K}_n[X]^{n+1}$ avec $\forall k \in [\![0; n]\!],\ A_k = (X - a_k)^n$.

a. Montrer que : A est une base de $\mathbb{K}_n[X] \iff (a_0, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts.

b. Donner le rang de A dans le cas général.

2.110 *Mines PSI 2016* Owain Biddulph II

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et $f_k : x \mapsto \sin(x + a_k)$. Rang de (f_1, f_2, f_3) ?

2.111 *Mines PSI 2016* Samuel Cailleaux I

Soit $(a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ et la matrice $M = \big((a_i + b_j)^n\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. Calculer $\det(M)$.

2.112 *Mines PSI 2016* Léo Fusil I

Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_0,\cdots,a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$ distincts 2 à 2 et $E_{n,m} = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid \forall k \in [\![0;m]\!],\ P(a_k)=0\}$. Montrer que $E_{n,m}$ est un espace de dimension finie et trouver sa dimension.

2.113 *Mines PSI 2016* Émilien Ouzeri I

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et σ un endomorphisme de E vérifiant $\sigma^2 = -\mathrm{id}_E$.

a. Montrer que n est pair. On note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

2.114 *Mines PSI 2016* Romain Morgavi II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\cdots,a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Calculer le déterminant suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_2+a_3 & \cdots & a_n+a_1 \\ a_1^2+a_2^2 & a_2^2+a_3^2 & \cdots & a_n^2+a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n+a_2^n & a_2^n+a_3^n & \cdots & a_n^n+a_1^n \end{vmatrix}$.

2.115 *Mines PSI 2016* Sam Pérochon I

Soit E, E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et F, F' deux sous-espaces de E et E' respectivement.

On pose $A = \{u \in \mathcal{L}(E,E') \mid F \subset \mathrm{Ker}(u) \text{ et } \mathrm{Im}\,(u) \subset F'\}$.

a. Montrer que A est un espace vectoriel.

b. Montrer que A est de dimension finie si E et E' le sont. Quelle est alors la dimension de A ?

2.116 *Mines PSI 2016* Mathieu Perrin I

Soit $n \geqslant 1$, $E = \mathbb{C}_n[X]$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ et $u : E \to \mathbb{C}^{n+1}$ défini par $u(P) = (P(1), P(\omega), \cdots, P(\omega^n))$.

a. Montrer que u définit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b. Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques.

c. Déterminer $\sum\limits_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km}$. En déduire u^{-1}.

2.117 *Mines PSI 2016* Clément Suberchicot I

Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Montrer que $\binom{2n}{n} \geqslant \dfrac{2^{2n}}{n+1}$.

Que dire s'il y a égalité ?

2.118 *CCP PSI 2016 et CCP PSI 2017* Sylvin Bielle II et Élisa Gressier-Monard I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit u un endomorphisme de E et $m \geqslant 0$.

On notera $K_m = \mathrm{Ker}(u^m)$ et $I_m = \mathrm{Im}\,(u^m)$.

a. On suppose uniquement dans cette question u injectif. Déterminer K_m et I_m.

b. On revient au cas général. Montrer que : $\forall m \geqslant 0,\ K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.

c. Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant p \leqslant n$ tel que $K_p = K_{p+1}$ et $I_{p+1} = I_p$. Montrer ensuite que : $\forall q \in \mathbb{N},\ K_p = K_{p+q}$ et $I_{p+q} = I_p$ et enfin $K_p \oplus I_p = E$.

2.119 *École Navale PSI 2016* Hugo Tarlé II

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i < j-1$ et $a_{i,j} = i+j$ sinon. Calculer $\det(A)$.

2.120 *ENS Cachan PSI 2017* Adrien Cassagne

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ P_n(\tan^2 t) = \dfrac{\cos((2n+1)t)}{\cos^{2n+1} t}$.

b. Trouver les racines de P_n et leur somme.

c. Justifier que : $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^2 t < \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2} < 1 + \tan^2 t$.

d. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

2.121 *ENS Cachan PSI 2017* Tom Huix II

a. Soit un entier $n \geqslant 1$ et $a_0, \cdots, a_{n-1}$ des réels positifs.
Montrer que le polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$ admet au plus une racine sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $a_0, \cdots, a_{n-1}$ des complexes et $a_0 \neq 0$. Soit ρ l'unique racine de $P = X^n - |a_{n-1}|X^{n-1} - \cdots - |a_0|$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si α est une racine complexe de $Q = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$, alors $|\alpha| \leqslant \rho$.

2.122 *Centrale Maths1 PSI 2017* Clément Maurel

a. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.

b. Donner une base de E dans laquelle la matrice de Ψ défini par $\Psi(P) = P'$ ne contient que des 0 et des 1.

c. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

d. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$ (on pourra s'intéresser à $x \mapsto P(x)e^{-x}$).

e. Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors Q l'est également.

2.123 *Mines PSI 2017* Aloïs Blarre I

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = A + B$. Montrer que $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(B)$.

2.124 *Mines PSI 2017* Vincent Bouget I

Soit $n \geqslant 2$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \geqslant 0$.

2.125 *Mines PSI 2017* Romain Delon I

E désigne un espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = (\mathcal{L}(E))^*$ (ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{L}(E)$) définie par $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall v \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u)(v) = \text{Tr}\,(u \circ v)$.
Montrer que φ est un isomorphisme.

2.126 *Mines PSI 2017* Corentin Gatellier I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_1, \cdots, x_n$ distincts deux à deux et $y_1 < \cdots < y_n$.
Montrer que $A = (e^{x_i y_j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

2.127 *Mines PSI 2017* Tom Huix I

a. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n de degré n et unitaire tel que $P_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$.

b. Développer la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{1}{P_n}$ en éléments simples.

2.128 *Mines PSI 2017* Vincent Meslier I

Calculer $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}(-3)^k$ pour $n \geqslant 2$.

2.129 *Mines PSI 2017* Sam Pérochon II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Montrer que n pair $\iff \exists (u,v) \in GL(E)^2,\ u \circ v = -v \circ u$.

2.130 *Mines PSI 2017* Maxime Pouvereau I

Soit $n \geqslant 1$ et $a = (a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. On définit la matrice $A = (|a_i - a_j|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Évaluer $\det(A)$. Indication : on pourra commencer par le cas où $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.

2.131 *Mines PSI 2017* Claire Raulin II

Soit deux entiers p et q dans $\mathbb{N}^*$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\det(I_q - AB) = \det(I_p - BA)$.

2.132 *Mines PSI 2017* Claire Raulin III

Résoudre l'équation $(E)\ :\ 1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ à inconnue complexe z si $n \geqslant 1$.

2.133 *Mines PSI 2017* Alexis Trubert I

Soit $n \geqslant 1$, trouver les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.

2.134 *Petites Mines PSI 2017* Agathe Maldonado II

Soit M une matrice non nulle de taille 3 à valeurs réelles, telle que $M^2 = 0$.
a. Calculer les dimensions de $\mathrm{Im}\,(M)$ et $\mathrm{Ker}(M)$.
b. Montrer que M est semblable à la matrice $E_{1,3}$.

2.135 *Petites Mines PSI 2017* Cléa Maricourt II

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$.
a. Montrer que : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f \circ g) \iff E = \mathrm{Im}\,(g) + \mathrm{Ker}(f)$.
b. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f) \iff \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_F\}$.

2.136 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Pauline Lamaignère

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de l'entier n. On décompose $n \in \mathbb{N}^*$ de la manière suivante : $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ avec $p_1, \cdots, p_k$ les diviseurs premiers distincts de n.

a. Montrer que $d(n) = \prod_{i=1}^{k} (1 + \alpha_i)$.

b. Soit $\varepsilon \in]0;1]$. Montrer que si $p_i \geqslant 2^{1/\varepsilon}$, alors $\dfrac{1+\alpha_i}{p_i^{\varepsilon \alpha_i}} \leqslant 1$.

c. Déterminer le maximum de $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+x}{2^{\varepsilon x}}$.

d. En déduire que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists C_\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(n) \leqslant C_\varepsilon n^\varepsilon$.

e. Conclure.

2.137 *Centrale Maths1 PSI 2018* Martin Monsel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit P une partie de $GL_n(\mathbb{C})$ de cardinal m et stable par produit.

a. Soit $A \in P$, montrer que $\sum\limits_{B \in P} AB = \sum\limits_{B \in P} B$.

b. Montrer que $\sum\limits_{B \in P} \mathrm{Tr}\ (B)$ est un multiple de m.

c. Montrer que si $\sum\limits_{B \in P} \mathrm{Tr}\ (B) = 0$ alors $\sum\limits_{B \in P} B = 0$.

2.138 *Mines PSI 2018* Victor Bourdeaud'hui I

Soit des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ deux à deux distincts et $t_1, \cdots, t_n$ deux à deux distincts et strictement positifs.

a. Soit des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ non tous nuls et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^{\beta_k}$ avec $\beta_1, \cdots, \beta_p$ deux à deux distincts. Montrer que f s'annule au plus $p-1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que la matrice $A = (t_i^{\alpha_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

2.139 *Mines PSI 2018* Maëlle Casas II

Soit $C_n(\mathbb{R}) = \left\{A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}\right\}$.

a. Montrer que $C_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par produit matriciel.

b. Soit une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap C_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\theta : C_n(\mathbb{R}) \to C_n(\mathbb{R})$ défini par $\theta(M) = AM$ est un endomorphisme de $C_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $A^{-1} \in C_n(\mathbb{R})$.

2.140 *Mines PSI 2018* Erwan Dessailly I

Soit $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille de vecteurs de E.

a. Si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre, montrer que pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une famille $(h_1, \cdots, h_n) \in E^n$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$.

b. Supposons que $\forall M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists (h_1, \cdots, h_n) \in E^n,\ \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$, peut-on conclure à la liberté de la famille $(f_1, \cdots, f_n)$?

2.141 *Mines PSI 2018* Florian Gaboriaud II

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \left((i+j-2x)^2\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer rang$(A)$.

2.142 *Mines PSI 2018* Thomas Gerbeaud II

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p ($u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$). Soit un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. On pose $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$.

a. Quelle est la dimension de F ?

b. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(u^{p-1}(x)) \neq 0$.

c. Soit $G = \bigcap\limits_{k=0}^{p-1} \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

d. Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} N_p & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $N_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

et $A \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$.

e. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs du type N_r.

2.143 *Mines PSI 2018* Eneko Jauretche I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A \geqslant 0$, dit A positive, si tous les coefficients de A sont positifs.
On dit que A est monotone si A est inversible et $A^{-1} \geqslant 0$.
a. Montrer que A est monotone $\Longleftrightarrow \big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX \geqslant 0 \Longrightarrow X \geqslant 0\big)$.
b. Montrer que si $(a_1, \cdots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, alors $A = \begin{pmatrix} 2+a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+a_n \end{pmatrix}$ est monotone.

2.144 *Mines PSI 2018* Antoine Secher I

Soit E un espace vectoriel de dimension $3n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang $2n$ tel que $f^3 = 0$.
a. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f)$ est stable par f. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$.
b. Montrer que $\mathrm{rang}\,(f^2) = n$.
c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

2.145 *CCP PSI 2018* Maëlle Casas et Martin Monsel II

Soit E un espace vectoriel, p un projecteur de E et f un endomorphisme de E.
a. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
(i) $p \circ f = f \circ p$.
(ii)) $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont stables par f.
b. Si E est de dimension finie, en déduire la dimension du commutant $C(p) = \{f \in \mathcal{L}(E) |\ f \circ p = p \circ f\}$ de p.

2.146 *CCP PSI 2018* Quentin Meynieu I

Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P(X+1) - P(X)$.
a. Montrer que f est linéaire.
b. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$.
c. Pour $n \geqslant 1$, montrer que f induit une application linéaire f_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
d. Calculer $\mathrm{Ker}(f_n)$ et justifier que f_n est surjective.
f. En déduire que f est surjective.
g. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = Q$ et $P(0) = 0$. Simplifier $\sum\limits_{k=0}^{n} Q(k)$.
h. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.
i. Comment généraliser ?

2.147 *E3A PSI 2018* Jean Boudou

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $d : E \to E$ définie par $d(f) = f'$.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \mathrm{Vect}(f_0, \cdots, f_n)$.
a. Montrer que d est un endomorphisme de E et que E_n est stable par d.
On note d_n l'endomorphisme induit par d dans E_n.
b. Montrer que $\mathcal{B}_n = (f_0, \cdots, f_n)$ est une base de E_n.
c. Calculer $d(f_0)$ puis $d(f_k)$ si $k \in [\![1;n]\!]$. En déduire $A_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(d_n)$.
d. On pose $g_k = \dfrac{1}{k!} f_k$. Montrer que $(-g_0, g_0 - g_1, g_1 - g_2, \cdots, g_{n-1} - g_n)$ est une base de E_n. Montrer que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ d(g_k) = g_{k-1} - g_k$.
e. En déduire que $d_n \in GL(E_n)$. Pour tout entier $j \in [\![1;n]\!]$, déterminer $d_n^{-1}(f_j)$. En déduire A_n^{-1}.

2.148 *E3A PSI 2018* Quentin Meynieu

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$ et $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ défini par $g(P) = P(1)$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer sa matrice A dans la base canonique.

b. La fonction f est-elle injective ? surjective ?

c. Montrer que g est linéaire. Trouver une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(g)$.

d. La fonction g est-elle injective ? surjective ?

e. Calculer A^n pour tout entier n. Exprimer $f^n(aX^2 + bX + c)$ en fonction de a, b, c et n.

2.149 *ENS Cachan PSI 2019 (OdlT 2019/2020 X-ENS PSI planche 37)* Léo Simplet

Soit ABC un triangle du plan. On note a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.

On note, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et plus particulièrement $j = \omega_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour un entier $n \geqslant 3$, on note $V_n = (\omega_n^{i(j-1)})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{n-2,n}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

b. Déterminer, pour $n \geqslant 3$, le rang de la matrice V_n.

c. Montrer que $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = 0$.

d. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(V_n)$.

e. On se donne $n \geqslant 3$ points $A_1, \ldots, A_n$ du plan d'affixes respectives $a_1, \ldots, a_n$, montrer que $A_1 \cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés si et seulement si $\forall k \in [\![1; n-2]\!]$, $a_1 + a_2\omega_n^k + \cdots + a_n\omega_n^{k(n-1)} = 0$.

2.150 *Centrale Maths1 PSI 2019* Mathis Girard

On assimile le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha z + \beta \overline{z}$.

b. Les constantes α et β sont-elles uniques dans la question précédente ?

c. Déterminer dans ce cas une condition nécessaire et suffisante sur α, β pour que soit un automorphisme.

d. Soit $\theta \in]0; \pi[$, déterminer l'expression complexe de la réflexion r_θ par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

2.151 *Centrale Maths1 PSI 2019* Benoît Le Morvan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

a. Montrer que $\left|\mathrm{rang}\,(u) - \mathrm{rang}\,(v)\right| \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v) \leqslant \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v)$.

b. Soit F, G, H trois sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G = F \oplus H$. On note p la projection sur F parallèlement à H et q la projection sur G parallèlement à F. Montrer que $\mathrm{rang}\,(p+q) = \mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q)$.

c. Montrer que $\mathrm{rang}\,(u+v) = \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v) \iff \big(\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E\big)$.

2.152 *Mines PSI 2019* Louis Destarac II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \mathrm{Ker}(f^n)$ et $I_n = \mathrm{Im}(f^n)$. On pose aussi $K = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ et $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$.

a. Montrer que I et K sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Montrer l'existence d'un entier $N \leqslant \dim(E)$ tel que $\forall k \geqslant 0,\ K_{k+N} = K_N$. Que vaut K ?

c. Montrer que $E = I \oplus K$, que K et I sont stables par f.

d. Montrer que f_I est un automorphisme de I et que f_K est nilpotent.

2.153 *Mines PSI 2019* Victor Margueritte I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = \frac{1}{2}\Big(f + \mathrm{id}_E\Big)$.

a. Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E$.

b. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles uniques ?

On suppose dans la suite de cet exercice que f n'est pas une homothétie.

c. Montrer que ces deux suites convergent et calculer leurs limites $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

d. On pose $p = \alpha f + \beta \mathrm{id}_E$. Montrer que p est un projecteur. Le caractériser.

2.154 *Mines PSI 2019* Léo Simplet I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer que si $\forall x \in E,\ (x, f(x))$ est liée, alors f est une homothétie.

b. Si f est non nul et que $\mathrm{Tr}\,(f) = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre.

c. Si f est non nul et que $\mathrm{Tr}\,(f) = 0$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ (matrice carrée).

d. Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice à diagonale nulle.

2.155 *CCP PSI 2019* Maël Classeau I

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

b. Donner un vecteur de $\mathrm{Ker}(f^2)$ qui n'est pas dans $\mathrm{Ker}(f)$.

c. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.156 *CCP PSI 2019* Kévin Dufrechou I

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0$.

a. Donner le théorème concernant le calcul du déterminant de Vandermonde.

b. Montrer que $\forall p \in [\![0;n]\!],\ \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^p = 0$.

c. En déduire que $\forall p \in [\![0;n]\!],\ \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$.

d. Conclure quant à la famille $\big((X+k)^n\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

2.157 *Petites Mines PSI 2019* Augustin Aumont II

Soit E l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Trouver un supplémentaire "naturel" de F qu'on notera G.

c. Donner l'expression analytique de la projection sur G parallèlement à F.

2.158 *Petites Mines PSI 2019* Réjane Bastien-Amaré II

On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = & \dfrac{x_n}{4} + \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{z_n}{2} \\ y_{n+1} = & \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{y_n}{4} + \dfrac{z_n}{2} \\ z_{n+1} = & \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{y_n}{2} + \dfrac{z_n}{4} \end{cases}$.

Montrer que ces trois suites convergent et donner leurs limites en fonction de x_0, y_0 et z_0.

2.159 *Petites Mines PSI 2019* Elaia Mugica I

Soit $a \in \mathbb{R}$, on note S_d l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$.

a. Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à S_d, le polynôme P ci-dessus est unique.

Si $u \in S_d$, on notera P_u l'unique polynôme P vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$.

De plus, on définit $\varphi : S_d \to \mathbb{R}_d[X]$ par $\varphi(u) = P_u$.

b. Montrer que φ est linéaire.

c. Donner une base de son noyau. Quelle est son image ?

d. Déterminer la dimension de S_d.

2.160 *X PSI 2021* Julien Gombert I

Soit $(d, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $E_{d,n} = \{I = (i_1, \cdots, i_d) \in \mathbb{N}^d \mid i_1 + \cdots + i_d = n\}$.

Pour $I = (i_1, \cdots, i_d) \in E_{d,n}$, on définit la fonction $f_I : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ par $f_I(x_1, \cdots, x_d) = \prod\limits_{k=1}^{d} x_k^{i_k}$.

Montrer que $(f_I)_{I\in E_{d,n}}$ est une famille libre.

2.161 *X PSI 2021* Antoine Greil II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère S_A l'ensemble des matrices semblables à A.

Déterminer l'ensemble des matrices A telles que S_A soit fini.

2.162 *X PSI 2021* Clément Lopez III

Soit $n \geqslant 1$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on suppose semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.163 *Centrale Maths1 PSI 2021* Antoine Greil I

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

a. Montrer que si $\omega \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors ω^2 l'est aussi.

b. Montrer que toutes les racines $\omega \in \mathbb{C}$ de P vérifient $|\omega| = 1$ ou $\omega = 0$.

c. Montrer que 0 n'est pas racine de P.

d. Déterminer P en le factorisant.

2.164 *Mines PSI 2021* Maxime Brachet II

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E tel qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $u^m = \mathrm{id}_E$. On pose $p = \dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k$.

a. Montrer que si $v \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, $\mathrm{rang}(v) = \mathrm{Tr}(v)$. La réciproque est-elle vraie ?

b. Montrer que $p^2 = p$.

c. Prouver que $\dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{Tr}(u^k) = \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E))$.

d. Caractériser la projection p.

2.165 *Mines PSI 2021* Robin Gondeau II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
a. Montrer que $A = \{q \in \mathbb{N} \mid (u, u^2, \cdots, u^q) \text{ est liée }\}$ est non vide et qu'elle admet un élément minimal.
b. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff u \in \underset{k\geqslant 2}{\mathrm{Vect}}(u^k)$.

2.166 *Mines PSI 2021* Quentin Granier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $A_n = \left(\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note d_k le nombre de permutations de $[\![1;k]\!]$ (bijections de $[\![1;k]\!]$ dans $[\![1;k]\!]$) qui n'ont aucun point fixe. Par convention, on pose $d_0 = 1$.
a. Calculer A_n^{-1}. Indication : considérer un endomorphisme bien choisi de $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Montrer que $\forall p \in [\![0;n]\!],\ p! = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} d_k$.
c. Trouver une relation entre A_n^T et les matrices colonnes $\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$.
d. En déduire une expression de d_n sous forme de somme.
e. Si on note p_n la probabilité, en choisissant une permutation de $[\![1;n]\!]$ au hasard, d'obtenir une permutation sans point fixe, quelle est la valeur de $\lim_{n\to+\infty} p_n$?

2.167 *Mines PSI 2021* Antoine Greil II

Déterminer les couples $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $X^n - 1$ et $(X+1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune.

2.168 *Mines PSI 2021* Adrien Guyot II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(f,g) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)^2$ tel que $f \circ g = 0$ et $f + g \in GL(\mathbb{C}^n)$. Montrer que $\mathrm{rang}(f) + \mathrm{rang}(g) = n$.

2.169 *Mines PSI 2021* Johan Haramboure I

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
a. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$, montrer que $\mathrm{rang}(AB) < \mathrm{rang}(A)$.
b. Soit $A_1, \cdots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent 2 à 2, montrer que $A_1 \cdots A_n = 0$.
c. La propriété de **b.** est-elle encore vraie si on ne suppose plus que les matrices commutent deux à deux ?

2.170 *Mines PSI 2021* Yuan Le Guennic I

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne des fonctions $f_1, \cdots, f_n$ de E.
Pour une famille $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la matrice $A_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Montrer que si $\det(A_x) \neq 0$, alors la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E.
b. Réciproquement, montrer par récurrence que si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E, alors il existe une famille de réels $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

2.171 *CCINP PSI 2021* Thomas Boudaud II

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^3 + f = 0$ et $f \neq 0$.
a. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.
b. Soit un vecteur non nul $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, montrer que $(x, f(x))$ est libre.
c. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
d. Montrer que $\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

2.172 *X PSI 2022* Olivier Courmont I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})^2$ tel que $A^2 = B^2 = 0$ et $\mathrm{rang}\,(A) \geqslant n$ et $\mathrm{rang}\,(B) \geqslant n$.
Montrer que A et B sont semblables.

2.173 *ENS Cachan PSI 2022* Olivier Courmont

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n = \{\omega_0, \cdots, \omega_{n-1}\}$ avec $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$. On pose $\omega_n = \omega_0$.
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{C}$.
Pour $(\Phi, \Psi) \in E^2$, on pose $< \Phi, \Psi > = \sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \Phi(\omega)\overline{\Psi(\omega)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k)\overline{\Psi(\omega_k)}$ et $||\Phi|| = \sqrt{< \Phi, \Phi >}$.
Pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, on définit $\chi_k : \mathbb{U}_n \to \mathbb{C}$ par $\chi_k(z) = \dfrac{z^k}{\sqrt{n}}$.
Si $\Phi \in E$, on définit $\hat{\Phi} : \mathbb{U}_n \to \mathbb{C}$ par $\hat{\Phi}(\omega_k) = < \Phi, \chi_k >$ pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$.
a. Comparer $\chi_m(\omega_k)$ et $\chi_k(\omega_m)$ pour $(k, m) \in [\![0; n-1]\!]^2$.
b. Calculer $< \chi_m, \chi_k >$ pour $(k, m) \in [\![0; n-1]\!]^2$.
c. Calculer $\hat{\chi_k}$ et $\hat{\hat{\chi_k}}$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$.
d. Montrer que $\forall \Phi \in E,\ \Phi = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\hat{\chi_\ell}$.
e. Montrer que $\forall (\Phi, \Psi) \in E^2,\ < \hat{\Phi}, \hat{\Psi} > = < \Phi, \Psi >$.
f. En déduire que E est de dimension n, que l'application $L : E \to E$ définie par la relation $L(\Phi) = \hat{\Phi}$ est un automorphisme de E et que l'on a $\forall \Phi \in E,\ ||\hat{\Phi}|| = ||\Phi||$.

2.174 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Baesen et Lucas Lacampagne

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (X - k)$.
a. Montrer qu'il existe un unique $r_n \in]0; 1[$ tel que $P_n'(r_n) = 0$.
b. Trouver une expression sous forme de somme de $\dfrac{P_n'(x)}{P_n(x)}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus [\![0; n]\!]$.
c. Déterminer la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
d. Trouver un équivalent de r_n.
e. Comment établir que $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$?

2.175 *Centrale Maths1 PSI 2022* Naïs Baubry

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P'$.

a. Trouver une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u ne contient que des 0 et des 1.

b. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

c. Montrer que si Q ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, alors l'unique polynôme P de la question précédente a la même propriété.

d. Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ alors Q l'est également.

2.176 *Mines PSI 2022* Louis Bardinet II

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne des fonctions $f_1, \cdots, f_n$ de E.
Pour une famille $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la matrice $A_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si $\det(A_x) \neq 0$, alors la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E.

b. Réciproquement, montrer par récurrence que si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E, alors il existe une famille de réels $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\det(A_x) \neq 0$.

2.177 *Mines PSI 2022* Anna Decrock II

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \mathrm{Ker}(f^n)$ et $I_n = \mathrm{Im}\,(f^n)$. On pose aussi $K = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ et $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$.

a. Montrer que I et K sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Montrer l'existence d'un entier $N \leqslant \dim(E)$ tel que $\forall k \geqslant 0,\ K_{k+N} = K_N$. Que vaut K ?

c. Montrer que $E = I \oplus K$, que K et I sont stables par f.

d. Montrer que f_I est un automorphisme de I et que f_K est nilpotent.

2.178 *Mines PSI 2022* Colin Herviou-Laborde II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1} = 0$, alors pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille (AX, X) est liée. En déduire ce que vaut A.

b. Que dire de A si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A est telle que $b_{1,1} = 0$?

2.179 *Mines PSI 2022* Thibault Le Gal I

Soit E espace de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

a. Montrer que si E est de dimension finie, $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

b. Qu'en est-il en dimension quelconque ?

2.180 *Mines PSI 2022* Baptiste Savarit II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AMA$.

Calculer $\det(\varphi)$. Indication : on pourra s'intéresser à $f : M \mapsto MA$ et $g : M \mapsto AM$.

2.181 *Mines PSI 2022* Matis Viozelange II

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n ($u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$).

a. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

b. Déterminer $\mathrm{Ker}(u^k)$ pour tout entier $k \in [\![0; n]\!]$.

c. Montrer que les seuls sous-espaces de E stables par u sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$ avec $k \in [\![0; n]\!]$.

2.182 *X PSI 2023* Raphaël Déniel I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, factoriser le polynôme $P = (X+a)^n - (X-a)^n$.

2.183 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin III

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{id}_E$.

a. Donner un exemple de tel endomorphisme u si $\dim(E) = 2$.

b. Montrer que u n'a aucune valeur propre réelle. Montrer que $\dim(E) = 2p$ est pair.

c. Montrer l'existence de $(e_1, \cdots, e_p) \in E^p$ telle que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_p, u(e_p))$ est une base de E.

2.184 *Mines PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$.

a. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Déterminer la dimension de $C(A)$ si $A = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

b. Soit $A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ avec $a_1, \cdots, a_n$ distincts. Déterminer la dimension de $C(A)$.

2.185 *Mines PSI 2023* Maddie Bisch II

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $P_n = (X-1)^n - X^n + 1$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles P_n admet une racine double.

2.186 *Mines PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Soit $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $D(P) = P'$.

a. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

b. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont stables par D.

c. Déterminer la dimension de l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $D \circ f = f \circ D$.

2.187 *Mines PSI 2023* Jonathan Filocco I

a. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, A un sous-espace vectoriel de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\displaystyle\bigcap_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$. Montrer que $A = E^*$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe une famille $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que la matrice $\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

2.188 *CCINP PSI 2023* Juan Dupierris II et Gabriel Hofman II

Soit E un espace de dimension finie et $(p,q) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rang}(p) + \mathrm{rang}(q) \leqslant \dim(E)$.

a. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

b. Montrer que p et q sont des projecteurs.

2.189 *Mines-Télécom PSI 2023* Olivier Farje I

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.

b. L'application f est-elle bijective ?

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

c. Montrer que M est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Montrer que les matrices qui commutent avec M sont des polynômes en M.

2.13 Officiel de la Taupe

2.190 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 110I*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p avec $n > p$.
On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$.
a. Si $u \circ v = \mathrm{id}_F$, montrer que $v \circ u$ est un projecteur. Déterminer son rang, son image et son noyau.
b. Réciproquement, si $v \circ u$ est un projecteur de rang p, montrer que $u \circ v = \mathrm{id}_F$.

2.191 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 124I* On se donne 3 matrices réelles A, B, C d'ordre n. Justifier rapidement que l'existence d'un sous-espace F de $\mathrm{Ker}(ABC)$ tel que $\mathrm{Ker}(ABC) = \mathrm{Ker}(BC) \oplus F$.
Montrer que $\mathrm{rang}\,(AB) + \mathrm{rang}\,(BC) \leqslant \mathrm{rang}\,(ABC) + \mathrm{rang}\,(B)$ (on pourra étudier l'application de F dans $\mathrm{Ker}(AB)$ qui à X associe CX).

2.192 *OdlT 2012/2013 Mines PSI planche 172I*

Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal tel que le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$ soit $X - \dfrac{1}{2}$ et tel que le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X + 1$ soit $2 - X$.

2.193 *OdlT 2013/2014 Centrale PSI planche 117I*

Montrer que si p est un projecteur d'un espace E de dimension finie alors $\mathrm{rang}\,(p) = \mathrm{Tr}\,(p)$.
Soit $P = \sum\limits_{i=1}^{r} p_i$ où les p_i sont des projecteurs de E.
Montrer que P est un projecteur de E si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = 0$.

2.194 *OdlT 2013/2014 Centrale PSI planche 120I*

Soit E un espace de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que :
a. $\mathrm{rang}\,(g \circ f) = \mathrm{rang}\,(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_E\}$.
a. $\mathrm{rang}\,(g \circ f) = \mathrm{rang}\,(g) \Longleftrightarrow E = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}(g)$.

2.195 *OdlT 2013/2014 Centrale PSI planche 134I*

Justifier que les racines a, b et c de $P = X^3 - 5X^2 + 6X - 1$ sont réelles et distinctes 2 à 2. Déterminer les coefficients du polynôme unitaire Q de degré 3 dont les racines sont $\alpha = (a-2)^2$, $\beta = (b-2)^2$ et $\gamma = (c-2)^2$.

2.196 *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 190III*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer : $\exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ P = A^2 + B^2$.

2.197 *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 193I*

On pose $\phi(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.
Montrer que ϕ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

2.198 *OdlT 2014/2015 X-Cachan PSI planche 55*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \cdots, A_k$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = \sum\limits_{i=1}^{k} A_i$. Soit :

C_1 : $\forall i \in [\![1;k]\!],\ A_i^2 = A_i$ et $\forall (i,j) \in [\![1;k]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow A_i A_j = 0$.

C_2 : $A^2 = A$ et $\mathrm{rang}\,(A) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{rang}\,(A_i)$.

C_3 : $\mathrm{rang}\,(A) = n - \mathrm{rang}\,(I_n - A)$.

a. Montrer que $C_2 \Longrightarrow C_3$ et $C_1 \Longrightarrow C_2$.

b. On note $D = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_k \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_k \end{pmatrix}$ puis les trois nouvelles matrices par blocs : $R = \begin{pmatrix} -I_n & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & I_n - A \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -I_n & 0 & I_n \\ 0 & D & Q \\ I_n & P & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \\ 0 & D - QP & 0 \\ I_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que R, S et T ont le même rang, et en déduire que $\text{rang}\,(D - QP) = \text{rang}\,(I_n - A) - n + \sum\limits_{i=1}^{k} \text{rang}\,(A_i)$.

c. Montrer que $\text{rang}\,(A^2 - A) = \text{rang}\,(A) - n + \text{rang}\,(I_n - A)$.

d. Montrer que C_1, C_2 et C_3 sont équivalentes.

2.199 *OdlT 2014/2015 X-Cachan PSI planche 58*

a. Montrer que le triangle ABC d'affixes a, b et c telles que $a + b + c = 0$ est équilatéral si et seulement si $b = ja$ et $c = j^2a$ ou si $c = ja$ et $b = j^2a$.

b. Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets n'ont que des coordonnées rationnelles.

c. On suppose que a, b et c sont des complexes distincts quelconques. Montrer que le triangle ABC associé est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ (on pourra se ramener au cas précédent).

d. Montrer que cette condition équivaut à j ou j^2 est racine de $aX^2 + bX + c$.

2.200 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 154II*

Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors P est positif (i.e. $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$) si et seulement s'il existe deux polynômes A et B à coefficients réels tels que $P = A^2 + B^2$.

2.201 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 155II*

À quelle condition la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont de la forme $\bar{z}^{j-i}$ si $j > i$ et z^{i-j} si $i \geqslant j$ sinon, est-elle inversible ? Calculer M^{-1} sous cette condition.

2.202 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 158I*

Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que le reste de sa div. eucl. par $X^2 + X + 1$ soit $X + \dfrac{1}{2}$ et par $X^2 - X + 1$ soit $-X + 2$.

2.203 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 159I*

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $v \circ u \in GL(E)$. Montrer que $F = \text{Im}\,(u) \oplus \text{Ker}(v)$.

2.204 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 165I*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace de dimension $n \geqslant 1$.
Montrer que l'on a l'équivalence : $u \in \text{Vect}\Big(u^k \mid k \geqslant 2\Big)$ si et seulement si $\text{Ker}\,u \oplus \text{Im}\,u = E$.

2.205 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 166I*

Montrer que le polynôme $P_n = X^n - X + 1$ admet n racines complexes distinctes $z_1, \cdots, z_n$ si $n \geqslant 2$.

Calculer le déterminant D de la matrice ayant $1 + z_1, \cdots, 1 + z_n$ sur la diagonale et des 1 partout ailleurs.

2.206 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 169II*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$.

Montrer que $\det(A) = 0$, puis que $A = 0$.

2.207 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 171II*

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que rang $(M) = \mathrm{Inf}\left\{k \in \mathbb{N} \mid \exists (A,B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R}),\ M = AB\right\}$.

2.208 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 227I*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, relier rang (A) et rang (B) si $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

2.209 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 227II*

On note z_1, z_2, z_3 les trois racines complexes de $P(X) = X^3 - pX + q$.

a. Trouver Q, unitaire de degré 3 de racines $(z_1 - z_2)^2$, $(z_1 - z_3)^2$ et $(z_2 - z_3)^2$.

b. Exprimer le coefficient en X^2 de Q en fonction de p et q.

c. Déterminer une CNS pour que les points d'affixes z_1, z_2, z_3 soient les sommets d'un triangle équilatéral.

2.210 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 230I*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
a. Donner un exemple de partie $\mathcal{R}$ non vide de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces stables par tous les endomorphismes de $\mathcal{R}$ sont $\{0_E\}$ et E.

b. Montrer que si $\mathcal{R}$ vérifie ces hypothèses et f commute avec tous les éléments de $\mathcal{R}$, alors il existe un complexe λ tel que $f = \lambda \mathrm{id}_E$.
c. Ce résultat est-il vrai pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2.211 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 235I*

Trouver $P \in \mathbb{R}_7[X]$ tel que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$.

2.212 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 245I*

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Calculer le produit de ses solutions non nulles.

2.213 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 276II*

Montrer, si p est un projecteur de E et f un endomorphisme de E, que l'on a l'équivalence suivante :

$p \circ f = f \circ p$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont stables par f.

2.214 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 284I*

a. Calculer le rang de $M = X^tY$ si $(X, Y) \in (R^n)^2$ sont deux vecteurs colonnes non nuls.

b. Calculer $\det(\lambda I_n - M)$ en fonction de λ, X et Y.

c. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $Y = {}^tA^{-1}X$. En calculant $\det(I_n + M)$, montrer que $\dfrac{\det(X^tX + A)}{\det(A)} = 1 + {}^tXA^{-1}X$.

2.215 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 286II*

Trouver deux entiers relatifs a et b tels que $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$ et donner le quotient.

2.216 *OdlT 2014/2015 ENSAE-ENSIIE PSI planche 329I*

Écrire la matrice de f, endomorphisme d'un espace de dimension finie, tel que rang $(f) = \mathrm{Tr}\ (f) = 1$, dans une base bien choisie et en déduire que c'est un projecteur.

2.217 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 114II*

Montrer que si σ est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n, vérifiant $\sigma^2 = -\mathrm{id}_E$, alors n est pair. On pose $n = 2p$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle σ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

2.218 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 115I*

On note A la matrice carrée d'ordre n de coefficient $a_{i,j} = \mathrm{Min}(i, j)$. Montrer que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure unité U et d'une matrice triangulaire supérieure V.

Exprimer A^{-1} à l'aide de N dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la sur-diagonale qui valent 1.

2.219 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 116II*

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X) = P(1 - X)$.

2.220 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 117I*

Si u et v sont deux endomorphismes donnés d'un espace E de dimension finie, résoudre l'équation $u \circ f = v$, d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$.

2.221 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 119I*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, on note D et F les applications définies par $D(f)(x) = f'(x)$ et $F(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Prouver que D et F sont linéaires et expliciter $D \circ F$ et $F \circ D$.

Expliciter $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - F)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - D)$.

Montrer que la restriction de $\mathrm{id} - D$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est inversible et trouver son inverse.

2.222 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 121II*

Donner la dimension de l'espace engendré par $\cos(x + a)$, $\cos(x + b)$, $\cos(x + c)$ où a, b, c sont trois réels.

2.223 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 122I*

Trouver les sous-espaces de E, $\mathbb{R}$-espace de dimension finie $n \geqslant 2$, stables par u vérifiant $u^n = 0$, $u^{n-1} \neq 0$.

2.224 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 124I*

Soit p et q deux projecteurs d'un espace E. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ si et seulement si $p = p \circ q$ et $q = q \circ p$.

2.225 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 125I*

On donne une famille $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et on note U_k la suite de terme général $P_k(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre si et seulement si $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ l'est.

2.226 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 127I*

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et de coefficients a_k, montrer que $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $|a_k| \leqslant \operatorname*{Sup}_{|z|=1} |P(z)|$.

2.227 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 128II*

Soient P de degré n et $a_0, \cdots, a_n$ des réels deux à deux distincts ; montrer que $\big(P(X + a_i)\big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.228 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 132II*

Montrer que, si $z_0, \cdots, z_n$ sont des complexes 2 à 2 distincts, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

2.229 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 133II*

Pour $a \in \mathbb{R}$, résoudre $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2.230 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 186I*

Donner une condition sur b et c réels pour que $X^3 + bX + c$ soit à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Soient $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ avec $a \neq 0$ et $Q(X) = -P(-a - X)$.

Trouver une relation entre les racines de P et celles de Q.

En déduire que les racines de P sont à partie réelle négative si et seulement si les racines réelles de P et Q sont négatives.

2.231 *OdlT 2015/2016 Centrale PSI planche 188*

Soient E un espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Pour $k \in [\![0; n]\!]$, on note $I_k = \operatorname{Im} f^k$ et $N_k = \operatorname{Ker} f^k$.

Montrer que les I_k et N_k sont stables par f.

Montrer que $N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n$ et que ces inclusions sont strictes.

Donner les dimensions de I_k et N_k.

Quels sont les sous-espaces stables par f ?

Y a-t-il des couples (i, j) tels que $I_i = N_j$? Si oui, les donner.

2.232 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 235II*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Montrer que $\exists a \in E,\ B = \big(a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a)\big)$ soit une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

Montrer qu'un endomorphisme g commute avec f si et seulement s'il est combinaison linéaire des endomorphismes $\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1}$ (on pourra exprimer $g(a)$ dans la base B).

2.233 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 246II*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ donnée par $a_{i,i} = a$, $a_{i,j} = b$ si $j > i$, $a_{i,j} = c$ si $j < i$, avec a, b, c complexes et $b \neq c$.

On note J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Montrer que $\det(A + xJ)$ est un polynôme en x de degré $\leqslant 1$ et calculer $\det(A)$ en fonction de a, b, c.

2.234 *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 275II*

Montrer que si P est un polynôme impair, l'équation $y'(x) + xy(x) = P(x)$ admet une unique solution polynomiale $u(P)$.

Que dire de la parité de $u(P)$? Les résultats persistent-ils si P est pair ?

Montrer que f, qui à $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ impair associe $Xu(P)$ est un endomorphisme de l'espace des polynômes impairs de degré au plus $2n + 1$, dont on donnera la matrice dans la base canonique.

2.235 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 280II*

Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, donner le rang de l'endomorphisme Φ, défini par $\Phi(g) = g \circ f$, en fonction de celui de f.

2.236 *OdlT 2015/2016 ENSEA planche 282II*

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

2.237 *OdlT 2015/2016 ENSEA planche 283I*

a. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $M = AB$.

c. Montrer avec les conditions de la question précédente que $BA = I_2$.

2.238 *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 286I*

Soit f une application non nulle et non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même, vérifiant $f(AB) = f(A)f(B)$.

Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

2.239 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 38 abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

Soit deux entiers $p \geqslant 2$ et $n \in [\![1; p-1]\!]$, un polynôme $Q(X) = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n \in \mathbb{C}[X]$.
On note ζ_i les racines p-ièmes de l'unité et $M = \underset{z \in S_1}{\mathrm{Max}} |Q(z)|$ où S_1 est la sphère unité de $\mathbb{C}$.
Démontrer que $Q(\zeta_1) + \ldots + Q(\zeta_p) = pb_0$ et en déduire que $|b_0| \leqslant M$.

Montrer que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $|b_i| \leqslant M$. Soit $(z_i)_{i \in [1;n]} \in \mathbb{C}^n$; montrer que $\exists z \in S_1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} |z - z_k| \geqslant 1$.

Interpréter géométriquement cette propriété dans le plan $\mathbb{R}^2$.
Redémontrer le résultat de la deuxième question par une méthode "continue".

2.240 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 41 abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

Montrer que le commutant $C(A)$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre.
Montrer que si M inversible est dans $C(A)$, son inverse aussi.
Trouver le commutant de D diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous distincts et montrer que $(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $C(D)$.
Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ont un commutant de dimension 4 ?
Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim C(A) \geqslant 2$.
On suppose que $\dim C(A) = 3$; montrer que $A = \lambda I_2$ (on pourra utiliser $\mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12})$ et $\mathrm{Vect}(E_{21}, E_{22})$).
Donner une base de $C(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.241 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 105II abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3$.

2.242 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 108II abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Montrer que : $(a_0 \neq 0) \Leftrightarrow (\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ \exists! P \in \mathbb{K}[X],\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = Q)$.

2.243 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 109II abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

Montrer que si $(z_0, \ldots, z_n)$ sont des complexes 2 à 2 distincts, la famille des $(X - z_k)^n$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

2.244 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 117II abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année*

Trouver les nombres complexes z tels que le triangle ABC d'affixes z, z^2 et z^3 ait l'origine pour orthocentre.

2.245 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 204II abordable dès la 1ère année*

On note f l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_6[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $D = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Montrer que f est linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans les bases canoniques. Donner la dimension et une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$.

2.246 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 205II abordable dès la 1ère année*

On donne une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ d'endomorphismes d'un espace E de dimension finie, tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k = \mathrm{id}_E$ et $i \neq j \Longrightarrow f_i \circ f_j = 0$. Montrer que les f_k sont des projecteurs et que E est somme directe de leurs images.

2.247 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 207II abordable dès la 1ère année*

On donne un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$.
On suppose u injectif. Déterminer $K_m = \mathrm{Ker}\,(u^m)$ et $I_m = \mathrm{Im}\,(u^m)$.
Montrer que $\forall m \geqslant 1$, $K_m \subset K_{m+1}$ et $I_{m+1} \subset I_m$.
On suppose u non injectif. Montrer que $\exists p \in [\![0; n]\!]$, $K_p = K_{p+1}$ et $I_p = I_{p+1}$.
Montrer alors que $\forall q \in \mathbb{N}$, $K_p = K_{p+q}$ et $I_p = I_{p+q}$, puis que $E = K_p \oplus I_p$.

2.248 *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 243I abordable dès la 1ère année*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
a. Trouver une condition sur x_0 pour que $\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\big)$ soit une base de E.
b. Donner l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

2.249 *OdlT 2016/2017 ENSAM PSI planche 243III abordable dès la 1ère année*

Pour $x < y < z$, donner le signe de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & e^x \\ 1 & y & e^y \\ 1 & z & e^z \end{vmatrix}$.

2.250 *OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 247II abordable dès la 1ère année*

$f_1 : x \mapsto \sin(x+a)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x+b)$ et $f_3 : x \mapsto \sin(x+c)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

2.251 *OdlT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 248I abordable dès la 1ère année*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & \ldots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et J la matrice dont tous les coefficients valent 1.
Montrer que $\det(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus égal à 1 et en déduire $\det(A)$.

2.252 *OdlT 2016/2017 EIVP PSI planche 244II abordable dès la 1ère année*

Montrer que, si $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$, $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$. Donner $\overline{A}$ pour $A = \lambda \prod\limits_{k=1}^{n} (X - z_k)$.
Soit $P = Q + iR$ dont toutes les racines sont à partie imaginaire négative (avec $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X]^2)$.
Exprimer les polynômes réels Q et R en fonction de P et $\overline{P}$.
Comparer $|P(z)|$ et $\big|\overline{P}(z)\big|$ puis montrer que Q et R sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$.

2.253 *Compléments OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 104II abordable dès la 1ère année*

Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

2.254 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 117II, abordable dès la première année*

Montrer que si P est polynôme de degré n à coefficients réels et $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ des réels deux à deux distincts, $\big(P(X+a_i)\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.255 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 122II, abordable dès la première année*

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k}$.

2.256 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 130I, abordable dès la première année*

Montrer que si $z_0,\dots,z_n$ sont des complexes tous distincts, $\big((X-z_k)^n\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$.

2.257 *OdlT 2017/2018 Centrale PSI planche 167, abordable dès la première année*

Deux polynômes P et Q de degré n admettent une racine commune λ ; montrer qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ non nuls, tels que $UP+VQ=0$.

On choisit $n=2$ et on pose $\phi(U,V)=UP+VQ$; montrer que ϕ est linéaire de $\mathbb{C}_1[X]^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$ et exprimer sa matrice dans des bases à déterminer.

Donner une condition sur les coefficients de P et Q pour qu'ils n'aient aucune racine commune.

2.258 *OdlT 2017/2018 EIVP PSI planche 250II, abordable dès la première année*

Montrer que f, défini par $f(P)(X)=P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

Montrer que $\forall Q\in\operatorname{Im} f, \exists P\in\mathbb{R}_n[X],\ Q=f(P),\ P(0)=P'(0)=0$.

2.259 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 184*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme nilpotent ; montrer que son indice de nilpotence est au plus égal à n.

On suppose de plus que l'indice de nilpotence de u est n ; montrer qu'un endomorphisme v commute avec u si et seulement s'il est de la forme $P(u)$, où $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Déterminer la dimension du commutant de u.

2.260 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 426II*

On note ϕ l'endomorphisme qui à $P\in\mathbb{R}[X]$ associe $P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$.

Comparer les degrés de $\phi(P)$ et P et en déduire $\operatorname{Ker}\phi$.

En étudiant la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que ϕ est surjectif.

2.261 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 456II*

Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les sommes des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne sont toutes égales, est un espace vectoriel. On définit maintenant E comme l'intersection de $\mathcal{M}$ avec l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle, F celle de $\mathcal{M}$ avec l'ensemble des matrices antisymétriques et G celle des matrices dont tous les coefficients sont égaux. Montrer que $\mathcal{M}=E\oplus F\oplus G$.

2.262 *Compléments OdlT 2017/2018 Saint-Cyr PSI planche 556I*

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(ka)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(ka)$.

2.263 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 558II*

Calculer $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.

2.264 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 559I*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
Si E est de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$, montrer que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont supplémentaires.
En déduire qu'il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0_{p,p} & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & T_{n-p,n-p} \end{pmatrix}$ où T est triangulaire supérieure.

2.265 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 560II*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$, montrer que $\mathrm{Im}\, u$ est stable par u.
Pour $x \in \mathrm{Im}\, u$, calculer $u^2(x)$. Montrer que l'endomorphisme v, induit par u sur $\mathrm{Im}\, u$, est un isomorphisme.
Montrer que $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension paire.

2.266 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 563II*

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, f_1, f_2 et f_3 trois endomorphismes de E qui commutent et tels que $f_1^2 = f_2^2 = f_3^2 = 0$; montrer que $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = 0$.

2.267 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 572II*

Montrer que $f : P \mapsto P(1)X + P(3)X^2$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera l'image et le noyau.

2.268 *Compléments OdlT 2017/2018 ENSEA PSI planche 578II*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de dimension finie, vérifiant $\exists a \in \mathbb{R}_+^*$, $f^3 - 2af^2 + a^2 f = 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

2.269 *OdlT 2018/2019 Mines PSI planche 108II*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H = \{M \in E \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\}$ et N l'ensemble des matrices nilpotentes de E.
H et N sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? Trouver $\mathrm{Vect}(N)$.

2.270 *OdlT 2018/2019 Mines PSI planche 115I, abordable dès la première année*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in GL(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

a. Montrer que $\forall x \in E$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $u^k(x) = x$.

b. Montrer que $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $u^N = \mathrm{id}_E$.

c. Les résultats de **a.** et **b.** subsistent-ils si u n'est pas inversible ?

2.271 *OdlT 2018/2019 Mines PSI planche 122II, abordable dès la première année*

Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

2.272 *OdlT 2018/2019 Centrale PSI planche 160*

a. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}({}^t MM)$.

b. Montrer que le rang de $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in GL_r(\mathbb{R})$, est au moins égal à r.

c. Montrer que $\mathrm{rang}\,(M) = r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

2.273 *OdlT 2018/2019 CCP PSI planche 208II ou compléments CCP PSI planche 326II*

abordable en première année
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + \text{Tr }(M)A$.
a. Montrer que $\text{Tr }(A) \neq -1 \Longrightarrow f$ bijective.
b. On suppose maintenant $\text{Tr }(A) = -1$. Donner $\text{Ker}(f)$. Montrer que $\text{Im}\,(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr }(M) = 0\}$.
c. On revient au cas général, soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $M + \text{Tr }(M)A = B$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.274 *Compléments OdlT 2018/2019 Mines PSI planche 107II*

Si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, montrer que : $\text{rang}\, M = \text{Min}\{k \in \mathbb{N},\ \exists (A,B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{K}),\ M = AB\}$.

2.275 *Compléments OdlT 2018/2019 CCP PSI planche 346II*

Soit E espace de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$, $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
a. Montrer que si E est de dimension finie, $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont supplémentaires.
b. Qu'en est-il en dimension quelconque ?

2.276 *Compléments OdlT 2018/2019 SAINT-CYR PSI planche 424I*

a. Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $\text{Im}\,(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
b. Montrer que $f^2 = f \Longrightarrow E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}\,(f)$.

2.277 *Compléments OdlT 2018/2019 ENTPE PSI planche 427I*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M^4$.
a. Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$ et en déduire que si $I_n + M$ est inversible, alors $M^2 = M^3$.
b. Effectuer la division euclidienne de $-X^3 + X^2$ par $X + 1$ puis montrer qu'il existe deux polynômes réels U et V "simples" tels que $(-X^3 + X^2)U + (X+1)V = 1$.
c. Montrer que si $M^2 = M^3$, $I_n + M$ est inversible et trouver son inverse sous la forme d'un polynôme en M.

2.278 *Compléments OdlT 2018/2019 ENSEA PSI planche 457I*

On note $G = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$.
a. Montrer que $\mathbb{C}^n = F \oplus G$.
b. Donner les expressions de la projection sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. à F).