SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 1 INTÉGRALES

1.1 Intégrales sur un segment et développements limités

1.1 On effectue dans $I = \int_a^b xf(x)dx$ le changement de variables $x = \varphi(t) = a + b - t$ et on trouve par linéarité que $I = (a+b)\int_a^b f(x)dx - I$ d'où $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$. L'application $f : x \to \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ est continue et $f(\pi - x) = f(x)$: $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\Big[-\text{Arctan}(\cos x)\Big]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$.

1.2 $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$ donc $v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$. Or $x \to \ln(1+x^2)$ est continue sur $[0;1]$, par somme de RIEMANN et IPP : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\frac{e^{\pi/2}}{e^2}$.

1.3 Pour $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\alpha\cos x + 1 > 1 + \cos\alpha > 0$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale, on pose alors $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour avoir $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos\alpha\cos x + 1}dx = \frac{2}{1+\cos\alpha}\int_0^1 \frac{du}{1+\left(u\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}$ avec quelques formules de trigonométrie de derrière les fagots comme $1+\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1-\cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

1.4 **a.** Par le changement de variables $x = 1 - t$ on trouve $J(p,q) = J(q,p)$ et par intégration par parties ($u = (1-x)^{q+1}$ et $v' = x^p$) : $J(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1}J(p+1,q)$.

b. On a $J(p,0) = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$ donc, par récurrence et en utilisant la question **a.**, on trouve la formule finale : $J(p,q) = \frac{q}{p+1}J(p+1,q-1) = ... = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}J(p+q,0) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

1.5 On pose $\varphi : t \to e^{-kt}F(t)$. Alors $\varphi'(t) = (f(t) - kF(t))e^{-kt} \leqslant 0$ par hypothèse.
Ainsi φ est décroissante et comme $\varphi(0) = 0$, on a φ est négative.
Mais φ est positive par construction donc elle est nulle ; et comme $f = F'$, on a f nulle.

1.6 On a $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x\ln x} + o\Big(\frac{1}{x\ln x}\Big)$ grâce au DL_1 de la fonction $\ln$; d'où le développement $\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x\ln x} + o\Big(\frac{1}{x\ln x}\Big)$ d'où $x\ln x\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{=} 1 + o(1)$ et on a $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} \underset{+\infty}{=} \exp\big(1+o(1)\big) \underset{+\infty}{=} e + o(1)$: la limite est donc égale à e.

1.7 On sait que $e^x - 1 \underset{0}{=} x + o(x)$ donc le $DL_n(0)$ de $(e^x-1)^n$ est $(e^x-1)^n \underset{0}{=} x^n + o(x^n)$. De plus, on a $(e^x-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k}e^{kx}$ par le binôme de NEWTON ; or le $DL_n(0)$ de e^{kx} est $e^{kx} \underset{0}{=} \sum_{p=0}^n \frac{k^p x^p}{p!} + o(x^n)$ en composant celui de e^x par kx (qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0). Alors, en sommant ces DL, on obtient $(e^x-1)^n \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{p=0}^n \frac{k^p x^p}{p!} \underset{0}{=} \sum_{p=0}^n\left(\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p\right)\frac{x^p}{p!} + o(x^n)$ et en identifiant les coefficients dans les deux expressions (unicité) : $\forall p \in [\![0;n-1]\!]$, $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p = 0$ et $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n = n!$.

$\boxed{1.8}$ **a.** Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par : $\forall x \geqslant 0,\ \varphi(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$; alors φ est dérivable car f est dérivable et f^{-1} continue et : $\forall x \geqslant 0,\ \varphi'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}\big(f(x)\big) - f(x) - xf'(x) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, φ est constante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0) = 0$ donc φ est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
b. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on définit $\psi_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par : $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \psi_x(y) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t) - xy$. ψ_x est encore dérivable et $\psi_x'(y) = f^{-1}(y) - x$ et comme f^{-1} est strictement croissante, ψ_x est décroissante sur $[0; f(x)]$ et croissante sur $[f(x); +\infty[$, elle est par ailleurs nulle en $f(x)$ d'après la question **a.** donc elle est positive sur $\mathbb{R}_+$ et nulle seulement en $f(x)$.

$\boxed{1.9}$ **a.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$; f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et $\dfrac{3}{2} > 1$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par critère de RIEMANN.

b. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$: $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \leqslant f(n)$; or $f(n+1) \underset{+\infty}{\sim} f(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
C'est plus délicat pour le second équivalent : on constat que pour $x \in [n; 2n]$, $\dfrac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ car $x^3+x^2+x+1 \leqslant x^3+3x^2+3x+1$. Ainsi : $\left[\dfrac{-2}{\sqrt{x+1}}\right]_n^{2n} \leqslant \displaystyle\int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \leqslant \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_n^{2n} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. Or on a aussi $\left[\dfrac{-2}{\sqrt{x+1}}\right]_n^{2n} = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1/2} - \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{-1/2}\right] \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ donc $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$.

$\boxed{1.10}$ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, alors f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $2 > 1$: f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par critère de RIEMANN. Pour $x \geqslant 0$, on encadre, sur l'intervalle $[x; 2x]$: $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+2t^2+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4}}$, la croissance de l'intégrale donne la double inégalité : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+2t^2+1}} = \mathrm{Arctan}(2x) - \mathrm{Arctan}(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leqslant \frac{1}{2x} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4}}$. Comme, $\mathrm{Arctan}(2x) - \mathrm{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x}\right) - \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$, on a enfin : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

$\boxed{1.11}$ Si $\alpha > 0$, on a $\dfrac{n+1}{(2n)^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^\alpha}$ car $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante.
Si $\alpha > 1$, par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Si $\alpha = 1$, avec les sommes de RIEMANN : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.
Si $\alpha \in]0; 1[$, la minoration montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Si $\alpha \leqslant 0$, $u_n \geqslant n+1$, on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\boxed{1.12}$ g_n réalise une bijection strictement croissante C^∞ de $[n; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ d'où l'existence et l'unicité de x_n.
$g_n(n+1) = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{t^2}dt \geqslant 1$ car $e^{t^2} \geqslant 1$ donc $g_n(n) = 0 \leqslant 1 = g_n(x_n) \leqslant g_n(n+1) \Longrightarrow n \leqslant x_n \leqslant n+1$.
On se sert ensuite de la croissance de $t \mapsto e^{t^2}$ pour obtenir par croissance de l'intégrale $x_n - n \leqslant e^{-n^2}$.
On peut en déduire par exemple par un nouvel encadrement que $x_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n^2}$.

$\boxed{1.13}$ On justifie que l'existence des intégrales I_n, puis on obtient par IPP la relation $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. Par récurrence, on arrive à $b_n = (-1)^{n+1}n!$. On conclut à la convergence souhaitée par le CSSA. On pouvait bien sûr utiliser le théorème de convergence dominée pour avoir le même résultat plus rapidement.

1.2 Fonctions intégrables

1.14 $f : t \mapsto \dfrac{|\ln(t)|^{\beta}dt}{(t-t^2)^{\alpha}}$ est continue et positive sur $]0;1[$. On a $\dfrac{|\ln(t)|^{\beta}dt}{(t-t^2)^{\alpha}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{\alpha-\beta}}$ donc f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ si et seulement si $\alpha-\beta<1$ d'après RIEMANN. "En 0" : $\dfrac{|\ln(t)|^{\beta}dt}{(t-t^2)^{\alpha}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha}|\ln(t)|^{-\beta}}$ et d'après les intégrales de BERTRAND, f est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $\alpha<1$ ou ($\alpha=1$ et $\beta<1$).

1.15 D'abord, la fonction $f_{x,y}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$ pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

- Si $y>0$, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-ty} = 0^+$ donc, puisque $\ln(1+u)\underset{0}{\sim}u$, on obtient l'équivalent $f_{x,y}(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^x e^{-ty}}{1+t^x}$ donc, encore par croissances comparées, $f_{x,y}(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ce qui prouve que $f_{x,y}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.
- Si $y=0$ et $x>0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x=+\infty$ et $\ln(1+t^x)=x\ln(t)+\ln(1+t^{-x})$ donc $f_{x,0}(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x\ln(t)}{t^x}$:

  Si $x>1$, avec $1<a<x$, $f_{x,0}(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^a}\right)$ par croissances comparées donc $f_{x,0}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

  Si $x\leqslant 1$, on a $f_{x,0}(t)\geqslant \dfrac{1}{t}$ pour t assez grand donc $f_{x,0}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.
- Si $y=0$ et $x=0$, $f_{0,0}(t)=\dfrac{\ln(2)}{2}$ donc $f_{0,0}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.
- Si $y=0$ et $x<0$, $f_{x,0}(t)\underset{+\infty}{\sim} t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}$ donc $f_{x,0}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x<-1$.
- Si $y<0$ et $x>0$, $f_{x,y}(t)=\dfrac{-ty+x\ln(t)+\ln(1+t^{-x}e^{ty})}{1+t^x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-ty}{1+t^x}$ et on a trois cas :

  Si $x<0$, $f_{x,y}(t)\underset{+\infty}{\sim} -yt$ donc $f_{x,y}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} f_{x,y}(t)=+\infty$.

  Si $x=0$, $f_{x,y}(t)\underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{yt}{2}$ donc $f_{x,y}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} f_{x,y}(t)=+\infty$.

  Si $x>0$, $f_{x,y}(t)\underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{y}{t^{x-1}}$ donc $f_{x,y}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $x>2$.

En conclusion : $f_{x,y}$ est intégrable sur $[1;+\infty[\Longleftrightarrow \big((y>0)$ ou $(y=0$ et $|x|>1)$ ou $(y<0$ et $x>2)\big)$.

1.16 Soit $f:]a;b[\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\ln\left(\dfrac{b-t}{t-a}\right)$; f est continue sur $]a;b[$, positive sur $\left]a;\dfrac{a+b}{2}\right]$ puis négative sur $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right[$ donc de signe constant au voisinage des deux bornes. Posons $c=\dfrac{a+b}{2}$, f est intégrable sur $]a;b[$ si et seulement si elle l'est sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$. Or $f(t)\underset{a}{\sim}-\ln(t-a)$ or $\ln$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $t\mapsto\ln(t-a)$ l'est sur $]a;a+1]$. Ainsi f est intégrable sur $]a;c]$. De même f est intégrable sur $[c;b[$ et par conséquent sur $]a;b[$. Reste à effectuer le changement de variable $u=a+b-t$ et on trouve $\displaystyle\int_a^b \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right)dt=\int_b^a \ln\left(\frac{u-a}{b-u}\right)(-du)=-\int_a^b \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right)dt$ donc $\displaystyle\int_a^b \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right)dt=0$.

1.17 La fonction $f_p : t\mapsto \dfrac{dx}{x\sqrt{x^{2p+1}+1}}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$, et $f_p(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^{p+\frac{3}{2}}}$ donc f_p est intégrable si et seulement si $p>-\dfrac{1}{2}$ d'après le critère de RIEMANN. On pose $x=\varphi(t)=\Big(\tan t\Big)^{\frac{2}{2p+1}}$ qui est un C^1-difféomorphisme de $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $[1;+\infty[$ donc, si $p>-\dfrac{1}{2}$, comme une primitive de $t\mapsto\dfrac{1}{\sin(t)}$ est $t\mapsto\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ et que $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^{2p+1}+1}}=\frac{2}{2p+1}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dt}{\sin(t)}=\frac{2}{2p+1}\ln(\sqrt{2}+1)$.

1.18 Posons $f : t \mapsto |1-t^\alpha|^\beta$, alors f est positive et continue sur $]0;1[$. Si $\alpha = 0$, on a $f = 0$ si $\beta > 0$, $f = 1$ si $\beta = 0$ et f non définie si $\beta < 0$. Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$. Si $\alpha < 0$, on a $\forall t \in]0;1[$, $f(t) \underset{0}{\sim} t^{\alpha\beta}$ car $|1-t^\alpha| = t^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} t^\alpha$. Alors, par le critère de RIEMANN, f est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ si et seulement si $-\alpha\beta < 1 \iff \alpha\beta > -1$.

Voyons ce qui se passe au voisinage de 1 si $\alpha \neq 0$ en posant $t = 1-h$ (avec $h \in]0;1[$), alors on a le calcul $f(t) = f(1-h) = \exp\left(\beta \ln|1-(1-h)^\alpha|\right) \underset{0}{=} \exp\left(\beta \ln|\alpha h + o(h)|\right) \underset{0}{=} \exp\left(\beta\ln(h) + \beta\ln|\alpha| + o(1)\right) \underset{0}{\sim} (|\alpha|h)^\beta$ donc toujours d'après RIEMANN : f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ si et seulement si $\beta > -1$.

(f est intégrable sur $]0;1[$) $\iff$ ($\alpha = 0$ et $\beta \geqslant 0$) ou ($\alpha > 0$ et $\beta > -1$) ou ($\alpha < 0$ et $\beta < -1$ et $\alpha\beta > -1$).

1.19 $f : t \mapsto \dfrac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t-t^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $]0;1[$. On a $\dfrac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t-t^2)^\alpha} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^{\alpha-\beta}}$ donc f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ si et seulement si $\alpha - \beta < 1$ d'après RIEMANN. "En 0" : $\dfrac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t-t^2)^\alpha} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha|\ln(t)|^{-\beta}}$ et d'après les intégrales de BERTRAND, f est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta < 1$).

1.20 On a $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^\alpha}{t^\beta}$ si $\alpha > 0$; $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{t^\beta}$ si $\alpha = 0$ et $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\alpha\ln(t)}{t^\beta}$ si $\alpha > 0$.

De même $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^\alpha}{t^\beta}$ si $\alpha < 0$; $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{t^\beta}$ si $\alpha = 0$ et $f_{\alpha,\beta}(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha\ln(t)}{t^\beta}$ si $\alpha > 0$.

Ainsi, avec les critères de RIEMANN et le fait que $\dfrac{\alpha\ln(t)}{t^\beta} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1+\beta}{2}}}\right)$ si $\beta < 1$ et $\dfrac{\alpha\ln(t)}{t^\beta} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1+\beta}{2}}}\right)$ si $\beta > 1$, on a intégrabilité de $f_{\alpha,\beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $\big(\alpha > 0$ et $1 < \beta < \alpha+1\big)$ ou $\big(\alpha < 0$ et $\alpha + 1 < \beta < 1\big)$.

1.21 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\operatorname{th} x}{x^\alpha}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x^{-\alpha}e^{-2x} \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^\alpha}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha < 1$ d'après le critère de RIEMANN.

1.22 Posons $f : t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; on a $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0. De plus $f(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $2 > 1$ donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$ (car positive sur $[1;+\infty[$) et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $t = \varphi(u) = \dfrac{1}{u}$ avec φ de classe C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2}\frac{u^3\ln(1/u)du}{(1+u^2)^2} = -I_1$ donc $I_1 = 0$.

Comme f intégrable sur $[1;+\infty[$, $I_2 = \lim\limits_{a\to+\infty}\displaystyle\int_1^a f(t)dt$ et on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{-1}{2(1+t^2)}$ qui sont C^1 sur $[1;a]$: $\displaystyle\int_1^a f(t)dt = \left[\frac{-\ln(t)}{2(1+t^2)}\right]_1^a + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{dt}{t(1+t^2)} = \frac{-\ln(a)}{2(1+a^2)} + \frac{1}{2}\int_1^a \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt$ ce qui donne $\displaystyle\int_1^a f(t)dt = \frac{-\ln(a)}{2(1+a^2)} + \frac{1}{4}\Big(2\ln(a) - \ln(1+a^2) + \ln(2)\Big)$. On passe à la limite quand a tend vers $+\infty$ et on trouve $I_2 = \dfrac{\ln(2)}{4}$. On aurait pu poser le changement de variable $t = \sqrt{u}$ pour simplifier un peu !

1.23 Posons $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{(1+t)^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; on a $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$ or $\ln$ est intégrable sur $]0;1]$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ (car négative sur $]0;1]$). De plus $f(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\dfrac{3}{2} > 1$ donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$ (car positive sur $[1;+\infty[$) et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $t = \varphi(u) = \dfrac{1}{u}$ avec φ de classe C^1, strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \frac{u^2 \ln(1/u)du}{1+u^2} = -I_1$ donc $I_1 = 0$.

f intégrable sur $[1;+\infty[$, $I_2 = \displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_1^a f(t)dt$ et on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \dfrac{-1}{1+t}$ qui sont C^1 sur $[1;a]$: $\displaystyle\int_1^a f(t)dt = \Big[\frac{-\ln(t)}{1+t}\Big]_1^a + \int_1^a \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{-\ln(a)}{1+a} + \int_1^a \big(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\big)dt = \frac{-\ln(a)}{1+a} + \ln(a) - \ln(1+a) + \ln(2)$. On passe à la limite quand a tend vers$+\infty$ et on trouve $I_2 = \ln(2)$.

1.24 On a $\ln\big(\tan(\theta)\big) \underset{\frac{\pi}{2}^-}{\sim} -\ln\big(\cos(\theta)\big)$ donc comme $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(\theta) = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{y\to0^+} y\ln(y) = 0$: prolongement par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$. De plus, $\cos(\theta)\ln\big(\tan(\theta)\big) \underset{0^+}{\sim} \ln(\theta) \underset{0}{=} o\Big(\sqrt{\theta}^{\,-1}\Big)$ intégrable d'après RIEMANN.

Si $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$, on a $\displaystyle\int_a^b \cos(\theta)\ln\big(\tan(\theta)\big)d\theta = \Big[\sin(\theta)\ln\big(\tan(\theta)\big)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{d\theta}{\cos(\theta)}$ par IPP donc $I_b = \displaystyle\int_0^b \cos(\theta)\ln\big(\tan(\theta)\big)d\theta = \sin(b)\ln\big(\tan(b)\big) - \int_0^b \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = \sin(b)\ln\big(\tan(b)\big) - \ln\Big(\tan\big(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{4}\big)\Big) =$ $-\cos(h)\ln\big(\tan(h)\big) + \ln\Big(\tan\Big(\dfrac{h}{2}\Big)\Big) \underset{0^+}{=} -\big(1+o(h)\big)\ln\big(h+o(h)\big) + \ln\Big(\dfrac{h}{2}+o(h)\Big)$ avec $b = \dfrac{\pi}{2} - h$: $I = -\ln(2)$.

1.25 **a.** $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ or f est intégrable donc $\widehat{f}(x)$ existe car $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}e^{-itx}dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-ix)t}dt + \int_0^{+\infty} e^{(-1-ix)t}dt = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}$.

b. Par exemple, pour $t \in \mathbb{R}$, on a $|f(x-t)g(t)| \leqslant ||f||_\infty |g(t)|$ d'où l'intégrabilité. Si par exemple $x \geqslant 0$, on a $(h*h)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-t|-|t|}dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t-x}dt + \int_0^x e^{-x}dt + \int_x^{+\infty} e^{x-2t}dt = (x+1)e^{-x}$. On effectue ensuite le changement de variable $u = -t$ pour constater la parité de $h*h$.

c. On calcule ensuite en utilisant le théorème de FUBINI : $\widehat{(f*g)}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)du\Big) e^{-ixt}dt =$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t-u)e^{-ixt}dt\Big) g(u)du$ qui devient avec le changement de variable (facile à justifier) $v = t-u$: $\widehat{(f*g)}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-ixt}dt\Big) e^{-ixu}g(u)du = \Big(\int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-ixt}dt\Big) \times \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixu}g(u)du\Big) = \widehat{f}(x) \times \widehat{g}(x)$.

1.26 La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$ avec $3 > 1$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le critère de RIEMANN. On effectue ensuite le changement de variable $x = \dfrac{1}{u}$ (les bonnes hypothèses sont vérifiées) car $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f = \int_{\mathbb{R}_+^*} f = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{u^2} f\Big(\frac{1}{u}\Big)du = \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}$. Alors $I = \dfrac{1}{2}\big(I+I\big) = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1} = \Big[\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

1.27 On vérifie que $:]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t} - \Big\lfloor \dfrac{1}{t} \Big\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0;1]$ (ce qui par définition signifie que f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]0;1]$) : c'est le cas car f admet en $\dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des limites à gauche, à droite. f est intégrable car positive et majorée par 1 et $\displaystyle\int_0^1 f = \lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^1 f$. Or $\displaystyle\int_{1/n}^1 f = \sum_{k=2}^n \int_{1/k}^{1/(k-1)} f = \sum_{k=2}^n \Big(\ln(k) - \ln(k-1) - \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big)(k-1)\Big) = \ln(n) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ par CHASLES. Or on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ donc $\displaystyle\int_{]0;1]} \Big(\frac{1}{t} - \Big\lfloor\frac{1}{t}\Big\rfloor\Big)dt = 1 - \gamma$ avec $\gamma \simeq 0,577$.

1.28 Continuité sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par prolongement par continuité donc intégrabilité. Puis changement de variable $u=\frac{\pi}{2}-t$ et somme. Réponse : $I_\alpha=\frac{\pi}{4}$. Si $\alpha=0$, $\frac{1}{1+\tan^\alpha(t)}=\frac{1}{2}$, I_0 converge et vaut $\frac{\pi}{4}$.
Si $\alpha<0$, on prolonge encore par continuité sur le segment ; $\frac{1}{1+\tan^\alpha(t)}+\frac{1}{1+\tan^{-\alpha}(t)}=1$ donc $I_\alpha=\frac{\pi}{4}$.

1.29 Par l'absurde, s'il existe $x\in[a;b]$ tel que $f(x)<0$, alors on construit g de classe C^∞ positive telle que g soit strictement positive sur $]x-h;x+h[$ et nulle ailleurs (on l'a vu en cours avec la fonction h telle que $h(x)=0$ si $x\leqslant 0$ et $h(x)=e^{-1/x}$ si $x>0$) d'où la contradiction.
Ensuite, il suffit de prendre $m=\frac{1}{2}\underset{[a;b]}{\text{Min}}\,f$ qui existe car f est continue sur un segment et qui est strictement positif car il existe $c\in[a;b]$ tel que $\underset{[a;b]}{\text{Min}}\,f=f(c)>0$.

1.30 Continuité sur $]a;b[$ et équivalent simple en a^+ et b^- donc intégrabilité avec Riemann : $\frac{1}{2}<1$.
Changement de variable $u=\sqrt{\frac{t-a}{b-t}}$ ou $t=a+(b-a)\sin\theta$. Réponse : $I=\pi$.

1.31 Changement de variable $u=\pi-x$ sur la seconde intégrale pour avoir $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^2 x}=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.
Puis $u=\tan(x)$ et décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples. Résultat : $I=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

1.32 **a.** $f(t)=\frac{t-1}{\ln(t)}$ se prolonge par continuité à $[0;1]$: $f(0)=0$ et $f(1)=1$ d'où la convergence de I.
b. On effectue le changement de variable $t=\varphi(x)=e^{-x}$ avec φ qui est bien une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$ et on a $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$. On ne peut pas séparer directement l'intégrale en deux car $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$ diverge. Par contre, pour $a>0$, $\int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx=\int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx-\int_a^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{x}dx$ ce qui en posant $u=2x$ dans la dernière intégrale se ramène à $\int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{e^{-x}}{x}dx$. On a vu que ceci tendait vers $\ln(2)$ lundi dernier. Ainsi, $I=\lim_{a\to+\infty}\int_a^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx=\ln(2)$.

1.33 Si $\alpha=0$, on a $f=0$ si $\beta>0$, $f=1$ si $\beta=0$ et f non définie si $\beta<0$.
On suppose dorénavant que $\alpha\neq 0$. Posons $f:t\mapsto|1-t^\alpha|^\beta$, alors f est positive et continue sur $]0;1[$.
• Si $\alpha>0$, $\lim_{t\to 0^+}f(t)=1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$.
• Si $\alpha<0$, on a $\forall t\in]0;1[$, $f(t)\underset{0}{\sim}t^{\alpha\beta}$ car $|1-t^\alpha|=t^\alpha-1\underset{0}{\sim}t^\alpha$. Alors, par le critère de Riemann, f est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ si et seulement si $-\alpha\beta<1\iff\alpha\beta>-1$.
• $f(t)=f(1-h)=\exp\left(\beta\ln|1-(1-h)^\alpha|\right)\underset{0}{=}\exp\left(\beta\ln|\alpha h+o(h)|\right)\underset{0}{=}\exp\left(\beta\ln(h)+\beta\ln|\alpha|+o(1)\right)\underset{0}{\sim}(|\alpha|h)^\beta$ en posant $t=1-h$ (avec $h\in]0;1[$). Toujours d'après Riemann : f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ ssi $\beta>-1$.
(f est intégrable sur $]0;1[$) $\iff$ ($\alpha=0$ et $\beta\geqslant 0$) ou ($\alpha>0$ et $\beta>-1$) ou ($\alpha<0$ et $\beta<-1$ et $\alpha\beta>-1$).

1.34 $f(t)\underset{0}{\sim}\ln(t)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0;1]$ (référence ou Riemann). Par développements limités (ou asymptotiques) : $f(t)\underset{+\infty}{=}(1+a+b)\ln(t)+\frac{a+2b}{t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Si $1+a+b\neq 0$, on a $\lim_{t\to+\infty}f(t)=\pm\infty$ donc f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. De même, si $1+a+b=0$ et $a+2b\neq 0$, on a $f(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a+2b}{t}$ donc f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ avec le critère de Riemann. Si $1+a+b=a+2b=0$, alors $f(t)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$ par ce même critère. La CNS cherchée est donc ($a=-2$ et $b=1$).

• Si $0 < x$, on a $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \Big[t\ln(t) - t - 2(t+1)\ln(t+1) + 2t + (t+2)\ln(t+2) - t\Big]_1^x = [G(t)]_1^x$ (la valeur $G(1)$ disparaîtra). On sait que $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = [F(x)]_0^{+\infty} = [G(x)]_0^{+\infty}$. Mais $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = 2\ln(2)$ alors que par DL, $G(x) \underset{+\infty}{=} o(1)$ en écrivant $(x+1)\ln(x+1) = (x+1)\Big(\ln(x) + \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big)$.
Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt = -2\ln(2)$. Une autre méthode ci-dessous.

• $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \ln\Big(\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\Big)dt$. Avec $u(t) = \ln\Big(\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\Big)$ et $v(t) = t$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ (classique) : $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(t+1)(t+2)}$ qui se calcule aisément.

1.35 $\forall n \geqslant 2,\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ avec $v_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)+1}$ et $w_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. $f : t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ étant décroissante, continue sur $[2;+\infty[$: $\forall n \geqslant 3,\ f(2) + \int_3^{n+1} f(t)dt \leqslant w_n \leqslant f(2) + \int_2^n f(t)dt$ par comparaison série/intégrale.
Or si $a \geqslant 2$: $\int_a^n f(t)dt = \Big[\ln(\ln(t))\Big]_a^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(a))$ donc $w_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.
De plus $\frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{k\ln(k)+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2\ln^2(k)} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$, ainsi la série $\sum\limits_{k\geqslant 2}\Big(\frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{k\ln(k)+1}\Big)$ converge ce qui se traduit par $w_n - v_n \underset{+\infty}{=} O(1)$. Mais comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$; puis $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

1.3 Intégrales impropres convergentes

1.36 **a.** Posons $f(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}$ pout $t > 0$, alors $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^{b-1}}$ donc u_n existe (et ceci indépendamment de la valeur de n) si et seulement si $b < 2$ par le critère de Riemann.

b. • Soit maintenant $b < 2$, alors comme $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^b}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $b > 1$ et nous poserons dans ce cas $I_b = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt > 0$ (si $b \in]1;2[$ donc).

• Si $b < 1$, par IPP, $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt = \frac{\text{Arctan}(n)}{(1-b)n^{b-1}} - \int_0^n \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ et $g : t \mapsto \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $b > 0$ et dans ce cas, on note $J_b = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}} > 0$ (si $b \in]0;1[$ donc).

• Si $b \leqslant 0$, comme $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt$ diverge, on a $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt$ et on encadre $\frac{\pi}{4}\int_1^n \frac{dt}{t^b} \leqslant \int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{dt}{t^b}$ donc $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt$ est "de l'ordre de" $\int_1^n \frac{dt}{t^b}$ donc de $\frac{1}{n^{b-1}}$.

• Si $b = 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt$ diverge aussi, et comme $\int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt = \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{1}{t}dt - \int_1^n \frac{\text{Arctan}(1/t)dt}{t^b}$, on a $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi\ln(n)}{2}$ car la fonction $t \mapsto \frac{\text{Arctan}(1/t)}{t^b}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

• Si $b \in]1;2[$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{I_b}{n^a}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$.

• Si $b \in]0;1[$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{(1-b)n^{a+b-1}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a+b > 2$.

• Si $b \in]-\infty;0]$, on a donc (par majoration ou minoration) $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a+b > 2$.

• Si $b = 1$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi\ln(n)}{2n^a}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$ (Bertrand).

1.37 **a.** Par opérations, φ est de classe C^1 sur $]0;\pi]$. Par DL, on montre qu'on peut prolonger φ par $\varphi(0)=0$ puis, par le théorème de prolongement C^1, φ de classe C^1 sur $[0;\pi]$ avec $\varphi'(0)=-\frac{1}{24}$.

b. On l'a déjà fait en cours par une intégration par parties ; $I=\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

c. Les $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ sont continues sur $]0;\pi]$ et se prolongent par continuité en 0 en posant $f_n(0)=n+\frac{1}{2}$. Ainsi, les I_n existent. De plus, $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)x\right)-\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx$. Or $\sin(a)-\sin(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ donc $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi}\cos((n+1)x)dx=0$.
Ainsi, la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est constante et vaut $I_0=\frac{\pi}{2}$.

d. Comme $F\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=\int_0^{(n+1/2)\pi} f(t)dt$, en posant le changement de variable $t=\left(n+\frac{1}{2}\right)x$, on obtient $F\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{x}dx$ et on transforme $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin(x/2)}+\frac{1}{2\sin(x/2)}$ pour avoir la relation $F\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx+I_n$.

e. Comme on sait que, puisque φ est de classe C^1 sur $[0;\pi]$, on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(\lambda x)dx=0$, d'après la question **c.** : $\lim\limits_{n\to+\infty}F\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=\frac{\pi}{2}$. Comme F admet comme limite I en $+\infty$, il vient finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}F\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=\frac{\pi}{2}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1.38 **a.** f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ car $f(t)\underset{0}{\sim}t$. de plus $f(t)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

b. $\sin^3 t=\left(\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3=\dfrac{e^{3it}-e^{-3it}-3e^{it}+3e^{-it}}{-8i}=\frac{3}{4}\sin(t)-\frac{1}{4}\sin(3t)$.

c. Par linéarité de l'intégrale $I(x)=\frac{3}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt-\frac{1}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}dt$ (les 2 intégrales convergent d'après **a.**). Or $\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}dt=\int_{3x}^{+\infty}\frac{9\sin u}{3u^2}du$ en posant $t=\frac{u}{3}$ donc $I(x)=\frac{3}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt-\frac{3}{4}\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$ ce qui donne bien $I(x)=\frac{3}{4}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$ avec la relation de CHASLES.

d. On a $\psi(t)\underset{0}{=}\dfrac{t-t^3/6+o(t^3)\sin t}{t^2}-\frac{1}{t}\underset{0}{=}-\frac{t}{6}+o(t)$ donc ψ se prolonge par continuité en 0 en posant $\psi(0)=0$ donc ψ est bornée au voisinage de 0 car elle est continue sur $[0;1]$ par exemple. Par conséquent $\int_x^{3x}\psi(t)dt\underset{0}{=}o(1)$. Or $\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt=\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt+\int_x^{3x}\psi(t)dt=\ln(3)+o(1)$. Au final, $\lim\limits_{x\to 0}I(x)=\frac{3}{4}\ln(3)=I$.

1.39 **a.** $g : t\mapsto e^{-t^2}$ est C^{∞} et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ donc f est la primitive de g qui s'annule en 0 et à ce titre elle est bien définie, C^{∞} et strictement croissante car $f'=g>0$. Comme $g(t)=e^{-t^2}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN donc $\int_0^{+\infty} g$ converge ce qui garantit une limite finie pour f en $+\infty$.

b. C'est une inégalité de convexité (plutôt de concavité d'ailleurs) qu'on démontre aisément en étudiant $\varphi : x\mapsto x-\ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$. En effet $\varphi'(x)=\frac{x}{1+x}$ et $\varphi(0)=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}[$ alors $x = \dfrac{t^2}{n}$ et $y = -\dfrac{t^2}{n}$ appartiennent à $]-1; +\infty[$.

Ainsi $\ln\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant \dfrac{t^2}{n}$ qu'on multiplie par n et qu'on compose par la fonction $\exp$ qui est croissante pour obtenir $\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{t^2}$. En passant à l'inverse, on a bien $e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

De même $\ln\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t^2}{n}$ qu'on multiplie par n et qu'on compose par $\exp$: $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2}$.

On a bien $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ pour $t \in [0, \sqrt{n}]$. Pour $t = \sqrt{n}$, $0 \leqslant e^{-n} \leqslant 2^{-n}$ car $2 < e$.

c. $\varphi : \theta \mapsto \sqrt{n}\cos(\theta)$ est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0; \sqrt{n}]$. En posant $t = \sqrt{n}\cos(\theta)$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\pi/2}^{0} \left(1 - \frac{n\cos^2\theta}{n}\right)^n (-\sqrt{n}\sin\theta)d\theta = \sqrt{n}\, I_{2n+1}$ car $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$.

d. $\psi : \theta \mapsto \sqrt{n}\,\text{cotan}\,(\theta)$ est une bijection C^1 strictement décroissante de $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0; \sqrt{n}]$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + (t^2/n)\right)^n} dt = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{1}{\left(1 + \text{cotan}^2\theta\right)^n}\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sin^2\theta}\right)d\theta = \sqrt{n}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}\theta d\theta \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$.

e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on intègre sur $[0; \sqrt{n}]$ avec **b.**, **c.** et **d.** : $\sqrt{n}\, I_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant \sqrt{n}\, I_{2n-2}$. Comme classiquement $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, il vient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(\sqrt{n}) = I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ce qui s'écrit aussi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.40 **a.** Si $x \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{x/2}^{+\infty} f(t)dt \geqslant \int_{x/2}^{x} f(t)dt \geqslant \frac{x}{2}f(x)$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xf(x) = 0$ car l'intégrale converge. Si $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x t\big(f(t) - f(t+1)\big)dt = \int_1^x tf(t)dt - \int_1^x tf(t+1)dt = \int_1^x tf(t)dt - \int_2^{x+1} (t-1)f(t)dt$. Ainsi, comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xf(x) = 0$: $\displaystyle\int_1^x t\big(f(t) - f(t+1)\big)dt = \int_1^2 tf(t)dt - \int_x^{x+1} tf(t)dt + \int_2^{x+1} f(t)dt$ donc on parvient à $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\big(f(t) - f(t+1)\big)dt = \int_1^2 tf(t)dt + \int_2^{+\infty} f(t)dt$.

b. D'après Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}dx$ converge et d'après **a.**, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \ln(2) + \frac{1}{2}$ si $\alpha = 2$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha}\right)dx = \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha} + \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ sinon.

1.41 La fonction $f :]0; 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et négative sur $]0; 1[$ et se prolonge par continuité en 1 avec $f(1) = 0$ car $\ln(x) \underset{1^-}{\sim} x - 1$ donc $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{x-1}{(1+x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{-\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}}$. De plus, au voisinage de 0, $f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Au final, d'après les intégrales de Riemann ($\frac{1}{2} < 1$), f est bien intégrable sur $]0; 1[$ ce qui prouve la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f$.

La fonction $\sin$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $]0; 1[$, ce qui prouve par changement de variable que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}\cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin\theta)}{1+\sin\theta}d\theta$.

Pour reconnaître le changement de variable proposé, qui est valide car $\theta \mapsto \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]0; 1[$ et que la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{(1+t)^2}\ln\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ est continue sur

$]0;1[$, on transforme I par trigonométrie en $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}\right) \frac{1}{1+\frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}} d\theta$ ce qui s'écrit aussi $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\ln\left(\frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}\right) \frac{1}{1+\tan^2(\theta/2)+2\tan(\theta/2)} \times \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta$. Par théorème de changement de variable, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} \ln\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$. On pose alors $u(t) = \ln\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$ et $v(t) = 2 - \frac{2}{1+t} = \frac{2t}{1+t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées car $u(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$ et $v(t) \underset{0}{\sim} 2t$. Comme $u(1)v(1) = 0$, par intégration par parties, comme $u'(t) = \dfrac{(1-t^2)}{t(1+t^2)}$ et $v'(t) = \dfrac{2}{(1+t)^2}$, il vient $I = -\displaystyle\int_0^1 \frac{2(1-t)}{(1+t^2)} dt = -2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{2tdt}{1+t^2} = \Big[\ln(1+t^2) - 2\,\mathrm{Arctan}(t) - \Big]_0^1 = \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim -0.87$.

1.4 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

1.42 Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, $F_x : y \mapsto \displaystyle\int_x^y e^{t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'_x(y) = e^{y^2} \geqslant 1$. Donc F_x est de classe C^∞, strictement croissante. $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} F_x(y) = +\infty$ car $\forall y \geqslant x,\ F_x(y) \geqslant \displaystyle\int_x^y dt = y - x$. Si $y \leqslant x$, $F_x(y) \leqslant y - x$ donc $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} F_x(y) = -\infty$. $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donc bijective : $\exists! y = f(x) \in [x;+\infty[,\ \displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1$.
Comme $f(x) \geqslant x$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si $x \geqslant 0$, $\big(f(x)-x\big)e^{x^2} \leqslant \displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt \leqslant \big(f(x)-x\big)e^{f(x)^2}$ par croissance de $t \mapsto e^{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $f(x) - x \leqslant e^{-x^2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-x\big) = 0$. L'inégalité précédente montre que $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} e^{-x^2}$ car $e^{-(f(x)^2-x^2)} \leqslant \dfrac{f(x)-x}{e^{-x^2}} \leqslant 1$ et $0 \leqslant f(x)^2 - x^2 \leqslant e^{-x^2}(2x + e^{-x^2})$.
Comme $\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1 \geqslant \int_x^{f(x)} dt = f(x) - x$, on a : $f(x) \leqslant x + 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
On montrerait de même que $f(x) - x$ est équivalent à e^{-x^2} quand x tend vers $-\infty$.
La fonction f est strictement croissante car si $x < x'$, on a $1 = \displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt > \int_{x'}^{f(x)} e^{t^2} dt$ donc $1 = \displaystyle\int_{x'}^{f(x')} e^{t^2} dt = F_{x'}(f(x')) > F_{x'}(f(x))$ et $F_{x'}$ étant strictement croissante, $f(x) < f(x')$.
Mieux, par Chasles : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_0(f(x)) - F_0(x) = 1$ donc $f(x) = F_0^{-1}(F_0(x)+1)$ et comme F_0^{-1} est de classe C^∞ car F'_0 ne s'annule pas, on a f de classe C^∞ par composée et on retrouve les limites en $\pm\infty$ déjà établies.
Par parité de $t \mapsto e^{t^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = \int_{-f(x)}^{-x} e^{t^2} dt = 1$ donc $f(-f(x)) = -x$. Si le point de coordonnées $(x, f(x))$ appartient au graphe de la fonction f, le point de coordonnées $(-f(x), -x)$ aussi : le graphe de la fonction f est symétrique (par une symétrie orthogonale) par rapport à la droite $y + x = 0$.

1.43 **a.** Si $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{x+\sin^2(t)}$ est continue sur $\left[0;\dfrac{1}{x}\right]$ donc $F(x)$ existe. Si $0 < x < y$, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^{1/y} \frac{dt}{x+\sin^2(t)} + \int_{1/y}^{1/x} \frac{dt}{x+\sin^2(t)} \geqslant \int_0^{1/y} \frac{dt}{x+\sin^2(t)} \geqslant \int_0^{1/y} \frac{dt}{y+\sin^2(t)}$ donc F est décroissante.
b. On a $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x+\sin^2(t)} \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc, en intégrant $\dfrac{1}{x(x+1)} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et on a même l'équivalent $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Par minoration, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.
c. On prend, pour $x > 0$, n_x tel que $n_x\pi \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant (n_x+1)\pi$ ce qui se traduit par $n_x = \left\lfloor \dfrac{1}{x\pi} \right\rfloor$. Alors, par π-périodicité de l'intégrande et Chasles, on a $\left| F(x) - n_x \displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{x+\sin^2(t)} \right| \leqslant \int_{n_x\pi}^{1/x} \frac{dt}{x+\sin^2(t)} \leqslant \frac{\pi}{x}$.

$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{x+\sin^2(t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{2dt}{x+\sin^2(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{x(1+u^2)+u^2} = 2\Big[\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{Arctan}\Big(\sqrt{\frac{1+x}{x}}u\Big)\Big]_0^{+\infty}$ donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{x+\sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$ car $\sin(\pi-t)=\sin(t)$ et grâce au changement de variable $u=\tan(t)$.
Ainsi : $F(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ car $\dfrac{\pi}{x}\underset{0}{=}o\Big(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\Big)$.

1.44 **a.** Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. Alors $\forall x>0,\ g(x)=\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ donc, comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F'=f$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=F'(0)=f(0)$.

On dérive $g(x)=\dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ pour obtenir : $\forall x>0,\ g'(x)=-\dfrac{F(x)-F(0)}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-g(x)}{x}$.

Avec $0<a<b$, on a par IPP, en posant $u(t)=g^2(t)$ et $v(t)=t$, u et v de classe C^1 sur $[a;b]$ d'où : $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt=[tg^2(t)]_a^b-2\int_a^b (f(t)-g(t))g(t)dt$. Ainsi : $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt=2\int_a^b f(t)g(t)dt+ag^2(a)-bg^2(b)$.

b. Grâce à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$. On le reporte ci-dessus : $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt\leqslant 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}+ag^2(a)-bg^2(b)\leqslant 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}+ag^2(a)$.

c. • On a un double produit : $\displaystyle\int_a^b g^2(t)dt-2\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}+\int_a^b f^2(t)dt\leqslant ag^2(a)+\int_a^b f^2(t)dt$ ce qui équivaut à $\displaystyle\Bigg(\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}-\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\Bigg)^2\leqslant ag^2(a)+\int_a^b f^2(t)dt$. En passant à la racine, comme $\displaystyle\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}-\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\leqslant\left|\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}-\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\right|$ et $\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt\leqslant\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ par intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}_+$, on a $\displaystyle\sqrt{\int_a^b g(t)^2dt}\leqslant\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2dt}+\sqrt{ag(a)^2+\int_0^{+\infty} f(t)^2dt}$.

On fait tendre a vers 0 (on le peut) : $\displaystyle\sqrt{\int_0^b g(t)^2dt}\leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2dt}$. Ainsi $b\mapsto\displaystyle\int_0^b g(t)^2dt$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$: g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
En passant à la limite quand $b\to+\infty$: $\displaystyle\sqrt{\int_0^{+\infty} g(t)^2dt}\leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2dt}$.

• On peut passer à la limite quand $a\to 0^+$ dans la relation de **a.** : $\displaystyle\int_0^b g^2(t)dt=2\int_0^b f(t)g(t)dt-bg^2(b)$.
Comme f et g sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}_+$, on sait qu'alors fg est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ convergent ce qui montre l'existence de $\lim\limits_{b\to+\infty} bg^2(b)=\ell\in\mathbb{R}_+$. Si on avait $\ell>0$, alors on aurait $g^2(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ell}{x}$ ce qui contredit l'intégrabilité de g^2 sur $\mathbb{R}_+$ par critère de RIEMANN. Ainsi $\lim\limits_{b\to+\infty} bg^2(b)=0$ et en passant à la limite quand b tend vers $+\infty$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)dt=2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$.

1.45 **a.** Bien sûr que non, on a vu dans le cours un contre-exemple d'une fonction continue par morceaux, positive, intégrable et qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

b. Avec $\sin(x-t)=\sin(x)\cos(t)-\cos(x)\sin(t)$ et la linéarité de l'intégrale, comme les fonctions sont toutes continues sur le segment $[0;x]$, $\forall x\geqslant 0,\ g(x)=f(x)+\sin(x)\displaystyle\int_0^x\cos(t)a(t)f(t)dt-\cos(x)\int_0^x\sin(t)a(t)f(t)dt$.
Comme $\cos a\ f$ et $\sin a\ f$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la dérivée de fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x\cos(t)a(t)f(t)dt$ est $x\mapsto\cos(x)a(x)f(x)$, et $\displaystyle\Big(\int_0^x\sin(t)a(t)f(t)dt\Big)'=\sin(x)a(x)f(x)$. Par opérations et simplifications, $g'(x)=f'(x)+\cos(x)\displaystyle\int_0^x\cos(t)a(t)f(t)dt+\sin(x)\int_0^x\sin(t)a(t)f(t)dt$. Puis,

$g''(x) = f''(x) - \sin(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt + \cos^2(x)a(x)f(x) + \sin^2(x)(x)f(x)$ donc $g''(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + a(x)f(x) = -g(x)$ donc $g'' + g = 0 \ \ (E)$ sur $\mathbb{R}_+$.

c. Les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}_+$ de cette équation différentielle (E) sont les fonctions g telles que $\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \geqslant 0,\ g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ donc $|g| \leqslant |A| + |B| = C$ par exemple et g est bornée. Comme $f(x) = g(x) - \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$, en passant aux valeurs absolues avec l'inégalité triangulaire, on obtient, $\forall x \geqslant 0,\ |f(x)| \leqslant |g(x)| + \displaystyle\int_0^x |\sin(x-t)||a(t)||f(t)|dt \leqslant C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$ car $|\sin| \leqslant 1$.

d. Posons $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x |a(t)f(t)|dt$, comme la fonction $|a|\,|f|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = |a(x)||f(x)| \leqslant C|a(x)| + |a(x)|h(x)$ d'après la question **c.**. En notant $A(x) = \displaystyle\int_0^x |a(t)|dt$, on a $\big(e^{-A(x)}h(x)\big)' \leqslant C|a(x)|e^{-A(x)} = C\big(-e^{-A(x)}\big)'$. On intègre cette inégalité entre 0 et x pour avoir $e^{-A(x)}h(x) \leqslant C\big(1 - e^{-A(x)}\big) \leqslant C$. Alors, on peut majorer $\forall x \geqslant 0,\ h(x) \leqslant Ce^{A(x)}$ et comme a est intégrable, A est croissante (car $A' = |a| \geqslant 0$) et possède une limite finie $C\exp\Big(\displaystyle\int_0^{+\infty} |a(t)|dt\Big)$ en $+\infty$ donc A est bornée sur $\mathbb{R}_+$, d'où h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|h| \leqslant Ce^A$. Enfin, f est aussi bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|f| \leqslant C + h$.

Toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (E) sont des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$ si a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1.46 **a.** $\varphi_\alpha : t \mapsto \dfrac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_\alpha(t) = +\infty$, si $\alpha = 0$, $\varphi_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ divergent car $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ (Riemann).

De plus, si $\alpha > 0$, on a $\varphi_\alpha(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ et $\varphi_\alpha(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent.

b. Pour $\alpha > 0$, on effectue le changement de variable $x = \alpha t$ (avec $t \to \alpha t$ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $[1;+\infty[$ dans $[\alpha;+\infty[$) dans les deux intégrales pour avoir $I(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ et $J(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$. Alors $J(\alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ avec le changement de variable $x = u^2$.

Par une simple IPP, comme $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur $[\alpha;+\infty[$ et que le crochet converge :

$\sqrt{\alpha}\,I(\alpha) = \Big[-\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\Big]_\alpha^{+\infty} - \displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{2x\sqrt{x}}dx$ avec $\left|\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{2x\sqrt{x}}dx\right| \leqslant \dfrac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} e^{-x}dx = \dfrac{e^{-\alpha}}{2\alpha\sqrt{\alpha}}$.

Comme $\Big[\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\Big]_\alpha^{+\infty} = \dfrac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ et $\dfrac{e^{-\alpha}}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\Big)$, il vient $\sqrt{\alpha}\,I(\alpha) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ donc $I(\alpha) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.

1.47 **a.** D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \cos(x-t)f(t)$ est continue sur $[0;x]$ donc le réel $u(f)(x)$ existe bien (intégrale d'une fonction continue sur un segment). La fonction $u(f)$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, puisque par trigonométrie on a $\cos(x-t) = \cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)$, on peut écrire par linéarité de l'intégrale que $\forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \cos(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ ce qui garantit que $u(f)$ est continue car les fonctions $t \mapsto \cos(t)f(t)$ et $t \mapsto \sin(t)f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ ce qui montre que les fonctions $t \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)f(t)dt$ et $t \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ sont aussi continues sur $\mathbb{R}$ (elles sont d'ailleurs même de classe C^1, voir **b.**). Enfin la linéarité de u provient de celle de l'intégrale, il suffit de l'écrire.

Par conséquent, u est un endomorphisme de E.

b. $t \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)f(t)dt$ et $t \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ étant respectivement les primitives s'annulant en 0 des fonctions $t \mapsto \cos(t)f(t)$ et $t \mapsto \sin(t)f(t)$ par le théorème fondamental de l'intégration, et puisque d'après **a.** on a $\forall x \in \mathbb{R},\ u(f)(x) = \cos(x)\displaystyle\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt$, la fonction $u(f)$ est, par opérations, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $u(f)'(x) = f(x) - \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ car $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$. Ainsi, u n'est pas surjective car les fonctions continues qui ne sont pas de classe C^1 (comme la valeur absolue par exemple) n'auront pas d'antécédent par u. On peut aussi constater que $u(f)(0) = 0$ ce qui montre que les fonctions dont la valeur en 0 n'est pas nulle ne peuvent pas être dans $\mathrm{Im}(u)$ non plus.

c. Si $f \in \mathrm{Ker}(u)$, $u(f) = 0$ donc $u(f)' = 0$ d'où $f(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt$ (1) pour tout réel x d'après le calcul précédent. Ainsi, comme avant, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver une fois de plus, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)dt = u(f)(x) = 0$ après simplifications. Ainsi, f est constante car $\mathbb{R}$ est un intervalle. Mais comme $f(0) = 0$ par la relation (1) ci-dessus, f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Ainsi, u est injective.

1.48 **a.** Si $x > a$, on a $\forall t \geqslant 0$, $|f(t)e^{-xt}| = |f(t)|e^{-xt} \leqslant Ce^{at}e^{-xt} = Ce^{-(x-a)t}$ et $t \mapsto e^{-(x-a)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $x - a > 0$ (fonction de référence). Ainsi, par comparaison, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ est absolument convergente donc convergente et $F(x)$ existe.

b. Comme $a \leqslant 0$, F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **a.**. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-1) = 0$ ce qui nous incite à écrire, pour $x > 0$, $xF(x) = x\int_0^{+\infty} (f(t)-1+1)e^{-xt}dt = x\int_0^{+\infty} (f(t)-1)e^{-xt}dt + x\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ ce qui donne $xF(x) = x\int_0^{+\infty} (f(t)-1)e^{-xt}dt + x\Big[-\dfrac{e^{-xt}}{x}\Big]_0^{+\infty} = x\int_0^{+\infty} (f(t)-1)e^{-xt}dt + 1$. Par conséquent, on a l'expression plus compacte $xF(x) - 1 = \int_0^{+\infty} (f(t)-1)e^{-xt}xdt$.

Revenons à la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $m \geqslant 0$ tel que $\forall x \geqslant m$, $|f(x)-1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On peut donc écrire avec Chasles $xF(x) - 1 = \int_0^m (f(t)-1)e^{-xt}xdt + \int_m^{+\infty} (f(t)-1)e^{-xt}xdt$. Comme f est continue sur le segment $[0;m]$, $f-1$ est bornée (par M) sur ce segment donc, par inégalités triangulaire sur les réels et sur les intégrales : $|xF(x)-1| \leqslant Mx\int_0^m e^{-xt}dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_m^{+\infty} e^{-xt}xdt \leqslant M(1-e^{-xm}) + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}xdt$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to 0^+} M(1-e^{-xm}) = 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0;\alpha]$, $0 \leqslant M(1-e^{-xm}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit, puisque $\int_0^{+\infty} e^{-xt}xdt = 1$, que si $x \in]0;\alpha]$, on a $|xF(x)-1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0^+} xF(x) = 1$.

Autre méthode : On pouvait aussi le faire avec le théorème de convergence dominée à paramètre continu qu'on verra plus tard dans l'année. En effet, en posant $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a $xF(x) = \int_0^{+\infty} f\Big(\dfrac{u}{x}\Big)e^{-u}du$ pour $x > 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie en $+\infty$, il est classique que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(H_1) $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f\Big(\dfrac{u}{x}\Big)e^{-u} = h(u) = e^{-u}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(H_2) $\forall x \in]a;+\infty[$, la fonction $u \mapsto f\Big(\dfrac{u}{x}\Big)e^{-u}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, h aussi.

(H_3) $\forall (u,x) \in \mathbb{R}_+ \times]a;+\infty[$, $\Big|f\Big(\dfrac{u}{x}\Big)e^{-u}\Big| \leqslant ||f||_{\infty,\mathbb{R}_+^*}e^{-u} = \psi(u)$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème évoqué, $\lim\limits_{x\to 0^+} xF(x) = \int_0^{+\infty} h(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-u}du = 1$.

1.49 La fonction $g : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est continue, positive sur $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big[$. De plus, $\forall x \in J = \Big]0;\dfrac{\pi}{2}\Big[$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}$ donc, puisque $\tan(u) \underset{0}{=} u$, on a l'équivalent $g(x) \underset{\pi/2}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$ donc g est intégrable sur $\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big[$

par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\frac{1}{2} < 1$. Ainsi, $\int_0^{\pi/2} g(t)dt$ converge donc I existe.

La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est de classe C^1, bijective et strictement croissante de J dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\varphi'(x) = \frac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$. Comme on a $g(x) = \sqrt{\tan(x)} = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ en posant $f : u \mapsto \frac{2u^2}{1+u^4}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de changement de variable montre que, en posant $u = \sqrt{\tan(x)} = \varphi(x)$, on a la relation $I = \int_0^{+\infty} f(u)du$. Il y a maintenant deux méthodes :

(1) Par le changement de variable $u = \frac{1}{v} = \psi(v)$, comme ψ réalise une bijection C^1 strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}du = \int_{+\infty}^0 \frac{2(1/v)^2}{1+(1/v)^4}\left(-\frac{1}{v^2}\right)dv = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+v^4}dv$ après simplifications. Or $L = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{1+u^4}du = \Big[\mathrm{Arctan}(u^2)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. De plus, on peut décomposer le dénominateur avec les identités remarquables car $1+u^4 = (1+u^2)^2 - 2u^2 = (u^2-\sqrt{2}u+1)(u^2+\sqrt{2}u+1)$ ce qui nous incite à écrire $I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}du + \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{2}u}{1+u^4}du + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^4}du$ d'où $I+\sqrt{2}L+I = \int_0^{+\infty} \frac{2(u^2+\sqrt{2}u+1)}{(u^2-\sqrt{2}u+1)(u^2+\sqrt{2}u+1)}du$ donc, avec des techniques classiques, on obtient $I+\sqrt{2}L+I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2-\sqrt{2}u+1}du = \int_0^{+\infty} \frac{4}{(\sqrt{2}u-1)^2+1}du = 2\sqrt{2}\Big[\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}u-1)\Big]_0^{+\infty} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$. On en déduit que $I = \frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}L\right) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(2) Par une décomposition en éléments simples classique (mais hors programme en PSI) on arrive à la relation $\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2u-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{2u+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)$ donc $\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right) + \frac{1}{2(u^2-\sqrt{2}u+1)} + \frac{1}{2(u^2+\sqrt{2}u+1)}$ et, après calculs, $I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}u-1) + \mathrm{Arctan}(\sqrt{2}u+1)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

1.50 **a.** D'après le théorème de la limite monotone, la fonction h admet en $+\infty$ une limite ℓ finie ou $-\infty$ car elle est décroissante. Or $\int_0^{+\infty} h$ converge ce qui n'est possible que si $\ell = 0$. Ainsi, comme h est décroissante et de limite nulle en $+\infty$, elle ne peut être que positive sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour $t > 0$, comme h est positive, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante si $S_n = \sum_{k=0}^{n} h(kt)$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $t\,h(kt) = \int_{(k-1)t}^{kt} h(kt)du \leqslant \int_{(k-1)t}^{kt} h(u)du$ par croissance de l'intégrale car h est décroissante sur $[(k-1)t; kt]$. En sommant pour $k \in [\![1;n]\!]$ et par CHASLES, on obtient la majoration $tS_n = th(0) + t\sum_{k=1}^{n} h(kt) \leqslant th(0) + \int_0^{nt} h(u)du \leqslant t\,h(0) + \int_0^{+\infty} h(u)du$.

La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante et majorée donc elle converge, ce qui montre la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} h(nt)$.

1.51 Comme $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}$ est continue sur $[1; +\infty[$, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$ est équivalente à celle de $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$ de sorte que u_n est du signe de $(-1)^n$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc alternée. Avec $t = u + n\pi$, $u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{(u+n\pi)\ln(1+u+n\pi)}$.

Clairement $(u+n\pi)\ln(1+u+n\pi) \leqslant (u+(n+1)\pi)\ln(1+u+(n+1)\pi)$ donc la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et puisque $|u_n| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi\ln(1+n\pi)} \leqslant \frac{\pi}{n\pi\ln(1+n\pi)}$ en majorant brutalement, on en conclut que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Par le critère spéciale des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et on note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme mais aussi les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Soit $x \geqslant \pi$, si on note n_x le plus grand entier tel que $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$, on a d'après le relation de Chasles : $\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt = S_{n_x-1} + \int_{n_x\pi}^x \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$. Or $\lim_{x\to+\infty} n_x = +\infty$ car $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$ donc $\lim_{x\to+\infty} S_{n_x-1} = S$ et $\left| \int_{n_x\pi}^x \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt \right| \leqslant \frac{(x-n_x\pi)}{x\ln(1+x)} \leqslant \frac{\pi}{x\ln(1+x)}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. Par somme, $x \mapsto \int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$ admet une limite finie en $+\infty$ donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$ converge et $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt = S$.

On pouvait aussi poser $u(t) = \frac{1}{t\ln(1+t)}$ et $v(t) = -\cos(t)$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$. Comme $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$ et $\int_1^{+\infty} \cos(t)\Big(-\frac{1}{t^2\ln(1+t)} - \frac{1}{t(t+1)\ln(1+t)^2}\Big)dt$ sont de même nature. Or $g : t \mapsto -\frac{1}{t^2\ln(1+t)} - \frac{1}{t(t+1)\ln(1+t)^2}$ vérifie $g(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ ce qui justifie l'intégrabilité de g sur $[1;+\infty[$. Par conséquent $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t\ln(1+t)}dt$ converge.

Par contre, f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. En effet, on pose $u_n = \int_\pi^{n\pi} |f| = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)|dt$ et $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)| \geqslant \int_{k\pi+\pi/6}^{(k+1)\pi-\pi/6} |f(t)|dt \geqslant \frac{1}{2}\int_{k\pi+\pi/6}^{(k+1)\pi-\pi/6} \frac{1}{t\ln(1+t)}dt \geqslant \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{(k+1)\pi\ln((k+1)\pi)} = w_k$. Ainsi $u_n \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} w_k$ et la série $\sum_{k\geqslant 1} w_k$ diverge (séries de Bertrand car $w_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3k\ln(k)}$) par comparaison à une intégrale. Encore un cas de fonction non intégrable dont l'intégrale converge.

1.52 **a.** Par intégration par parties, comme f est de classe C^1 sur $[a;b]$ et que $\cos$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation $I_n = \big[-\frac{1}{n}\cos(nt)f(t)\big]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt$. Comme f' est continue sur le segment $[a;b]$, il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [a;b]$, $|f'(t)| \leqslant M$. Par inégalités triangulaires, on obtient $|I_n| \leqslant \frac{1}{n}\Big(|f(a)| + |f(b)| + (b-a)M\Big)$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (lemme de Riemann-Lebesgue).

b. Tout d'abord, $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. En posant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto 1-\cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par $1-\cos(t) \underset{+\infty}{=} O(1)$. Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ sont donc de même nature. Or $g : t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = \frac{1}{2}$ toujours car $1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ et $|g(t)| \leqslant \frac{2}{t^2}$ ce qui garantit son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge car elle converge absolument, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge aussi et on admet que $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$ (Dirichlet).

c. La fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)^2}{n\sin(t)^2}$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant

$f_n(0)=n$ car $\sin(nt)\underset{0}{\sim}nt$ et $\sin(t)\underset{0}{\sim}t$ donc $f_n(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{n^2t^2}{t^2}=n^2$. Ainsi, J_n est bien définie pour $n\in\mathbb{N}^*$. Or on sait que $\text{cotan}'(t)=-\dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et $\text{cotan}\,(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{t}$ donc, en posant $u=-\text{cotan}$ et $v:t\mapsto\sin(nt)^2$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et comme $\lim\limits_{t\to0^+}\text{cotan}\,(t)\sin(nt)^2=0$, par intégration par parties, on a $J_n=\left[-\dfrac{\text{cotan}\,(t)\sin(nt)^2}{n}\right]_0^{\pi/2}+\displaystyle\int_0^{\pi/2}2\sin(nt)\cos(nt)\text{cotan}\,(t)dt=\int_0^{\pi/2}\sin(2nt)\text{cotan}\,(t)dt$.
L'équivalent de cotan en 0 nous incite à écrire $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(2nt)\Big(\text{cotan}\,(t)-\frac{1}{t}\Big)dt+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)}{t}dt$ (les deux intégrales convergent car $\dfrac{\sin(2nt)}{t}\underset{0}{\sim}2n$). Comme on se rappelle que $\tan(t)\underset{0}{=}t+\dfrac{t^3}{3}+o(t^3)$, on a $\text{cotan}\,(t)-\dfrac{1}{t}\underset{0}{=}\dfrac{1}{t+\frac{t^3}{3}+o(t^3)}-\dfrac{1}{t}\underset{0}{=}\dfrac{1}{t}\Big(\dfrac{1}{1+\frac{t^2}{3}+o(t^2)}-1\Big)\underset{0}{=}\dfrac{1}{t}\big(1-\dfrac{t^2}{3}-1+o(t^2)\big)\underset{0}{=}-\dfrac{t}{3}+o(t)$.
Ainsi, la fonction $h:t\mapsto\text{cotan}\,(t)-\dfrac{1}{t}$ se prolonge par continuité (avec $h(0)=0$) en une fonction dérivable sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ avec $h'(0)=-\frac{1}{3}$. Comme $h'(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{\sin^2(t)}$, le calcul analogue $\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{\sin^2(t)}\underset{0}{=}\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^4)}\underset{0}{=}\dfrac{1}{t^2}\Big(1-\dfrac{1}{1-\frac{t^2}{3}+o(t^2)}\Big)\underset{0}{=}\dfrac{1}{t^2}\Big(1-(1+\dfrac{t^2}{3})+o(t^2)\Big)\underset{0}{=}-\dfrac{1}{3}+o(1)$ nous permet de conclure que h est de classe C^1 sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ car $\lim\limits_{t\to0^+}h'(t)=-\dfrac{1}{3}=h'(0)$. La première question nous apprend alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\Big(\text{cotan}\,(t)-\frac{1}{t}\Big)\sin(2nt)dt=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}h(t)\sin(2nt)dt=0$.
De plus, par le changement de variable $t=\varphi(u)=\dfrac{u}{2n}$, comme φ réalise une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0;n\pi]$ dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a la relation $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)}{t}dt=\int_0^{n\pi}\frac{\sin(u)}{u}du$ et cette quantité tend vers A quand n tend vers $+\infty$ d'après la question **b.**. Au final, en sommant, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=\dfrac{\pi}{2}$.
En fait, la suite $(J_n)_{n\geqslant1}$ est constante et elle vaut $\frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire !

1.53 **a.** f est définie et dérivable par opérations sur $D=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big]2k\pi-\frac{\pi}{2};2(k+1)\pi-\frac{\pi}{2}\Big[$ (là ou sin ne vaut pas -1).
Pour $x\in D$, comme $\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}=\dfrac{2}{1+\sin(x)}-1$, $f'(x)=\Big(-\dfrac{2\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}\Big)\times\dfrac{(1+\sin(x))^2}{(1-\sin(x))^2+(1+\sin(x))^2}$ ce qui donne après simplifications la relation $f'(x)=-\dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}=(-\text{Arctan}(\sin(x)))'$. Ainsi, la fonction $x\mapsto f(x)+\text{Arctan}(\sin(x))$ est constante sur chaque intervalle du type $I_k=\Big]2k\pi-\frac{\pi}{2};2(k+1)\pi-\frac{\pi}{2}\Big[$.
Comme f et $x\mapsto\text{Arctan}(\sin(x))$ sont 2π-périodiques, il suffit de trouver cette constante sur $I_0=\Big]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\Big[$.
Or $f(0)+\text{Arctan}(\sin(0))=\frac{\pi}{4}$ donc $\forall x\in D,\ f(x)=\frac{\pi}{4}-\text{Arctan}(\sin(x))$.

1.54 **a.** La fonction $g:t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}f$ converge pour $x>0$ car $g(t)\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées et que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge d'après RIEMANN. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}g(t)dt-\int_1^x g(t)dt$ et que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ f'(x)=-g(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x}$.
b. Si $x>0$, on pose $u(t)=-e^{-t}$ et $v(t)=\dfrac{1}{t}$, comme les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x;+\infty[$

et que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient par intégration par parties la relation $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{t^2}$. Or, comme $\forall t \geqslant x$, $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, par croissance et linéarité de l'intégrale, on a $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{t^2} \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{x^2} = \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{e^{-x}}{x}\Big)$. On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Si $x \in]0;1[$, on écrit $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ et, comme $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$, ceci nous incite à écrire la relation $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt + \int_x^1 \frac{1}{t}dt = -\ln(x) + \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt$. Par convexité de la fonction $\exp$, on a $e^u \geqslant 1+u$ donc $\forall t \in]0;1]$, $0 \leqslant 1-e^{-t} \leqslant t$ donc $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}-1}{t} \leqslant 1$. Ainsi, $0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt \leqslant 1-x \leqslant 1$ donc $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt \underset{0}{=} O(1)$. Ainsi, $f(x) \underset{0}{=} -\ln(x) + O(1) \underset{0}{=} f(x) + o(\ln(x))$ ce qui signifie que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

c. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ d'après la question précédente donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. De plus, les fonctions $u = f$ et $v = \mathrm{id}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $xf(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ et $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$ d'après **b.** donc $\lim\limits_{x\to0^+} u(x)v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées ce qui montre, par intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.
Avec le théorème de FUBINI (hors programme), on aurait pu utiliser les intégrales doubles pour avoir plus simplement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\Big)dx = \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^t \frac{e^{-t}}{t}dx\Big)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.

1.55 Les solutions réelles de l'équation homogène (E_0) : $y' - y = 0$ sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et elles sont définies sur $[1;+\infty[$ en entier. On effectue une variation de la constante en cherchant les solutions de (E) sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^x$ avec $\lambda : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable. En remplaçant dans (E), on parvient à $y' - y = \dfrac{1}{x} \iff \lambda'(x)e^x = \dfrac{1}{x} \iff \lambda'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$. On prend par exemple $\lambda : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt$.
Ainsi, les solutions de (E) sur $[1;+\infty[$ forment un espace affine et s'écrivent $y_\alpha : x \mapsto \Big(\alpha + \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt\Big)e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ donc, par comparaison, g est intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha + \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt = \alpha + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$. Pour que y_α soit bornée, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, il faut absolument que $\alpha + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = 0$, ce qui impose $\alpha = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = \alpha_0$. Seule la fonction $b = y_{\alpha_0} : x \mapsto \Big(-\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt\Big)e^x = -e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ (par la relation de CHASLES) est éventuellement bornée parmi les solutions de (E).
Comme $\forall x \geqslant 1$, $|b(x)| = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \leqslant e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}dt = \frac{1}{x} \leqslant 1$ car $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x}$ si $t \geqslant x$, cette fonction b est bien bornée sur $[1;+\infty[$. Conclusion : (E) a une seule solution bornée qui est b et elle tend vers 0 en $+\infty$.

1.56 On peut se restreindre à $0 < x < y$ car échanger x et y dans cette inégalité ne change rien.
Pour $y > 0$, $p \geqslant 0$, on étudie alors la fonction $f_{p,y} : x \mapsto |x-y|^p - |x^p - y^p| = (y-x)^p - y^p + x^p$ sur l'intervalle $[0;y]$. Cette fonction est dérivable et $f'_{p,y}(x) = -p(y-x)^{p-1} + px^{p-1}$. Traitons alors trois cas :
- si $p = 1$, $f_{p,y}$ est de dérivée nulle donc constante sur cet intervalle et l'inégalité est établie.
- si $0 < p < 1$, comme $t \mapsto t^{p-1}$ est décroissante et que $f'_{p,y}\big(\frac{y}{2}\big) = 0$, la fonction $f_{p,y}$ est croissante sur $\big]0;\frac{y}{2}\big[$

et décroissante sur $\left]\frac{y}{2};y\right[$. Comme $f_{p,y}(0)=f_{p,y}(y)=0$, la fonction $f_{p,y}$ est positive sur $[0;y]$.

• si $p>1$, comme $t\mapsto t^{p-1}$ est croissante et que $f'_{p,y}\left(\frac{y}{2}\right)=0$, la fonction $f_{p,y}$ est décroissante sur $\left]0;\frac{y}{2}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{y}{2};y\right[$. Comme $f_{p,y}(0)=f_{p,y}(y)=0$, la fonction $f_{p,y}$ est négative sur $[0;y]$.

On en déduit bien que $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ |x^p-y^p|\leqslant|x-y|^p\right)\Longleftrightarrow p\leqslant 1$.

1.57 On pose $u=f^2$ et $v:t\mapsto t$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[0;1]$ par hypothèse. Par conséquent, par intégration par parties, on obtient $\int_0^1 f(t)^2dt=[tf^2(t)]_0^1-2\int_0^1 tf'(t)f(t)dt=-2\int_0^1 tf'(t)f(t)dt$ car $f(1)=0$. Par l'inégalité triangulaire, on a $\int_0^1 f(t)^2dt\leqslant 2\int_0^1|f'(t)||f(t)|dt$ puis, par celle de Cauchy-Schwarz, on trouve $\int_0^1 f(t)^2dt\leqslant 2\sqrt{\int_0^1 t^2f'^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$ (1). Il y a maintenant deux cas :

- si $\int_0^1 f(t)^2dt=0$, on a bien $\int_0^1 f(t)^2dt\leqslant 4\int_0^1 t^2f'(t)^2dt$.
- si $\int_0^1 f(t)^2dt>0$, en divisant par $\sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$ dans (1), on a $\sqrt{\int_0^1 f(t)^2dt}\leqslant 2\sqrt{\int_0^1 t^2f'^2(t)dt}$ puis le résultat de l'énoncé résultat en élevant au carré cette inégalité.

Dans tous les cas, on a bien $\int_0^1 f(t)^2dt\leqslant 4\int_0^1 t^2f'(t)^2dt$ si f est de classe C^1 sur $[0;1]$ et $f(1)=0$.

Pour le cas d'égalité, on doit avoir égalité dans Cauchy–Schwarz ce qui donne l'existence d'une constante λ telle que $\forall t\in[0;1],\ tf'(t)=\lambda f(t)$ (E) car les deux fonctions $t\mapsto tf'(t)$ et $t\mapsto f(t)$ doivent être colinéaires. De plus, comme $\int_0^1 f(t)^2dt\geqslant 0$, on doit avoir $-2\int_0^1 tf'(t)f(t)dt\geqslant 0$ ce qui impose $\lambda\leqslant 0$. Ainsi, en résolvant l'équation différentielle (E), on a $\forall t\in[0;1],\ f(t)=\alpha t^\lambda$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$ et les conditions "f de classe C^1 et $f(1)=0$" imposent que $f=0$. On n'a égalité dans cette inégalité que pour f égale à la fonction nulle.

1.58 **a.** La fonction nulle (qui est bien continue) appartient clairement à W_h qui est donc non vide.
Soit $(f,g)\in W_h^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\lambda f+g\in W_h$ car, par linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$\int_{x+h}^{x+2h}(\lambda f+g)(t)dt=\lambda\int_{x+h}^{x+2h}f(t)dt+\int_{x+h}^{x+2h}g(t)dt=2\lambda\int_x^{x+h}f(t)dt+2\int_x^{x+h}g(t)dt=2\int_x^{x+h}\lambda f+g$.
Ainsi, W_h est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.
Pour $\alpha>0$, soit la fonction $p_\alpha:t\mapsto\alpha^t$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors, avec le changement de variable $t=u+h$, on a $p_\alpha\in W_h$ dès que $\alpha=2^{1/h}$. Ainsi $p_{2^{1/h}}\neq 0\in W_h$.
b. Toute fonction h-périodique d'intégrale nulle sur une période appartient à W_h car on aura alors la relation $\forall x\in\mathbb{R},\ 0=\int_{x+h}^{x+2h}f(t)dt=2\int_x^{x+h}f(t)dt=2\times 0=0$. En particulier $f_n:t\mapsto\sin\left(\frac{2n\pi t}{h}\right)$ est élément de W_h pour tout entier $n\geqslant 1$. Ces fonctions forment une famille libre, car ce sont des vecteurs propres pour la double dérivation, associés à des valeurs propres distinctes. Ou alors on écrit $\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_kf_k=0$, on dérive deux fois p fois et on a $\forall d\in[\![1;p]\!],\ \sum\limits_{k=1}^{p}k^{2d}\lambda_kf_k=0$. Si on considère le DL en 0 à l'ordre 1, on a donc $\forall d\in[\![1;p]\!],\ \sum\limits_{k=1}^{p}k^{2d+1}\lambda_k=0$. On en déduit que $\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0$ par un déterminant de Vandermonde.
c. Soit $f\in\bigcap\limits_{h>0}W_h$. Fixons $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$. Raisonnons sur $x,x+h,x+2h,x+3h,x+4h$ et posons $J_1=\int_x^{x+h}f$, $J_2=\int_{x+h}^{x+2h}f$, $J_3\int_{x+2h}^{x+3h}f$, $J_4=\int_{x+3h}^{x+4h}f$. On a $J_2=2J_1$ mais aussi $J_3=2J_2$ (poser $x'=x+h$) et de même $J_4=2J_3$. On applique la relation avec $h'=2h$ d'où $\int_{x+2h}^{x+4h}f=2\int_x^{x+2h}f$ soit encore $J_3+J_4=2(J_1+J_2)$ ce

qui donne $4J_1 + 8J_1 = J_1 + 2J_1$ donc $J_1 = 0$. Ainsi l'intégrale de f sur tout $[x; x+h]$ avec $h > 0$ est nulle. On en déduit que $f = 0$, soit par théorème fondamental, soit directement avec la continuité de f : si par exemple $f(x_0) > 0$ on construit un petit intervalle autour de x_0 sur lequel l'intégrale de f est strictement positive.

1.59 Méthode 1 : Soit $y \in \mathbb{R}$, si on écrit $z = 1 + iy = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ car $\mathrm{Re}(z) > 0$, on a donc $\rho\cos(\theta) = 1$ et $\rho\sin(\theta) = y$ donc $\tan(\theta) = y$ ce qui montre que $\mathrm{Arctan}(y) = \arg(z) = \arg(1+iy)$.
Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, x est solution de (E) si et seulement si $\arg\left(1+\frac{i}{1-x}\right)+\arg(1+ix)+\arg\left(1+\frac{i}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2}$ qui équivaut, par les propriétés de l'argument, à $\arg\left(\left(1+\frac{i}{1-x}\right)(1+ix)\left(1+\frac{i}{1+x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$. On doit donc trouver les réels $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ tels que $\left(1+\frac{i}{1-x}\right)(1+ix)\left(1+\frac{i}{1+x}\right)$ est imaginaire pur. Or $\left(1+\frac{i}{1-x}\right)(1+ix)\left(1+\frac{i}{1+x}\right) = \frac{-3x^2+i(2-x^3)}{1-x^2}$. Finalement : x est solution de $(E) \Longleftrightarrow x = 0$.

Méthode 2 : On constate que $x = 0$ est solution de (E). Si $x \neq 0$ est solution de (E), on applique $\tan$ à l'égalité $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x)$ et, comme on sait que $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$, on obtient $\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{1-\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$ ce qui se simplifie en $-\frac{2}{x^2} = \frac{1}{x}$ donc $x = -2$.
Réciproquement, comme $r = \mathrm{Arctan}(\frac{1}{3}) + \mathrm{Arctan}(-2) + \mathrm{Arctan}(-1) < 0$ donc $x = -2$ n'est pas solution de (E), en fait $r = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, la seule solution de (E) est $x = 0$.

1.60 La fonction $f : x \mapsto \frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(2x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par continuité de th. Or, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$ car $\mathrm{th}(t) \underset{0}{=} t + o(t)$ donc $\mathrm{th}(3x) - \mathrm{th}(2x) \underset{0}{=} 3x - 2x + o(x)$ puis $\mathrm{th}(3x) - \mathrm{th}(2x) \underset{0}{\sim} x$.
De plus, $\mathrm{th}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}} = 1 - \frac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$. Ainsi, $1 - \mathrm{th}(t) = \frac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-2t}$. Par conséquent, $f(x) = \frac{1-\mathrm{th}(2x)-(1-\mathrm{th}(3x))}{x} \underset{+\infty}{=} \frac{2e^{-4x}-2e^{-6x}+o(e^{-4x})+o(e^{-6x})}{x} \underset{+\infty}{=} \frac{2e^{-4x}+o(e^{-4x})}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2e^{-4x}}{x}$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x}) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN d'où $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(2x)}{x}dx$ converge.
De plus, $\int_0^u \frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(2x)}{x}dx = \int_0^u \frac{\mathrm{th}(3x)}{x}dx - \int_0^u \frac{\mathrm{th}(2x)}{x}dx$ (les deux convergent). On pose $y = 3x$ dans la première et $y = 2x$ dans la seconde et $\int_0^u \frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(2x)}{x}dx = \int_0^{3u} \frac{\mathrm{th}(y)}{y}dy - \int_0^{2u} \frac{\mathrm{th}\,y}{y}dy = \int_{2u}^{3u} \frac{\mathrm{th}\,x}{x}dx$.
Or $\ln\left(\frac{3}{2}\right)\mathrm{th}(2u) = \mathrm{th}(2u)\int_{2u}^{3u}\frac{dx}{x} \leqslant \int_{2u}^{3u}\frac{\mathrm{th}\,x}{x}dx \leqslant \mathrm{th}(3u)\int_{2u}^{3u}\frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\mathrm{th}(3u)$ car th est croissante.
Par encadrement, $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(2x)}{x}dx = \lim\limits_{u\to+\infty}\int_{2u}^{3u}\frac{\mathrm{th}\,x}{x}dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ car $\lim\limits_{y\to+\infty}\mathrm{th}(y) = 1$.

1.61 Comme la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue (et même de classe C^∞) sur $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$, la fonction f est bien définie sur D car pour tout réel x appartenant à D, le segment $\widetilde{[x;x^2]}$ est inclus dans D.
Soit G une primitive de g sur D, alors $f(x) = [G(t)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x)$ donc f est C^∞ sur D car G l'est.
Si $x \in]0;1[$, on a $0 < x^2 < x < 1$, g est décroissante sur $[x^2;x]$ et $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, donc on peut encadrer $\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)}dt = \frac{x-x^2}{2\ln(x)} \leqslant \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)} = -f(x) \leqslant \frac{x-x^2}{\ln(x)} = \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(x)}dt$. Or $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-x^2}{\ln(x)} = 0$ donc, par encadrement, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
Comme $g(t) \underset{t\to1}{\sim} \frac{1}{t-1}$, on est conduit à transformer $f(x)$ en $f(x) = \int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt + \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right)dt$. Or

$\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(x+1)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1. En posant $h : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1}$, on a $h(1+u) \underset{0}{=} \dfrac{1}{u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)} - \dfrac{1}{u} \underset{0}{=} \dfrac{1}{u}\left(\dfrac{1}{1 - \frac{u}{2} + o(u)} - 1\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{u}\left(1 + \dfrac{u}{2} + o(u) - 1\right) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} + o(1)$ donc h se prolonge par continuité en 1 en posant $h(1) = \dfrac{1}{2}$. Ceci signifie que h étant maintenant continue sur le segment $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$ (par exemple), y est bornée (par M). Pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, on a donc $\left|\displaystyle\int_x^{x^2} h(t)dt\right| \leqslant M|x^2 - x| \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to1} \int_x^{x^2} h(t)dt = 0$ puis, par somme, $\displaystyle\lim_{x\to1} f(x) = \ln(2)$. Par conséquent, la fonction f prolongée par $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Plus simplement, en écrivant $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{tdt}{t\ln(t)}$, on pouvait aussi encadrer par exemple pour $x \in]0;1[$, $x^2 \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} \leqslant f(x) \leqslant x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$ car on a l'inégalité $\forall t \in [x^2; x]$, $\dfrac{x^2}{t} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{x}{t}$, $\ln(t) < 0$ et $x > x^2$.
Si $x > 1$, comme $\forall t \in [x; x^2]$, $\dfrac{x^2}{t} \geqslant 1 \geqslant \dfrac{x}{t}$, l'inégalité devient $x^2 \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} \geqslant f(x) \geqslant x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.
Par encadrement, on peut prolonger f par continuité en 1 (à gauche et à droite) avec $f(1) = \ln(2)$ car $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} = [\ln|\ln(t)|]_x^{x^2} = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln x| = \ln(2)$.
D'après ce qui précède, f est C^1 sur D avec $f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ donc, classiquement, $\displaystyle\lim_{x\to1} f'(x) = 1$. Par le théorème de prolongement C^1, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(1) = 1$. De même, comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = 0$.
Puisque $f' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x > 1$, $f(x) \geqslant \dfrac{x^2 - x}{\ln(x^2)}$ donc, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La fonction f' est donc continue sur $[0;1]$ et vérifie $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ et $\forall x \in]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$. Ainsi, f est une primitive de la fonction continue $g : x \to \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ sur $[0;1]$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Donc $\displaystyle\int_0^1 g = f(1) - f(0) = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx = \ln(2)$.

1.62 **a.** Méthode 1 : Par le changement de variable $x = \ln(t)$ bijectif et C^1, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ a même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{ix}dx$ qui a elle-même la même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{ix}dx$ par continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto x^\alpha e^{ix}$. Or par une IPP simple, pour $X > 1$, on a $\displaystyle\int_1^X x^\alpha e^{ix}dx = \left[\frac{x^\alpha e^{ix}}{i}\right]_1^X - \frac{\alpha}{i}\int_1^X x^{\alpha-1}e^{ix}dx$. On continue jusqu'à avoir $F(X) = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{ix}dx = \left(X^\alpha - \frac{\alpha}{i}X^{\alpha-1} + ...\right)e^{iX} + \lambda \pm \frac{1}{i^n}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)\int_1^X x^{\alpha-n}e^{ix}dx$. Si $n = \lfloor\alpha\rfloor + 2$, $\alpha - n > 1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha-n}e^{ix}dx$ converge, ainsi $F(X) \underset{+\infty}{\sim} X^\alpha e^{iX}$ donc $|F(X)| \underset{+\infty}{\sim} X^\alpha \to +\infty$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge.
Méthode 2 : Si cette intégrale convergeait, ses parties réelle et imaginaire convergeraient aussi. En posant $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{(\ln(t))^\alpha}{t}\sin(\ln(t))dt$, on aurait $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^\alpha}{t}\sin(\ln(t))dt$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left[e^{2p\pi+\frac{\pi}{6}}; e^{2p\pi+\frac{5\pi}{6}}\right] \Longrightarrow \ln(t) \in \left[2p\pi + \frac{\pi}{6}; 2p\pi + \frac{5\pi}{6}\right] \Longrightarrow \sin(\ln(t)) \geqslant \frac{1}{2}$, $\ln(t) \geqslant 2p\pi$ et $\frac{1}{t} \geqslant e^{-(2p+1)\pi}$.
Alors $F\left(e^{2p\pi+\frac{5\pi}{6}}\right) - F\left(e^{2p\pi+\frac{\pi}{6}}\right) = \displaystyle\int_{e^{2p\pi+\frac{\pi}{6}}}^{e^{2p\pi+\frac{5\pi}{6}}} f(t)dt \geqslant \frac{1}{2}\left(e^{2p\pi+\frac{5\pi}{6}} - e^{2p\pi+\frac{\pi}{6}}\right)(2p\pi)^\alpha e^{-(2p+1)\pi} = a_p$. Or, comme $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} a_p = +\infty$ ce qui est contradictoire avec $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} F\left(e^{2p\pi+\frac{5\pi}{6}}\right) - F\left(e^{2p\pi+\frac{\pi}{6}}\right) = L - L = 0$.
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

b. De la même manière, si cette série convergeait, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln(n))^\alpha}{n}\sin(\ln(n))$ convergerait aussi. En notant $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln(k))^\alpha}{k}\sin(\ln(k))$, il existerait $S\in\mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty}S_n=S$. Or, si $p\in\mathbb{N}^*$, considérons $u_p=\left\lfloor e^{2p\pi+\frac{\pi}{6}}\right\rfloor+1$ et $v_p=\left\lfloor e^{2p\pi+\frac{5\pi}{6}}\right\rfloor$, alors $\forall k\in[\![u_p;v_p]\!],\ f(k)\geqslant\frac{1}{2}(2p\pi)^\alpha e^{-(2p+1)\pi}$ ce qui donne en sommant : $\sum_{k=u_p}^{v_p}f(k)\geqslant\frac{1}{2}\big(v_p-u_p+1\big)(2p\pi)^\alpha e^{-(2p+1)\pi}\geqslant\frac{1}{2}\Big(e^{2p\pi+\frac{5\pi}{6}}-e^{2p\pi+\frac{\pi}{6}}\Big)(2p\pi)^\alpha e^{-(2p+1)\pi}=b_p$. Or, comme $\alpha>1$, $\lim_{p\to+\infty}a_p=+\infty$ ce qui est contradictoire avec $\lim_{p\to+\infty}S_{v_p}-S_{u_p-1}=S-S=0$.
Ainsi, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1}f(n)$ est divergente.

1.63 Soit F la primitive de f qui s'annule en 0 (qui existe car f est continue sur $\mathbb{R}_+$) : $\forall x\geqslant 0,\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$. Par hypothèse, on sait que $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\ell=\int_0^{+\infty}f(t)dt$. Par intégration par parties, $t\mapsto t$ et F étant de classe C^1 sur le segment $[0;x]$, on a $\int_0^x tf(t)dt=[tF(t)]_0^x-\int_0^x F(t)dt=xF(x)-\int_0^x F(t)dt=\int_0^x(F(x)-F(t))dt$.
Soit $\varepsilon>0$, puisque $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\ell$, il existe $x_0\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall x\geqslant x_0,\ \ell-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant F(x)\leqslant\ell$ (car F est croissante).
Ainsi, $\forall t\in[x_0;x],\ 0\leqslant F(x)-F(t)\leqslant\ell-F(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ donc on l'encadrement :

$$0\leqslant\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x(F(x)-F(t))dt=\int_0^{x_0}(F(x)-F(t))dt+\int_{x_0}^x(F(x)-F(t))dt\leqslant x_0\ell+\frac{\varepsilon}{2}(x-x_0).$$

$x_0\ell+\frac{\varepsilon}{2}(x-x_0)\leqslant\varepsilon x\iff x\geqslant x_1=\frac{2x_0\ell}{\varepsilon}-x_0$. $\forall x\geqslant\mathrm{Max}(x_0,x_1)$, $\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt\leqslant\varepsilon$ d'où $\int_0^x tf(t)dt\underset{+\infty}{=}o(x)$.

1.64 **a.** Soit $g_x:t\mapsto\frac{1}{x^3+t^3}$. Si $x>0$ ou si $x<-1$, la fonction g_x est continue sur le segment $[0;1]$ donc $f(x)$ existe.
Si $x=0$, $g_x(t)=\frac{1}{t^3}$ donc $f(0)$ n'existe pas d'après RIEMANN ($3\geqslant 1$). Si $x=-1$, $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$ donc $g_x(t)\underset{1^-}{\sim}\frac{1}{3(t-1)}$ donc $f(1)$ n'existe pas d'après RIEMANN ($1\geqslant 1$). Si $x\in]-1;0[$, la fonction g_x n'est même pas définie sur $]0;1[$ et $f(x)$ n'existe pas. L'ensemble de définition de f est donc $D=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.
b. Si $x>0$, $0\leqslant f(x)\leqslant\int_0^1\frac{dt}{x^3}=\frac{1}{x^3}$ donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ par encadrement. Et $f(x)-\frac{1}{x^3}=\int_0^1\frac{-t^3dt}{x^3(x^3+t^3)}$ donc $\left|f(x)-\frac{1}{x^3}\right|\leqslant\frac{1}{x^6}\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4x^6}$ donc $f(x)-\frac{1}{x^3}\underset{+\infty}{=}O\Big(\frac{1}{x^6}\Big)\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)$ donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x^3}$.
On pouvait encadrer $\frac{1}{x^3+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x^3}$ pour avoir la limite et l'équivalent mais c'est moins précis.
c. Si $x<-1$, on a $\forall t\in[0;1]$, $\frac{1}{x^3+t^3}=\frac{1}{(t+x)(t^2-xt+x^2)}=\frac{1}{6x^2}\Big(\frac{2}{t+x}-\frac{2t-x}{t^2-xt+x^2}+\frac{3x}{t^2-xt+x^2}\Big)$ d'où $f(x)=\frac{1}{6x^2}\Big(2\ln(-x-1)-2\ln(-x)-\ln(1-x+x^2)+2\ln(-x)+2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{2-x}{\sqrt{3}x}\Big)+2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big)$.
Comme $-\ln(1-x+x^2)+2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{2-x}{\sqrt{3}x}\Big)+2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\underset{-1}{=}O(1)$, on a $f(x)\underset{-1}{\sim}\frac{\ln(-x-1)}{3}$.

1.65 **a.** f est continue et 2π-périodique donc bornée sur $\mathbb{R}$ par $M=\mathrm{Max}_{x\in[0;2\pi]}|f(x)|$ et $\forall x\in[1;+\infty[$, $\left|\frac{f(t)}{t^\alpha}\right|\leqslant\frac{M}{t^\alpha}$.
D'après RIEMANN, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge donc $t\mapsto\frac{f(t)}{t^\alpha}$ est intégrable et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t^\alpha}dt$ convergente.
b. Si $f\in E$, ses primitives sont de la forme $F:x\mapsto\int_0^x f(t)dt+\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Ces fonctions F sont 2π-périodiques, par périodicité de la fonction f, si et seulement si l'on a, pour tout réel x :
$F(x+2\pi)=F(x)\iff\int_0^x f(t)dt=\int_0^{x+2\pi}f(t)dt\iff\int_x^{x+2\pi}f(t)dt=0\iff\int_0^{2\pi}f(t)dt=0\iff c(f)=0$.
c. Si $f\in E$, bien sûr $g=f-c(f)$ est encore continue et 2π-périodique donc $g\in E$. Par linéarité de l'intégrale, on a $c(g)=c(f-c(f))=c(f)-c(c(f)1)=c(f)-c(f)c(1)=0$ car $c(1)=1$ où 1 est la fonction constante.

d. Puisque $c(g) = 0$, g admet une primitive 2π-périodique (elles le sont toutes en fait), par exemple $G : x \mapsto \int_0^x g(t)dt$. On effectue une intégration par parties avec G et $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui sont de classe C^1 sur $[1;x]$ si $x > 1$, et on a $\int_1^x \frac{g(t)}{t}dt = \left[\frac{G(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{G(t)}{t^2}dt$. Or G étant périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$. De plus, on a vu à la question **a.** que $\int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2}dt$ converge car $\alpha = 2 > 1$ et $G \in E$. Ainsi, par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}dt$ converge et on a même $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}dt = -G(1) + \int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2}dt$.

e. Il suffit décrire que $\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt = \int_1^x \frac{g(t)}{t}dt + \int_1^x \frac{c(f)}{t}dt$. Or $\int_1^x \frac{c(f)}{t}dt = c(f)\ln(x)$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{g(t)}{t}dt$ admet une limite finie en $+\infty$ d'après la question précédente. Ainsi, $\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt \underset{+\infty}{\sim} c(f)\ln(x)$.

f. Comme $t \mapsto |\sin(t)|$ est continue et 2π-périodique, et que $c(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(t)|dt = \frac{2}{\pi}$, on a d'après la question précédente $\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(x)}{\pi} \to +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ diverge.

1.66 **a.** D'abord, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\ln(1+t))^n$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc u_n existe.

Pour $t \in [0;1]$, $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln(2) < 1$ donc $0 \leqslant \ln(1+t)^{n+1} \leqslant \ln(1+t)^n$ ce qui donne en intégrant entre 0 et 1 : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est décroissante et minorée par 0. De plus, en intégrant entre 0 et 1 l'inégalité $0 \leqslant (\ln(1+t))^n \leqslant (\ln(2))^n$, on obtient $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $\ln(2) \sim 0,69 < 1$.

c. Par intégration par parties, en posant les fonctions $u : t \mapsto (\ln(1+t))^{n+1}$ et $v : t \mapsto 1+t$ dans $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1}dt$ (u et v sont C^1 sur $[0;1]$) : $u_{n+1} = \left[(1+t)(\ln(1+t))^{n+1}\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$ ce qui donne la relation $u_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)u_n$.

d. On a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ d'après **a.** donc $0 \leqslant 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)u_n \leqslant u_n$ d'après **c.**. Ainsi, on obtient $(n+1)u_n \leqslant 2(\ln(2))^{n+1}$ et $2(\ln(2))^{n+1} \leqslant (n+2)u_n$ comme attendu en exploitant chaque inégalité.

e. D'après **d.**, $\frac{\ln^{n+1}(2)}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln^{n+1}(2)}{n+1}$ et comme $\frac{\ln^{n+1}(2)}{n+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^{n+1}(2)}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^{n+1}(2)}{n}$, on peut conclure par le théorème des gendarmes à l'équivalent suivant : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^{n+1}(2)}{n}$.

f. Si on pose $v_n = \frac{u_n}{\ln^n(2)} \geqslant 0$, alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$ d'après **e.** donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{\ln^n(2)}$ diverge (série harmonique).

1.67 **a.** Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Or, $\forall t \neq 0$, $f'(t) = \frac{f(t)-f(t-1)}{t}$ (1). Ainsi, par opération, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Si on suppose f de classe C^k sur $\mathbb{R}^*$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors la relation (1) montre qu'elle est aussi de classe C^{k+1}. Par principe de récurrence, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $t \geqslant 1$, $\int_1^t s^{-2}f(s-1)ds = \int_1^t \frac{f(s)-sf'(s)}{s^2}ds$ puisque $\forall s \in [1;t]$, $f(s-1) = f(s) - sf'(s)$ d'après l'énoncé, ainsi $\int_1^t s^{-2}f(s-1)ds = \left[-\frac{f(s)}{s}\right]_1^t = f(1) - \frac{f(t)}{t}$ d'où l'on déduit bien $f(t) = t\left[f(1) - \int_1^t s^{-2}f(s-1)ds\right]$.

b. Comme avant, si $x \geqslant 1$, on a $\int_1^x u^{-2}f(u-1)du = \int_1^x \frac{f(u)-uf'(u)}{u^2}ds = \left[-\frac{f(u)}{u}\right]_1^x = f(1) - \frac{f(x)}{x}$ donc l'hypothèse "$\int_1^{+\infty} u^{-2}f(u-1)du$ converge" de l'énoncé se traduit par l'existence de $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si on avait $\ell \neq 0$, la quantité $\frac{f(x)}{x}$ garderait un signe constant au voisinage de $+\infty$ donc $f(x)$ aussi. On aurait aussi

$\dfrac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} \ell$ donc $\dfrac{f(x-1)}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \ell$ qui devient $\dfrac{f(x-1)}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{x}$. Montrer comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ell}{u} du$ diverge par RIEMANN, on arriverait à une contradiction. Ainsi $\ell = 0$ et on a donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} u^{-2} f(u-1) du = \left[-\frac{f(u)}{u}\right]_1^{+\infty} = f(1)$. Alors, $f(1) - \displaystyle\int_1^t s^{-2} f(s-1) ds = \int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds$ avec CHASLES d'où $\forall t \geqslant 1,\ f(t) = t \displaystyle\int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds$.

c. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} u^{-2} f(u-1) du$ converge, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds = 0$ (une sorte de reste) car $\displaystyle\int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds = \int_1^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds - \int_1^t s^{-2} f(s-1) ds$. D'après **a.**, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$. On a aussi $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t-1)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t-1)}{t-1} \times \frac{t-1}{t} = 0$. Au final, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f'(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{f(t)}{t} - \frac{f(t-1)}{t}\right) = 0 - 0 = 0$.
Appliquons le théorème des accroissements finis à f (qui est bien dérivable sur $[t-1;t]$) entre $t-1$ et t : $\exists u_t \in]t-1;t[, f(t) - f(t-1) = (t-(t-1))f'(u) = f'(u)$. Or comme $f'(t) \underset{+\infty}{=} o(1)$, $f(t) - f(t-1) \underset{+\infty}{=} o(1)$ donc $f'(t) = \dfrac{f(t) - f(t-1)}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Si $f'(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^k}\right)$, comme $f(t) - f(t-1) = f'(u_t)$ et $u_t \underset{+\infty}{\sim} t$ car $t-1 < u_t < t$, $f'(u_t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^k}\right)$ donc $f'(t) = \dfrac{f(t) - f(t-1)}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{k+1}}\right)$. Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^k f'(t) = 0$.

d. D'après **c.**, $\exists t_0 \geqslant 0,\ \forall t \geqslant t_0,\ |f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc f' est intégrable sur $[t_0;+\infty[$ d'après RIEMANN, ainsi $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f'(u) du$ converge et f admet bien une limite finie ℓ en $+\infty$ car $\forall t \geqslant t_0$, $f(t) = f(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^t f'(u) du$ (2).
En passant à la limite dans (2), $\ell = f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(u) du$ donc $f(t) - \ell = -\displaystyle\int_t^{+\infty} f'(u) du$.
Un petit lemme préalable : si g et h sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et h est positive avec $g(t) \underset{+\infty}{=} o(h(t))$, alors $\displaystyle\int_t^{+\infty} g(u) du \underset{+\infty}{=} o\left(\int_t^{+\infty} h(u) du\right)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, $\exists t_0 \geqslant 0,\ \forall t \geqslant t_0,\ |g(t)| \leqslant \varepsilon |h(t)| = \varepsilon h(t)$. On intègre entre t et $+\infty$ (on le peut) et $\left|\displaystyle\int_t^{+\infty} g(u) du\right| \leqslant \int_t^{+\infty} |g(u)| \leqslant \varepsilon \int_t^{+\infty} h(u) du$. C'est fait !
Comme $f(t) - \ell = -\displaystyle\int_t^{+\infty} f'(u) du$, en appliquant le lemme car $f'(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^k}\right)$ pour $k \geqslant 2$ (les hypothèses sont vérifiées), on a $f(t) - \ell \underset{+\infty}{=} o\left(\displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{1}{u^k} du\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(k-1)t^{k-1}}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{k-1}}\right)$.

$\boxed{\textbf{1.68}}$ **a.** La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $g(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t}) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge par critère de RIEMANN donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t) dt$ converge pour $x > 0$ par comparaison. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$ avec CHASLES donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = -g(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

b. • Si $x > 0$, par intégration par parties en posant $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \dfrac{1}{t}$, comme u et v sont C^1 sur $[x;+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, on obtient $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^2}$. Or $\forall t \geqslant x,\ \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, d'où la majoration $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{e^{-x}}{x} + o\left(\dfrac{e^{-x}}{x}\right)$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

• Si $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln(x) + \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$ par CHASLES et linéarité de l'intégrale. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$ converge puisque $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = -1$ (par développements limités), il vient $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt \underset{0^+}{=} O(1)$ (et même

$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}dt)$ donc $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{0^+}{=} f(x) \underset{0^+}{=} -\ln(x)$.

c. f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle y est continue et que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
De plus, $u = f$ et $v = \text{id}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\lim_{x\to 0^+} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ par croissances comparées avec la question **b.** car $xf(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$ et $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$. Ainsi, par intégration par parties, on a donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 0 - \int_0^{+\infty}(-e^{-x})dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.
On pouvait prévoir ce résultat en admettant pouvoir inverser les intégrales doubles (théorème de Fubini),

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\right)dx = \iint_{0<x\leqslant t}\frac{e^{-t}}{t}dtdx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t \frac{e^{-t}}{t}dx\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

1.69 Posons $u_n = \frac{n}{(n!)^{1/n}} = \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$ pour $n \geqslant 1$. D'après Stirling, on a $\frac{n^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} \underset{+\infty}{=} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}(1+o(1))$ donc $u_n = e(2\pi n)^{-1/n}(1+o(1))^{1/n}$. Or $\lim_{n\to+\infty}(2\pi n)^{-1/n} = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(-\frac{1}{n}\ln(2\pi n)\right) = e^0 = 1$ car $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2\pi n)}{n} = 0$ par croissances comparées et $(1+o(1))^{1/n} \underset{+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+o(1))\right) \underset{+\infty}{=} \exp\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ qui tend vers 1. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$.
Indication donnée pendant l'oral et qui permettait de se passer de ce passage par les $o(1)$: montrer que si on a deux suites strictement positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} v_n^{\frac{1}{n}}$.
En effet, si $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1$, on a $\frac{u_n^{\frac{1}{n}}}{v_n^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}$ or $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \ln(1) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ donc on a bien $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n^{\frac{1}{n}}}{v_n^{\frac{1}{n}}} = 1$ qui est la définition de $u_n^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} v_n^{\frac{1}{n}}$. En utilisant ce résultat, toujours d'après Stirling, on a $\frac{n^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} e(2\pi n)^{-1/n}$ et on conclut comme avant car $\lim_{n\to+\infty} e(2\pi n)^{-1/n} = e$.
On pouvait penser aux sommes de Riemann mais $v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(n)-\ln(k)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto -\ln(x)$ mais f n'est que continue sur l'intervalle $]0;1]$ et pas sur un segment donc on ne peut pas appliquer le théorème sur les sommes de Riemann. Pourtant $\int_0^1(-\ln x)dx = [x - x\ln(x)]0^1 = 1$ et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^1 = 1$ par continuité de exp.

1.70 **a.** Par hypothèse, $A = \int_0^1 f > 0$. Comme f est continue sur $[0;1]$, en posant $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$, la fonction F est la primitive (donc de classe C^1) de f sur $[0;1]$ qui s'annule en 0, elle est strictement croissante car $f > 0$ donc réalise une bijection de $[0;1]$ sur $[0;A]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $x_0, x_1, \cdots, x_n$ reviennent à $\forall k \in [\![1;n]\!], F(x_k) - F(x_{k-1}) = \frac{A}{n}$ donc, puisque $x_0 = 0$ est attendu, $\forall k \in [\![0;n]\!],\ F(x_k) = \frac{kA}{n}$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la subdivision demandée et qu'on a $\forall k \in [\![0;n]\!],\ x_k = F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$.

b. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)$ en posant $h : x \mapsto g \circ F^{-1}(xA)$. Comme h est continue par morceaux sur le segment $[0;1]$ par composée, un théorème du cours montre que l'on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 h(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ en posant $x = \varphi(t)$ avec $\varphi : t \mapsto \frac{1}{A}F(t)$ une bijection strictement croissante de classe C^1 de $[0;1]$ sur $[0;1]$. On parvient donc à $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{A}\int_0^1 g\circ F^{-1}\circ F(t)\times f(t)dt = \frac{\int_0^1 fg}{\int_0^1 f}$.

1.71 **a.** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, alors $D_n(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\Big) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\Big(e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\Big)$ car $e^{ix} \neq 1$. Par conséquent, $D_n(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin(x/2)}$ en introduisant l'angle moitié ce qui donne $D_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ avec une dernière formule de trigonométrie.

b. Si $\varphi \in C^1([0;\pi], \mathbb{R})$, par intégration par parties en posant $u = \varphi$ et $v(t) = -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$ de classe C^1 sur $[0;\pi]$ si $\lambda > 0$, $\int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)dt = \Big[-\frac{\cos(\lambda t)\varphi(t)}{\lambda}\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda t)\varphi'(t)}{\lambda}dt$. Par inégalité de la moyenne et $|\cos| \leqslant 1$, $\Big|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)dt\Big| \leqslant \frac{1}{\lambda}\Big(|\varphi(a)| + |\varphi(b)| + \int_0^\pi |\varphi'|\Big)$. Par encadrement : $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)dt = 0$.

c. Pour $n \geqslant 1$, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^\pi xD_n(x)dx = \Big[\frac{x^2}{4}\Big]_0^\pi + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi x\cos(kx)dx$. Or $\Big[\frac{x^2}{4}\Big]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$ et, par intégration par parties en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{\sin(kx)}{k}$, on a u et v de classe C^1 sur $[0;\pi]$ et $\int_0^\pi x\cos(kx)dx = -\frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kx)dx = \frac{\cos(k\pi)-1}{k^2}$ de sorte que l'on parvient à $\int_0^\pi x\cos(2kx)dx = 0$ et $\int_0^\pi x\cos((2k+1)x)dx = -\frac{2}{(2k+1)^2}$. Ainsi : $\int_0^\pi xD_{2n}(x)dx = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{(2k+1)^2}$.

D'après la question **a.**, $\int_0^\pi xD_{2n}(x)dx = \int_0^\pi x\frac{\sin\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \int_0^\pi \varphi(x)\sin\Big(\big(2n+\frac{1}{2}\big)x\Big)dx$ en posant $\varphi : x \mapsto \frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. La fonction φ est continue sur $]0;\pi]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$ car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$. De plus, φ est de classe C^1 sur $]0;\pi]$ par opérations et $\forall x \in]0;\pi]$, $\varphi'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - x\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Or $\varphi'(x) \underset{0}{=} \frac{2\left(\frac{x}{2} + o(x^2)\right) - x\big(1+o(x)\big)}{x^2 + o(x^2)} \underset{0}{=} \frac{o(1)}{1+o(1)} \underset{0}{=} o(1)$, on a $\lim_{x\to 0^+}\varphi'(x) = 0$ ce qui montre par le théorème de prolongement C^1 que φ est de classe C^1 sur le segment $[0;\pi]$ et que $\varphi'(0) = 0$.

La question **b.** prouve alors que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi xD_{2n}(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \varphi(x)\sin\Big(\big(2n+\frac{1}{2}\big)x\Big)dx = 0$.

Par conséquent, la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{2}{(2k+1)^2}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$. Mais en posant $S_n = 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, on a $T_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{T_n}{4} + \frac{S_n}{2}$ en séparant les termes pairs et impairs. Comme on sait que la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge ($2 > 1$) vers $\zeta(2)$, en passant à la limite ci-dessus : $\zeta(2) = \frac{\zeta(2)}{4} + \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit classiquement : $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.72 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et strictement positif. Ainsi $v_n = \ln(u_n) = \ln\Big(\prod\limits_{k=1}^{n}\big(1+\frac{k}{n}\big)^{\frac{1}{n}}\Big)$ donc $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big)$. Comme la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur le segment $[0;1]$, par le théorème sur les sommes de RIEMANN, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f = [(1+x)\ln(1+x)-x]_0^1 = 2\ln(2)-1$. Par conséquent, par continuité de $\exp$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^{2\ln(2)-1} = \frac{4}{e} = \ell$.

b. On peut écrire $u_n = \frac{1}{n}\Big(\frac{(2n)!}{n!}\Big)^{\frac{1}{n}} = \Big(\frac{(2n)!}{n^n n!}\Big)^{\frac{1}{n}}$. Or on connaît l'équivalent de STIRLING $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}$. Ainsi $\frac{(2n)!}{n^n n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n n^n e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\sqrt{2})4^n}{e^n} = \sqrt{2}\Big(\frac{4}{e}\Big)^n$. On en déduit que $u_n \underset{+\infty}{=} \Big(\sqrt{2}\Big(\frac{4}{e}\Big)^n + o\Big(\Big(\frac{4}{e}\Big)^n\Big)\Big)^{\frac{1}{n}}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{=} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{4}{e}\right)^n + o\left(\left(\frac{4}{e}\right)^n\right)\right)} \underset{+\infty}{=} e^{\ln(\frac{4}{e})+\frac{1}{n}\ln(\sqrt{2}+o(1))} \underset{+\infty}{=} \frac{4}{e}\times e^{\frac{1}{2n}(\ln(2)+o(1))} \underset{+\infty}{=} \frac{4}{e}\Big(1+\frac{\ln(2)}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$ en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de $\exp$ en 0.

On retrouve l'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell = \frac{4}{e}$ de la question **a.**. Mais on a beaucoup mieux, $u_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(2)}{en}$.

1.73 **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 1$ (classique). Or $u : t \to 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par DL ou croissances comparées, $\lim\limits_{t\to0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)$. Ainsi, par IPP, les intégrales $\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ et $\int_0^{+\infty} uv' = -\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$ ont même nature. Or la seconde est absolument convergente car la fonction $g : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = \frac{1}{2}$ par DL et $g(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$. Ainsi, $\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$ converge (mais pas absolument) pour $x \geqslant 0$. Soit donc $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt - \int_0^{x}\frac{\sin t}{t}dt$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction F y est C^1 et vérifie $F'(x) = -f(x) = -\frac{\sin x}{x}$ par le théorème fondamental de l'intégration.

b. $G : x \mapsto x$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc, par IPP, on a $\int_0^a F(x)G'(x)dx = [F(x)G(x)]_0^a - \int_0^a F'(x)G(x)dx$ pour un réel $a \geqslant 0$; ce qui donne $\int_0^a F(x)dx = aF(a) + \int_0^a \sin(x)dx = aF(a) + 1 - \cos(a)$.

Or par IPP encore, $aF(a) = a\Big[\frac{1-\cos t}{t}\Big]_a^{+\infty} + a\int_a^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \cos(a) - 1 + a\int_a^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ et on obtient $\int_0^a F(x)dx = a\int_a^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = a\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx - a\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx = 1 - a\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ qui se transforme par une ultime IPP, $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \frac{1}{x^2}$, en $\int_0^a F(x)dx = 1 + \frac{\sin a}{a} - 2a\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$.

Enfin $\Big|\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx\Big| \leqslant \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2a^2}$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\sin a}{a} = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx = 0$ et on peut enfin conclure à la convergence l'intégrale proposée et que $I = \int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\Big)dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a F(x)dx = 1$.

1.74 **a.** Comme $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on pense à une comparaison série/intégrale. Pour $n \geqslant 1$ et $k \in [\![n+1;2n]\!]$, on a $\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$. On somme ces inégalités pour $k \in [\![n+1;2n]\!]$ pour avoir l'inégalité $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} = \int_{n+1}^{2n+1}\frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant S_n \leqslant \int_n^{2n}\frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_n^{2n}$. Or $[2\sqrt{t}]_n^{2n} = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ et $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} = 2\sqrt{2n+1} - 2\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n}\Big(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\Big) \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

Ainsi, on arrive à l'équivalent $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ par encadrement.

b. On peut aussi écrire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}} = \sqrt{n} \times \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}$ et, comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur le segment $[0;1]$, par le théorème sur les sommes de RIEMANN, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = \int_0^1 f = [2\sqrt{1+t}]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$.

On retrouve bien l'équivalent de la question **a.** : $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

1.75 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}\,(x) = 1 \Longleftrightarrow e^x - e^{-x} = 2 \Longleftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 1 = 0 \Longleftrightarrow y^2 - 2y - 1 = 0$ en posant $y = e^x > 0$.

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ donc $y = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ mais comme $y > 0$, on a forcément $y = 1 + \sqrt{2}$ donc $\text{sh}\,(x) = 1 \Longleftrightarrow x = \ln(y) = \ln(1+\sqrt{2}) = \alpha$.

b. $\forall t \in [0;\alpha]$, $0 \leqslant \text{sh}\,(t) \leqslant 1$ car sh est croissante donc $0 \leqslant (\text{sh}\,(t))^{n+1} \leqslant (\text{sh}\,(t))^n$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente.

Avec la question **d.** (qui se démontre indépendamment des questions **b.** et **c.**), si on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et si on avait $\ell > 0$, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} (nI_n + (n-1)I_{n-2} = +\infty$ ce qui contredit le fait que $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \ln(2)$. De même, $\ell < 0$ est impossible et on en déduit donc que $\ell = 0$.

La bonne méthode est d'utiliser le théorème de convergence dominée : $\forall t \in [0;\alpha[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\text{sh}\,t)^n = 0$ avec la domination $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0;\alpha[$, $|(\text{sh}\,t)^n| \leqslant 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\alpha (\text{sh}\,t)^n dt = \int_0^\alpha 0 = 0$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$.

d. Soit $n \geqslant 2$, en posant $u(t) = (\text{sh}\,t)^{n-1}$ et $v(t) = \text{ch}\,(t)$, on a $u'(t) = (n-1)\text{ch}\,(t)(\text{sh}\,t)^{n-2}$ et $v'(t) = \text{sh}\,(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0;\alpha]$ donc $I_n = \int_0^\alpha u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^\alpha - \int_0^\alpha u'(t)v(t)dt$ d'où $I_n = [(\text{ch}\,t)(\text{sh}\,t)^{n-1}]_0^\alpha - (n-1)\int_0^\alpha (\text{ch}\,t)^2(\text{sh}\,t)^{n-2}dt$. De plus, $I_n = (\text{ch}\,\alpha)(\text{sh}\,\alpha)^{n-1} - (n-1)(I_{n-2}+I_n)$ car $(\text{ch}\,t)^2 = 1 + (\text{sh}\,t)^2$. Ensuite $I_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ car $\text{ch}\,\alpha = \sqrt{1+(\text{sh}\,\alpha)^2} = \sqrt{2}$ et $\text{sh}\,\alpha = 1$, ce qui revient à la relation attendue $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.

e. Comme la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, pour un entier $n \geqslant 2$ fixé, on a $I_{n-2} \geqslant I_n$ ce qui donne $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2} \geqslant (2n-1)I_n$ ou encore $I_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2n-1}$. De même, $I_n \geqslant I_{n+2}$ donc, comme $(n+2)I_{n+2} + (n+1)I_n = \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqslant (2n+3)I_n$, c'est-à-dire $I_n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2n+3}$. Par encadrement, $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\,n}$.

1.76 **a.** $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 donc $I_0 = \frac{\pi}{4}$. Ou alors on pose le changement de variable $x = \sin(t)$ d'où $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_0^{\pi/2} \dfrac{1+\cos(2t)}{2}dt = \left[\dfrac{2t+\sin(2t)}{4}\right] = \dfrac{\pi}{4}$ ($\sin$ est C^1 de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0;1]$). Plus simplement, $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$.

Pour $x \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 < x^{n+1}\sqrt{1-x^2} < x^n\sqrt{1-x^2}$ qu'on intègre sur $[0;1]$ pour avoir $0 < I_{n+1} < I_n$ (l'inégalité stricte vient du fait que les deux fonctions ne sont pas constamment égales).

Ainsi $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive et strictement décroissante.

b. Si $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u : x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$ et $v : x \mapsto x^n$ sont de classe C^1 sur $[0;1]$ donc, par intégration par parties, puisque $u'(x) = x\sqrt{1-x^2}$ et $v'(x) = nx^{n-1}$, on a la relation :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^n(x\sqrt{1-x^2})dx = [-\frac{x^n}{3}(1-x^2)^{3/2}]_0^1 + \frac{n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}dx = \frac{n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}dx.$$

En écrivant $(1-x^2)^{3/2} = (1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ et par linéarité : $I_{n+1} = \frac{n}{3}I_{n-1} - \frac{n}{3}I_{n+1}$ donc $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+3}I_{n-1}$.

c. On en déduit donc, d'après **a.**, que $0 < I_{n+1} = \dfrac{n}{n+3}I_{n-1} < I_n < I_{n-1}$ donc $\dfrac{n}{n+3} < \dfrac{I_n}{I_{n-1}} < 1$. Ainsi, par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1$ donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)I_{n+1}I_n = (n+1)(n+2)nI_{n-1}I_n$ d'après **b.** donc $u_{n+1} = u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. Comme $u_1 = 6I_0I_1 = \dfrac{\pi}{2}$, on a donc $\forall n \geqslant 1,\ (n+1)(n+2)(n+3)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

D'après **c.**, $I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} I_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n^3}$. En passant à la racine, comme $I_n > 0$, $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

1.77 **a.** Il est clair que f est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\dbinom{n}{k}$.

b. f est de classe C^∞ sur $[0;1]$, positive. Si $k=0$, $f(x) = (1-x)^n$ donc f est décroissante sur $[0;1]$ et varie de 1 à 0. Si $k=n$, alors $f(x) = x^n$, donc f est croissante sur $[0;1]$ et varie de 0 à 1.

Si $k \in [\![1;n-1]\!]$, on calcule $f'(x) = \dbinom{n}{k}(kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1})$ qui se simplifie en $f'(x) = \dbinom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k(1-x)-(n-k)x) = \dbinom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)$ donc f est croissante sur $[0;k/n]$ et décroissante sur $[k/n;1]$ avec pour valeur maximale $\dbinom{n}{k}\left(\dfrac{k}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{n-k}$. Si $n=2k$, alors $f(1-x) = \dbinom{2k}{k}(1-x)^k(1-(1-x))^k = f(x)$ donc le graphe de f admet un axe de symétrie d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

c. Si $x \in]0;1[$ et $k \in \mathbb{N}$ est fixé, quand n tend vers $+\infty$, $f(x) = \dfrac{n!}{(n-k!)k!}\dfrac{x^k(1-x)^n}{(1-x)^k}$ or on peut aussi écrire $\dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)....(n-k+1) \underset{+\infty}{\sim} n^k$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^k}{k!(1-x)^k}n^k(1-x)^n$. Pas la bonne question !!!!

d. On intègre par parties dans $I_{n,k}$ (si $k<n$) en posant $u(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ et $v(x) = x^{n-k}$, u et v sont C^1 sur $[0;1]$ et $u'(x) = x^k$ et $v'(x) = -(n-k)(1-x)^{n-k-1}$: $I_{n,k} = \left[\dfrac{x^{k+1}x^{n-k}}{k+1}\right]_0^1 + \dfrac{n-k}{k+1}\displaystyle\int_0^1 \dbinom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}$.

Mais $\dfrac{n-k}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{(n-k)n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \dbinom{n}{k+1}$. Ainsi $I_{n,k} = I_{n,k+1}$.

On en déduit que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ I_{n,k} = I_{n,n} = \displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$.

1.78 La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2-\pi t}$ est continue sur $]\pi;+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[4;+\infty[$. De plus, comme $\sin(t) = \sin(\pi - t)$, on a $\sin(t) \underset{\pi}{\sim} \pi - t$ donc $f(t) \underset{\pi}{\sim} \dfrac{\pi - t}{t(t-\pi)} \underset{\pi}{\sim} \dfrac{1}{\pi}$ donc f se prolonge par continuité en π en posant $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$. Par conséquent, f est intégrable sur $]\pi;+\infty[$ donc $I = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t^2-\pi t}dt$ existe.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{\sin(t)}{t^2-\pi t}dt$. Ainsi, si on définit la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour $n \geqslant 1$, on a $S_{n-1} = \displaystyle\int_\pi^{n\pi} \dfrac{\sin(t)}{t^2-\pi t}dt$. On sait d'après ce qui précède que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t^2-\pi t}dt = I$.

- Sur $[k\pi;(k+1)\pi]$, $\sin$ est du signe de $(-1)^k$ donc u_k aussi est du signe de $(-1)^k$: $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k$ est donc alternée.
- Par l'inégalité de la moyenne, on a $|u_k| \leqslant \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \dfrac{dt}{t(t-\pi)} \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)\pi}$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.
- $|u_k| = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \dfrac{|\sin(t)|}{t^2-\pi t}dt = \int_0^\pi \dfrac{|\sin(u+k\pi)|}{(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)}du = \int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)}du$ en posant $u = t - k\pi$. Ainsi $|u_{k+1}| - |u_k| = \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{(u+(k+1)\pi)(u+k\pi)}du - \int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)}du$ ce qui devient

$$|u_{k+1}|-|u_k| = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)(u+(k-1)\pi - u-(k+1)\pi))}{(u+(k+1)\pi)(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)}du = -2\pi\int_0^{\pi} \frac{du}{(u+(k+1)\pi)(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)}$$
donc $|u_{k+1}|-|u_k| = -2\pi\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{du}{(u+(k+1)\pi)(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)} \leqslant 0$ donc $(|u_k|)_{k\geqslant 1}$ est décroissante.
Le critère spécial des séries alternées montre alors que $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ converge, on le savait déjà. Il nous apprend aussi que le signe de $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est celui du premier terme, c'est-à-dire de u_1 qui est positif. Ainsi, $I \geqslant 0$.

1.79 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{x^2+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même sur $\mathbb{R}_+$ si $x \neq 0$).
De plus, si $x \neq 0$, $f_x(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{x^2} \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc f_x est intégrable sur $]0;1]$ par critère de Riemann. Par contre si $x=0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} tf_0(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\ln(t)}{t} = -\infty$ donc f_0 n'est pas intégrable sur $]0;1]$ car $\dfrac{1}{t} \underset{0^+}{=} O(f_0(t))$ et que $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0;1]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ par Riemann.
Au final, le domaine de définition de F est $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$ et F est clairement paire sur $\mathcal{D}_F$.
b. Comme $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{u}$ est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, le changement de variable $t = \varphi(u) = \dfrac{1}{u}$ montre que $F(1) = \displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -F(1)$ donc $F(1) = 0$.
c. Soit $x > 0$, en posant $t = xu$ (facile à justifier), $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xu)}{x^2+x^2u^2}x du$. Or $\ln(xu) = \ln(x)+\ln(u)$ donc $F(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{x}F(1) = \frac{\ln(x)}{x}[\mathrm{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi\ln(x)}{2x}$.
Comme F est paire, au final, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F(x) = F(|x|) = \dfrac{\pi \ln|x|}{2|x|}$.

1.80 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$. Alors f_n est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par théorèmes généraux et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n$ car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, J_n est bien définie en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment. $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 0 = 0$ et $J_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2}$. Comme $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ et $\sin(3t) = -4\sin^3(t)+3\sin(t)$, $J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(t)dt = [2\sin(t)]_0^{\pi/2} = 2$ et $J_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}(3-4\sin^2(t))dt = \int_0^{\pi/2}(2\cos(2t)+1)dt = \Big[\sin(2t)+t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$.
b. Pour $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, on obtient $J_{n+2}-J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((n+2)t)-\sin(nt)}{\sin(t)}$ or on sait que $\sin(a)-\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donc $J_{n+2}-J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos((n+1)t)dt = 2\left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2}$ d'où $J_{n+2}-J_n = 0$ si n est impair et $J_{n+2}-J_n = \dfrac{2(-1)^p}{2p+1}$ si $n = 2p$ est pair.

- Comme $J_1 = J_3 = \frac{\pi}{2}$, par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ J_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, par télescopage, $J_{2n} = J_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}(J_{2k+2}-J_{2k}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2(-1)^k}{2k+1}$.

c. Pour $x > 0$, on effectue une intégration par parties en posant $u : t \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{x}$ et $v = f$ qui sont de classe C^1 sur le segment $[a;b]$ et on trouve $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(xt)dt = \left[\frac{\sin(xt)f(t)}{x}\right]_a^b - \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\sin(xt)dt$. Or on peut majorer $\left|\left[\dfrac{\sin(xt)f(t)}{x}\right]_a^b\right| = \left|\dfrac{\sin(bx)f(b) - \sin(ax)f(a)}{x}\right| \leqslant \dfrac{2||f||_{\infty,[a;b]}}{x}$ pour la partie "toute intégrée" et $\left|\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(xt)dt\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_a^b |f'(t)|dt \leqslant \dfrac{(b-a)||f'||_{\infty,[a;b]}}{x}$ par inégalité triangulaire sur les intégrales car f et f' sont continues sur le segment $[a;b]$ donc elles y sont bornées. Ainsi, par inégalité triangulaire, on arrive à $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(xt)dt\right| \leqslant \dfrac{2||f||_{\infty,[a;b]} + (b-a)||f'||_{\infty,[a;b]}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, la majoration précédente permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(xt)dt = 0$.

d. Toujours par linéarité de l'intégrale et avec la formule $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on trouve $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{2\sin(t/2)\cos(((2n+1)t)/2)}{\sin(t)}dt$. Or $\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ donc, en simplifiant, $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)dt$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue vu en **c.**, comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe C^1 sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2} = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(J_{n+1} - J_n) = 0$.

La suite $(J_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est constante donc elle tend vers $\frac{\pi}{2}$. Comme $J_{2n} = J_{2n+1} - (J_{2n+1} - J_{2n})$, ce qui précède montre aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_{2n} = \frac{\pi}{2}$. Comme on a les indices pairs et les indices impairs, $(J_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

1.81 **a.** Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$ pour $k \geqslant 2$. On somme le premier de ces encadrements pour $k \in [\![2;n]\!]$ pour avoir $1 + \displaystyle\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$ et le second pour $k \geqslant n$ (tout converge) pour obtenir $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. Ainsi, $1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leqslant \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$ et $\frac{1}{n} \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1}$.

On en déduit par théorème d'encadrement que $\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On peut procéder de la même manière pour montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ mais on peut aussi établir que $\dfrac{2}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{(k-1)^2} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{2k-1}{k^2(k-1)^2}$ car $2k^2 - 4k + 2 \leqslant 2k^2 - k$ ce qui, en sommant et par télescopage, donne la majoration $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)^2}$. Ainsi, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après Riemann car $3n > 1$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, le réel u_n existe.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ et $v(t) = 1$ dans l'expression de u_n, les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = u(0)v(0) = 0$ donc $u_n = \left[\dfrac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{-3nt^3}{(1+t^3)^{n+1}}$. En décomposant $t^3 = (1+t^3) - 1$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale (les deux intégrales convergent), on obtient $u_n = 3n(u_n - u_{n+1})$ donc $u_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n}u_n$.

d. $v_{n+1} - v_n = \alpha\ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) - \alpha\ln(n) - \ln(u_n) = \alpha\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$ donc, avec les développements limités, $v_{n+1}-v_n = \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{3n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} \Big(\alpha - \frac{1}{3}\Big)\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$.

- Si $\alpha \neq \frac{1}{3}$, $v_{n+1}-v_n \underset{+\infty}{\sim} \Big(\alpha - \frac{1}{3}\Big)\frac{1}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ diverge par RIEMANN.
- Si $\alpha = \frac{1}{3}$, $v_{n+1}-v_n \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ converge par RIEMANN.

Ainsi, par dualité suite-série, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge (vers un réel ℓ) si et seulement si $\alpha = \frac{1}{3}$.

Comme $v_n = \frac{1}{3}\ln(n)+\ln(u_n) = \ln\left(n^{1/3}u_n\right)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, en utilisant la continuité de l'exponentielle, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/3}u_n = e^{\ell} \neq 0$. On a donc l'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{\ell}}{\sqrt[3]{n}}$.

1.82 Tout d'abord, comme la fonction $f_b : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $f_b(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}$ est continue et que $f_b(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{b-1}}$, la fonction f_b est intégrable sur $]0;n]$ (pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $b-1<1$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie si et seulement si $b<2$.

a. Si $b>0$ et $b\neq 1$, on a donc $b \in]0;1[\cup]1;2[$...à terminer.

- Soit maintenant $b<2$, alors comme $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^b}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $b>1$ et nous poserons dans ce cas $I_b = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt > 0$ (si $b\in]1;2[$ donc).
- Si $b<1$, par IPP, $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt = \frac{\text{Arctan}(n)}{(1-b)n^{b-1}} - \int_0^n \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ et $g : t \mapsto \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $b>0$ et dans ce cas, on note $J_b = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}} > 0$ (si $b\in]0;1[$ donc).

b. • Si $b \leqslant 0$, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt$ diverge, on a $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt$ et on encadre $\frac{\pi}{4}\int_1^n \frac{dt}{t^b} \leqslant \int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{dt}{t^b}$ donc $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt$ est "de l'ordre de" $\int_1^n \frac{dt}{t^b}$ donc de $\frac{1}{n^{b-1}}$.

- Si $b=1$, $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt$ diverge aussi, et comme $\int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}dt = \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{1}{t}dt - \int_1^n \frac{\text{Arctan}(1/t)dt}{t^b}$, on a $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi\ln(n)}{2}$ car la fonction $t\mapsto \frac{\text{Arctan}(1/t)}{t^b}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
- Si $b\in]1;2[$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{I_b}{n^a}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a>1$.
- Si $b\in]0;1[$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{(1-b)n^{a+b-1}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a+b>2$.
- Si $b\in]-\infty;0]$, on a donc (par majoration ou minoration) $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a+b>2$.

c. Si $b=1$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi\ln(n)}{2n^a}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a>1$ (BERTRAND).

1.83 **a.** La fonction $y^2-y'^2+y''^2-(y+y'+y'')^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse donc elle y admet des primitives. De plus, $y^2-y'^2+y''^2-(y+y'+y'')^2 = -2y'^2-2yy'-2yy''-2y'y'' = -(y^2)'-(y'^2)'-(2yy')' = (-(y+y')^2)'$. Ainsi, $-(y+y')^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $y^2-y'^2+y''^2-(y+y'+y'')^2$.

b. L'inégalité classique $|yy''| \leqslant \frac{y^2+y''^2}{2}$ montre, par comparaison, comme $y^2+y''^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, que yy'' est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} yy''$ converge.

Pour $x\in\mathbb{R}_+$, par intégration par parties puisque les fonctions y et y' sont de classe C^1 sur $[0;x]$, on a $\int_0^x y'^2 = [yy']_0^x - \int_0^x yy''$. Or on sait que $\int_0^{+\infty} yy''$ converge et que, par le théorème de la limite monotone, comme $x \mapsto \int_0^x y'^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une limite finie ou elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Il en est donc de même pour yy'. Mais si on avait $\lim_{+\infty} yy' = +\infty$, on aurait $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x yy' = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = +\infty$ ce qui montrerait que $\lim_{x\to+\infty} y^2(x) = +\infty$, en contradiction avec la convergence de $\int_0^{+\infty} y^2$. Ainsi, par l'absurde, on a prouvé que $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge.

c. Comme avant $|yy'| \leqslant \frac{y^2+y'^2}{2}$ donc yy' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car y^2 et y'^2 le sont et, à nouveau, $\int_0^{+\infty} yy'$ converge. Or $2\int_0^x y(t)y'(t)dt = [y^2]_0^x = y(x)^2 - y(0)^2$, donc y^2 admet une limite finie en $+\infty$. Mais comme $\int_0^{+\infty} y^2$ converge par hypothèse, cette limite est forcément nulle donc $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

d. À nouveau, $|y'y''| \leqslant \frac{y'^2+y''^2}{2}$ donc $y'y''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car y'^2 et y''^2 le sont donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} y'y''$ converge. Ainsi $2\int_0^x y'(t)y''(t)dt = [y'^2]_0^x = y'(x)^2 - y'(0)^2$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Si on note $\ell = \lim_{x\to+\infty} y'(x)^2 \in \mathbb{R}_+$, comme $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge, on a forcément $\ell = 0$ ce qui montre que $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

e. Comme y, y', y'' sont de carrés intégrables d'après ce qui précède, la fonction $y + y' + y''$ l'est aussi donc $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y+y'+y'')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par somme. De toutes façons, pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x (y^2 - y'^2 + y''^2 - (y+y'+y'')^2) = [-(y+y')^2]_0^x$ d'après la question **a.** et $\lim_{+\infty}(y+y')^2 = 0$ d'après les questions **c.** et **d.**. En passant à la limite, on a $\int_0^{+\infty}(y^2 - y'^2 + y''^2 - (y+y'+y'')^2) = (y(0)+y'(0))^2$. $\int_0^{+\infty} y^2 - \int_0^{+\infty} y'^2 + \int_0^{+\infty} y''^2 - \int_0^{+\infty} (y+y'+y'')^2 = (y(0)+y'(0))^2$ par linéarité de l'intégrale d'où $\int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2 - \int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} (y+y'+y'')^2 + (y(0)+y'(0))^2 \geqslant 0$ et l'inégalité attendue.

f. Pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité de la question précédente, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $y(0)+y'(0) = 0$ et que $(E)\ :\ y''+y'+y = 0$. Comme les racines de X^2+X+1 sont j et j^2, les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (E) sont les fonctions $y : x \mapsto \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{-x}{2}}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Comme $y(0) = A$ et $y'(0) = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2}$, la condition $y(0)+y'(0) = 0$ équivaut à $\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0$ ou $A = -\sqrt{3}B$. Ainsi, les fonctions y telles que $\int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$ sont les fonctions (en posant $\lambda = 2B \in \mathbb{R}$) $y : x \mapsto \lambda\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\Big)e^{\frac{-x}{2}} = \lambda\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)e^{\frac{-x}{2}}$.

Questions de cours :

• Soit un intervalle I et $f,g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et de carré intégrables sur I. Alors, puisque $|fg| \leqslant \frac{f^2+g^2}{2}$, l'intégrale $\int_I fg$ converge par comparaison. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_I (f+tg)^2$; l'intégrale converge car $(f+tg)^2 = f^2 + 2tfg + t^2g^2$ est intégrable sur I par somme de fonctions intégrables. Ainsi, φ est bien définie et elle est polynomiale par linéarité de l'intégrale et on a $\varphi(t) = \int_I f^2 + 2t\int_I fg + t^2\int_g^2$. Traitons deux cas :

– Si $\int_I g^2 = 0$, alors φ est affine et positive sur $\mathbb{R}$ donc elle est constante et on a donc $\int_I fg = 0$. Alors l'inégalité $\left(\int_I fg\right)^2 \leqslant \int_I f^2 \times \int_I g^2$ est clairement vraie $(0 \leqslant 0)$.

– Si $\int_I g^2 > 0$, comme φ est positive sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif (on ne peut pas avoir deux racines réelles car φ serait négative entre les deux). Ainsi, $\Delta = 4\int_I f^2 \times \int_I g^2 - 4\Big(\int_I fg\Big)^2 \leqslant 0$ ce qui est à nouveau l'inégalité $\Big(\int_I fg\Big)^2 \leqslant \int_I f^2 \times \int_I g^2$.

Dans les deux cas, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\Big(\int_I fg\Big)^2 \leqslant \int_I f^2 \times \int_I g^2$.

• Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que f est nulle sur $\left[0; \frac{3}{4}\right]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est affine sur $\left[n - \frac{1}{2^{2n}}; n\right]$ et sur $\left[n; n + \frac{1}{2^{2n}}\right]$ avec $f\Big(n - \frac{1}{2^{2n}}\Big) = f\Big(n + \frac{1}{2^{2n}}\Big) = 0$ et $f(n) = 2^{n+1}$ et telle que f soit nulle partout ailleurs que sur ces intervalles. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on trouve $\int_{\mathbb{R}_+} f = 2$ bien que la fonction f ne tende pas vers 0 en $+\infty$. En effet, si $x_n = n + \frac{1}{2^{2n}}$, on sait calculer $\int_0^{x_n} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \times 2^{k+1} \times \Big(2 \times \frac{1}{2^{2k}}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\Big(1 - \frac{1}{2^n}\Big)$ qui tend vers 2.

1.84 **a.** La fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur le segment $[a; b]$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale $\int_a^b tf(t)dt$ dans laquelle on effectue le changement de variable $t = \varphi(u) = a + b - u$ avec φ qui est bien de classe C^1 sur le segment $[a; b]$ et qui vérifie $\varphi(a) = b$ et $\varphi(b) = a$. Ainsi, d'après le cours et d'après l'hypothèse faite sur f, on a $\int_a^b tf(t)dt = \int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)(-1)du = \int_a^b (a+b-u)f(u)du$. Par linéarité de l'intégrale, on a donc $I = (a+b)\int_a^b f(t)dt - I$ ce qui prouve que $I = \int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$.

b. La fonction $g : t \mapsto \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)} = tf(t)$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ donc $J = \int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt$ existe. On vérifie bien que $\forall t \in [0; \pi],\ f(\pi - t) = \frac{\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)} = f(t)$ ce qui montre avec la question **a.** que $\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt = \frac{\pi}{2}[-\operatorname{Arctan}(\cos(t))]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$.

1.85 **a.** La fonction $f :]0; 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{(x^2 - x^3)^{1/3}} = x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}$ est continue sur $]0; 1[$. De plus, $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{1}{(1-x)^{1/3}}$ et $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x^{2/3}}$ donc, d'après Riemann puisque $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$, f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ et $\left]0; \frac{1}{2}\right]$ donc sur $]0; 1[$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$ converge donc I existe.

Même si ce n'est pas demandé, on peut transformer l'intégrale I en posant $x = \varphi(u) = \frac{u^3}{1+u^3}$ car la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to]0; 1[$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 dont la bijection réciproque est la fonction $\varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$. Par changement de variable, $I = \int_0^{+\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ (après calculs). On effectue ensuite le changement de variable $u = \psi(v) = \frac{1}{v}$ dans $\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ car $\psi :]0; 1] \to [1; +\infty[$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1 donc $\int_1^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = -\int_1^0 \frac{vdv}{1+v^3}$ (après calculs). On obtient donc, puisque v est une variable muette qu'on remplace avantageusement par u et que l'on factorise $1+u^3 = (1+u)(u^2-u+1)$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^3} + \int_0^1 \frac{udu}{1+u^3} = \int_0^1 \frac{(1+u)du}{1+u^3} = \int_0^1 \frac{du}{u^2-u+1}$.

b. Avec cette expression de I, et en mettant $u^2 - u + 1$ sous la forme $\Big(u - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\Big(1 + \Big(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\Big)^2\Big)$, on trouve $I = \int_0^1 \frac{du}{u^2-u+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}du}{\left(1+\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ par imparité de Arctan. Or $\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ donc $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

1.86 **a.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. De plus, comme $\forall t > 0,\ f(t) = \sqrt{t}\left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{t}} + b\sqrt{1+\frac{2}{t}}\right)$ et que $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$, on obtient en $+\infty$ le développement asymptotique $f(t) \underset{+\infty}{=} \sqrt{t}\left((1+a+b) + \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$.

- Si $1+a+b \neq 0$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} (1+a+b)\sqrt{t}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \pm\infty$ selon le signe de $1+a+b$: $\int_0^{+\infty} f$ diverge.
- Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2}+b \neq 0$, alors $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b+(a/2)}{\sqrt{t}}$ donc f garde un signe constant au voisinage de $+\infty$ et, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge d'après Riemann, $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge aussi donc $\int_0^{+\infty} f$ diverge.
- Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2}+b = 0$, alors $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge d'après Riemann. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Par conséquent, $\int_0^{+\infty} f$ converge si et seulement si $1+a+b = \frac{a}{2}+b = 0$, c'est-à-dire $a = -2$ et $b = 1$.

b. Dans ce cas, $\int_0^x f(t)dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{4}{3}(t+1)^{3/2} + \frac{2}{3}(t+2)^{3/2}\right]_0^x$ donc, puisque $(1+u)^{3/2} \underset{0}{=} 1 + \frac{3u}{2} + O(u^2)$, on a $\int_0^x f(t)dt = \frac{2x^{3/2}}{3}\left(1 - 2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2} + \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3/2}\right) + \frac{4}{3} - \frac{2(2)^{3/2}}{3} \underset{0}{=} \frac{4}{3}(1-\sqrt{2}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Ainsi, on obtient $I = \int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2})dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = \frac{4}{3}(1-\sqrt{2}) \sim -0,55$.

1.87 Analyse : soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On peut ré-écrire la troisième condition, puisque f' est continue de primitive f, sous la forme $\forall x \geqslant 0,\ \int_0^x f'(t)^2 dt \geqslant f(x+f(x)) - f(x) = \int_x^{x+f(x)} f'(t)dt$. Dans cette dernière intégrale, on effectue le changement de variable $t = x + f(u) = \varphi(u)$, licite puisque φ est strictement croissante, de classe C^1 et réalise une bijection de $[0;x]$ dans $[x;x+f(x)]$, et on obtient $\int_x^{x+f(x)} f'(t)dt = f(x+f(x)) - f(x) = \int_0^x f'(x+f(u))f'(u)du$. Par linéarité de l'intégrale, comme on a $\forall x \geqslant 0,\ \int_0^x f'(t)^2 dt \geqslant \int_0^x f'(x+f(u))f'(u)du$, il vient $\forall x \geqslant 0,\ \int_0^x f'(t)\big(f'(t) - f'(x+f(t))\big)dt \geqslant 0$.
Or, par hypothèse, $\forall t \in [0;x],\ f'(t) > 0$ et $f'(t) - f'(x+f(t)) \leqslant 0$ car $t \leqslant x < x + f(t)$ puisque f' est croissante. La fonction $g : t \mapsto f'(t)\big(f'(t) - f'(x+f(t))\big)$ est continue et négative donc $\int_0^x f'(t)\big(f'(t) - f'(x+f(t))\big)dt \leqslant 0$ et on conclut que $\int_0^x f'(t)\big(f'(t) - f'(x+f(t))\big)dt = 0$. Un théorème du cours nous apprend, pour $x > 0$, que g étant continue et négative et d'intégrale nulle sur $[0;x]$ ne peut être que la fonction nulle. On a donc $\forall x > 0,\ \forall t \in [0;x],\ f'(t)\big(f'(t) - f'(x+f(t))\big) = 0$ donc $f'(t) - f'(x+f(t)) = 0$ car $f'(t) > 0$. Pour $x > 0$ fixé, on prend $t = 0$ et on obtient $f'(x) = f'(0)$ donc f' est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+$ puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$, il existe donc une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = ax$. Mais f est supposée strictement croissante ce qui impose $a > 0$.

Synthèse : Soit $a > 0$ et $f : x \mapsto ax$, alors $f(0) = 0$, f' est croissante et $f' = a$ est strictement positive et, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f'(t)^2 dt = \int_0^x a^2 dt = a^2 x = af(x) = a(x+f(x)) - ax = f(x+f(x)) - f(x)$.

En conclusion : par double implication, on a montré que les fonctions f vérifiant les conditions de l'énoncé sont exactement les fonctions linéaires $f : x \mapsto ax$ avec $a > 0$.

1.88 Méthode 1 : Comme f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a $ff' \underset{+\infty}{=} O(f)$ donc, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que ff' est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction ff' est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt$ converge ce qui garantit l'existence d'une limite finie de $\displaystyle\int_0^x f(t)f'(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc poser $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) \geqslant 0$ car $\displaystyle\int_0^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x = \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(0)}{2}$. Comme f est positive, $f(x) = \sqrt{f^2(x)}$ donc, par continuité de la fonction racine, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\ell}$. Mais comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on sait d'après le cours que ceci impose $\sqrt{\ell} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ comme attendu.

Méthode 2 : (méthode proposée par l'examinateur ???) supposons que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$. En niant $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \geqslant a,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout réel $a \geqslant 0$, il existe $x > a$ tel que $f(x) > \varepsilon$. On crée une suite de points $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de la manière suivante :

- avec $a = \dfrac{1}{2}$, il existe $x_0 > \dfrac{1}{2}$ tel que $f(x_0) > \varepsilon$.
- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les réels positifs $x_0, \cdots, x_n$ soient définis, alors on prend $a = 1 + x_n \geqslant 0$ et il existe $x_{n+1} > 1 + x_n$ tel que $f(x_{n+1}) > \varepsilon$.

Par construction, on a défini une suite strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n > 1$ et $f(x_n) > \varepsilon$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \geqslant 0,\ |f'(x)| \leqslant M$. D'après le théorème des accroissements finis, $|f(x) - f(x_n)| \leqslant M|x - x_n|$ donc $f(x) = f(x) - f(x_n) + f(x_n) > \varepsilon - M|x - x_n|$ donc $f(x) > \dfrac{\varepsilon}{2}$ dès que $|x - x_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Posons $\alpha = \mathrm{Min}\left(\dfrac{\varepsilon}{2M}, \dfrac{1}{2}\right) > 0$, on a donc $\forall x \in [x_n - \alpha; x_n + \alpha],\ f(x) > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par construction, les segments $[x_n - \alpha; x_n + \alpha]$ ne se chevauchent pas car $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. On en déduit, puisque f est positive, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{x_n+\alpha} f(t)dt \geqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\int_{x_k-\alpha}^{x_k+\alpha} f(t)dt\right) \geqslant (n+1)(2\alpha)(\varepsilon/2) = (n+1)\alpha\varepsilon$ (I). Or la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est croissante et elle tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ par hypothèse ce qui est contredit par l'inégalité (I) qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^{x_n+\alpha} f(t)dt = +\infty$.

On a donc prouvé par l'absurde que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1.89 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{t^\alpha}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Comme $f_\alpha(t) \underset{0}{\sim} t^\alpha = \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$, la fonction f_α est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $-\alpha < 1 \iff \alpha > -1$ par comparaison et par le critère de Riemann (en 0^+).
- Comme $f_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} t^{\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$, f_α est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $1 - \alpha > 1 \iff \alpha < 0$ par comparaison et par le critère de Riemann (en $+\infty$).

Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha \in]-1;0[$. Et comme f_α est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ converge si et seulement si f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \in]-1;0[$.

1.90 **a.** Si $x=0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t\sin(xt)}{1+t^2}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc y est intégrable et $f(0)$ existe.

L'existence de $f(x)$ et celle de $f(-x)$ sont équivalentes par imparité de la fonction $\sin$ et, en cas de convergence, on aura $f(-x)=-f(x)$ donc f est une fonction impaire sur son ensemble de définition.

Soit $x>0$, posons $u : t \mapsto -\dfrac{\cos(xt)}{x}$ et $v : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)=0$ par croissances comparées. Ainsi, comme $u'(t)=\sin(xt)$ et $v'(t)=\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-t^2)\cos(xt)}{x(1+t^2)^2}dt$ sont de même nature et, en cas de convergence, on aura $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-t^2)\cos(xt)}{x(1+t^2)^2}dt$. Or $g_x : t \mapsto \dfrac{(1-t^2)\cos(xt)}{x(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ceci montre l'existence de $f(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-t^2)\cos(xt)}{x(1+t^2)^2}dt$.

b. Pour $x>0$, puisque $f(x)$ existe, on effectue le changement de variable $t=\dfrac{u}{x}=\varphi(u)$ avec φ strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u}{x}.\frac{\sin(u)}{1+\frac{u^2}{x^2}}.\frac{1}{x}du=\int_0^{+\infty}\frac{u\sin(u)}{x^2+u^2}du$.

Ainsi, $f(x)-I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\frac{u}{x^2+u^2}-\frac{1}{u}\Big)\sin(u)du=-x^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u(x^2+u^2)}du$. Comme on sait que $|\sin(u)|\leqslant u$ et que la fonction $u\mapsto\dfrac{1}{x^2+u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut majorer par inégalité triangulaire et on obtient $0\leqslant|I-f(x)|\leqslant x^2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{du}{x^2+u^2}=x^2\Big[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{u}{x}\Big)\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi x}{2}$. Par théorème d'encadrement, comme $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\pi x}{2}=0$, on obtient la limite $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=I$.

Comme $|\cos(xt)|\leqslant 1$ et que la fonction $t\mapsto\dfrac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, encore une fois par inégalité triangulaire, avec l'expression vue en **a.**, on a $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2}dt$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

c. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ converge d'après l'énoncé, on peut utiliser Chasles pour l'écrire sous la forme $I=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{k\pi+\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt$. Pour $k\in\mathbb{N}$, on effectue le changement de variable $t=u+k\pi=\varphi_k(u)$ dans $\displaystyle\int_{k\pi}^{k\pi+\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt$ avec φ_k de classe C^1 sur le segment $[0;\pi]$ pour avoir $\displaystyle\int_{k\pi}^{k\pi+\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin(u+k\pi)}{u+k\pi}du$. Or $\sin(u+k\pi)=(-1)^k\sin(u)$ ce qui donne bien $\displaystyle\int_{k\pi}^{k\pi+\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt=(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{u+k\pi}du$. Finalement, on a bien une expression de I sous forme de somme de série numérique, $I=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{u+k\pi}du$.

d. Posons, pour $k\in\mathbb{N}$, $u_k=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{u+k\pi}du$. Alors $u_k>0$ car $\sin$ est strictement positive sur $]0;\pi[$ et que $u\mapsto\dfrac{\sin(u)}{u+k\pi}$ est continue sur $[0;\pi]$. Comme $\forall u\in[0;\pi],\ \dfrac{\sin(u)}{u+(k+1)\pi}\leqslant\dfrac{\sin(u)}{u+k\pi}$, on obtient $u_{k+1}\leqslant u_k$ par croissance de l'intégrale. De plus, si $k\geqslant1$, il vient $0\leqslant u_k\leqslant\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{k\pi}du$ en majorant $\sin(u)$ par 1 et en minorant $u+k\pi$ par $k\pi$. Ainsi, $0\leqslant u_k\leqslant\dfrac{1}{k}$ donc, par encadrement, $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=0$. Comme la suite $(u_k)_{k\geqslant0}$ est décroissante et tend vers 0, le critère spécial des séries alternées montre que $\sum\limits_{k\geqslant0}(-1)^k u_k$ converge. On le savait déjà d'après la question précédente. Mais il dit aussi que les sommes partielles consécutives constituent un encadrement de la somme I. Ainsi, pour tout entier n, en notant $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$, on a la double inégalité $S_{2n+1} \leqslant I \leqslant S_{2n}$. En particulier, $u_0 - u_1 \leqslant I \leqslant u_0$ donc $I \geqslant u_0 - u_1$. Or, en écrivant $u_0 - u_1 = \int_0^{\pi} \sin(u)\Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+\pi}\Big)du = \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin(u)}{u(u+\pi)}du$, comme $u \mapsto \frac{\pi\sin(u)}{u(u+\pi)}$ est continue, positive et non nulle sur $[0;\pi]$, on a $u_0 - u_1 > 0$ donc $I > 0$. On le sait déjà car on connaît l'intégrale de Dirichlet $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ mais ce n'est pas au programme et ce qui précède montre bien que $I > 0$.

Comme $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = I > 0$, la fonction f n'est pas continue en 0.

1.91 **a.** Les fonctions $u : t \mapsto \lambda t + \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lambda$ donc, par intégration par parties, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t}dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t + \cos(t)}{t^2}dt$. Or $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $\frac{\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est absolument convergente par comparaison et, même si $t \mapsto \frac{\lambda t}{t^2} = \frac{\lambda}{t}$ est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t}dt$ ne converge que si $\lambda = 0$ d'après Riemann. Ainsi, par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t}dt$ converge si et seulement si $\lambda = 0$.

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut définir $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en 0. De plus, f est continue sur le segment $[0;T]$ donc elle y est bornée, et étant T-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1 : notons $M = ||f||_{\infty,\mathbb{R}}$. Soit $x \geqslant 0$ et l'entier n_x tel que n_xT soit le plus grand multiple de T inférieur à x, ce qui se traduit par $n_xT \leqslant t < (n_x+1)T \iff n_x \leqslant \frac{x}{T} < n_x + 1$ donc $n_x = \Big\lfloor \frac{x}{T} \Big\rfloor$. Par Chasles, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{n_xT}^{x} f(t)dt$. Posons $I = \int_0^T f(t)dt$, ce qui donne $F(x) = n_xI + \int_{nT}^{x} f(t)dt$. Par inégalité triangulaire, on a $\Big|\int_{n_xT}^{x} f(t)dt\Big| \leqslant \int_{n_xT}^{x} Mdt = M(x - n_xT) \leqslant MT$ et on a donc $F(x) \underset{+\infty}{=} n_xI + O(1)$. L'inégalité $n_xT \leqslant x < (n_x+1)T$ montre que $x - n_xT \underset{+\infty}{=} O(1)$ donc $n_x \underset{+\infty}{=} \frac{x}{T} + O(1)$. Posons $m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{I}{T}$ qui représente la valeur moyenne de f sur une période, de sorte que ce qui précède s'énonce $F(x) \underset{+\infty}{=} \frac{I}{T}x + O(1) \underset{+\infty}{=} mx + O(1)$.

Méthode 2 : posons $m = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)du = \frac{F(T)}{T}$, $g : x \mapsto F(x) - mx$ et $h : x \mapsto g(x+T) - g(x)$. Comme F est dérivable par le théorème fondamental de l'intégration, g et h le sont aussi et on a $h'(x) = g'(x+T) - g'(x)$ donc $h'(x) = F'(x+T) - m - F'(x) + m = f(x+T) - f(x) = 0$ par hypothèse. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante et $h(0) = g(T) - g(0) = F(T) - F(T) = 0$ donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. g est donc T-périodique et, comme avant puisque g est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) \underset{+\infty}{=} mx + O(1)$.

Concluons : les fonctions $u : t \mapsto \lambda t - F(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lambda - m$ car $u(t)v(t) \underset{+\infty}{=} \frac{\lambda t - (mt + O(1))}{t}$. Par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t - F(t)}{t^2}dt$ ont même nature. Comme $\frac{\lambda t - F(t)}{t^2} = \frac{\lambda t - mt - (F(t) - mt)}{t^2} = \frac{(\lambda - m)}{t} + \frac{F(t) - mt}{t^2}$ et $\frac{F(t) - mt}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ d'après ce qui précède, comme à la question **a.**, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ converge si et seulement si $\lambda = m$.

1.92 **a.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geqslant 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a;b],\ h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0;1[$ tel que $h(c) = 0$ donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f, on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c, devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question **a.**, on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c, devient $f'(c)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0;1[\subset]0;\pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$. Comme en **b.**, on a $f(c) = c$. Si f n'était pas injective sur $[0;1]$, alors il existerait deux réels x et y tels que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ et $f(x) = f(y)$ et on aurait $f \circ f(x) = f \circ f(y) = \cos(x) = \cos(y)$ et la fonction $\cos$ ne serait pas injective sur $[0;1]$. NON !

Ainsi, f est injective sur $[0;1]$ donc, par continuité, elle y est strictement croissante ou strictement décroissante. Comme f est continue en c, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c-\alpha; c+\alpha],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = \mathrm{Min}(c, 1-c) \sim 0,26 > 0$ dans $|f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$). On aurait donc, comme f est strictement monotone sur $[c-\alpha; c+\alpha]$ et que $f([c-\alpha; c+\alpha]) \subset [0;1]$, intervalle sur lequel f est aussi strictement monotone (la même monotonie) et, par composée, la fonction $f \circ f = \cos$ serait strictement croissante sur $[c-\alpha; c+\alpha]$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

1.93 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{\omega x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(x)| = x^n e^{-x/2} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ existe. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto \frac{e^{\omega x}}{\omega}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $I_n = -\frac{n}{\omega}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{\omega x}dx = -\frac{n}{\omega}I_{n-1}$. Par une récurrence simple, on en déduit que $I_n = n!(-j)^{n+1}$ car $\omega = j^2$ donc $\frac{1}{\omega} = j$.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Im}(I_{3k-1}) = 0 = \mathrm{Im}\Big(\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{\omega x}dx\Big) = -\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{-x/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)dx$. Dans $\int_0^{+\infty} x^{3k-1}e^{-x/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)dx = 0$ (vue sur $\mathbb{R}_+^*$), on pose $x = \varphi(t) = t^{1/3}$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} t^{k-(1/3)}e^{-t^{1/3}/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\Big)t^{-2/3}dt = 0$ donc, en posant, $n = k-1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/3}/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\Big)t^n dt = 0$. En définissant $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $g(t) = e^{\frac{-\sqrt[3]{t}}{2}}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{t}}{2}\Big)$, la fonction g est continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} g(t)t^n = 0$.

b. L'énoncé nous incite à admettre le théorème de Stone-Weierstrass, il s'agit de l'approximation uniforme de toute fonction continue sur un segment par des polynômes. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe par ce théorème un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall t \in [a;b],\ |f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $||f - P||_{\infty,[a;b]} \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, en écrivant $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n$, on a $\int_a^b (f-P)\overline{f} = \int_a^b |f|^2 - \int_a^b \overline{f}|P$ or, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b \overline{f}P = \sum_{n=0}^{d} \int_a^b \overline{f(t)}t^n dt = \overline{\sum_{n=0}^{d} \int_a^b f(t)t^n dt} = 0$ donc $\int_a^b (f-P)\overline{f} = \int_a^b |f|^2$. Or, par inégalité triangulaire, $\left|\int_a^b (f-P)\overline{f}\right| \leqslant \int_a^b |f-P|\,|f| \leqslant ||f-P||_{\infty,[a;b]} \int_a^b |f| \leqslant \varepsilon(b-a)||f||_{\infty,[a;b]}$ car f est bornée sur $[a;b]$ puisque continue sur le segment $[a;b]$. En faisant tendre ε vers 0, il vient $\int_a^b |f|^2 = 0$. Comme $|f|^2$ est positive et continue sur $[a;b]$ non réduit à un point, $|f|^2$ est nulle sur $[a;b]$, donc f est nulle sur $[a;b]$ comme attendu.

1.94 La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+m\sin^2(t)}$ est continue sur le segment $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $I = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1+m\sin^2(t)}$ existe. Soit maintenant f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et, puisque $\sin^2(t) = \dfrac{\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)}$, on en déduit que, pour $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f(t) = \dfrac{1}{1+m\sin^2(t)} = \dfrac{1}{1+m\frac{\tan^2(t)}{1+\tan^2(t)}} = \dfrac{1+\tan^2(t)}{1+(m+1)\tan^2(t)}$. Or $\varphi : t \mapsto \tan(t)$ est une bijection strictement croissante et C^1 de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(t) = 1+\tan^2(t)$, donc par changement de variable, $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{du}{1+(m+1)u^2} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{m+1}\,u\right)\right]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{m+1}}$. Il y avait d'autres questions.

1.95 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_x(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+(1/2)}}$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+(3/2)}}$. D'après le critère de Riemann, g_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $x + \frac{1}{2} < 1$ et g_x est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\frac{3}{2} + x > 1$ donc f est définie sur $I = \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ car pour une fonction continue positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont équivalentes et que g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle l'est sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$.

b. Pour $x \in I$, on pose $t = \dfrac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement décroissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = \int_{+\infty}^0 \dfrac{\sqrt{u}}{u^{-x}(1+u^{-1})}\left(-\dfrac{du}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} \dfrac{du}{u^{-x}\sqrt{u}(1+u)} = f(-x)$ donc f est paire.

c. On a admis qu'en notant $g : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{t}(1+t)} = \dfrac{e^{-x\ln(t)}}{\sqrt{t}(1+t)}$, on a $\forall x \in I,\ f''(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)dt$ (c'est la formule de Leibniz). On peut bien sûr le montrer en utilisant deux fois le théorème de dérivation sous le signe somme(voir plus tard dans l'année). Comme $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{(-\ln(t))^2 e^{-x\ln(t)}}{\sqrt{t}(1+t)} = \dfrac{(-\ln(t))^2}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \geqslant 0$, on a $f''(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)dt \geqslant 0$ donc f est convexe. Comme f est paire et dérivable, sa dérivée en 0 est nulle donc, comme f' est croissante car $f'' \geqslant 0$ sur l'intervalle I, f' est positive sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ et négative sur $\left]-\frac{1}{2};0\right]$ donc f admet son minimum absolu en 0. Comme $f(0) = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \left[2\operatorname{Arctan}(\sqrt{t})\right]_0^{+\infty} = \pi$, on a bien $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(0) = \pi$.

d. Comme $\dfrac{1}{(1/2)-x} = \int_0^1 \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}} = \int_0^1 \dfrac{dt}{t^{x+(1/2)}} = \left[\dfrac{t^{(1/2)-x}}{(1/2)-x}\right]_0^1$, on évalue la différence entre $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ et $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}}$ pour $x \in I \cap \mathbb{R}_+$. Or $\left|\int_0^1 \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} - \int_0^1 \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}}\right| = \int_0^1 \dfrac{tdt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ et, comme $\dfrac{t}{1+t} \leqslant t$, $\int_0^1 \dfrac{tdt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \leqslant \int_0^1 \dfrac{dt}{t^{x-(1/2)}} = \left[\dfrac{t^{(3/2)-x}}{(3/2)-x}\right]_0^1 = \dfrac{1}{(3/2)-x} \leqslant 1$ d'où $\left|\int_0^1 \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} - \dfrac{1}{(1/2)-x}\right| \leqslant 1$.

e. Avec Chasles, $f(x) = \int_0^1 \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} + \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)}$ et $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \underset{\frac{1}{2}^-}{=} \dfrac{1}{(1/2)-x} + O(1)$

avec **d.**. De plus, $0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+(3/2)}} = \left[\frac{t^{-(1/2)-x}}{-(1/2)-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(1/2)+x} \leqslant 2$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\sqrt{t}(1+t)} \underset{\frac{1}{2}^-}{=} O(1)$. Par somme, $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{=} \frac{1}{(1/2)-x} + O(1)$. Or $\lim\limits_{x\to(1/2)^-} \frac{1}{(1/2)-x} = +\infty$ donc $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{=} \frac{1}{(1/2)-x} + o\left(\frac{1}{(1/2)-x}\right)$, d'où $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{\sim} \frac{1}{(1/2)-x}$. Par parité de f, on a aussi $f(x) \underset{\frac{-1}{2}^+}{\sim} \frac{1}{(1/2)+x}$.

1.96 **a.** En prenant $x = y = 1$ dans la relation (1), on a $f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.

Pour $x > 0$, en prenant $y = \frac{1}{x}$ dans (1), on obtient $f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

b. Soit $x > 0$, les intégrales $\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$ sont bien définies car f est continue sur les segments $[x;2x]$ et $[1;2]$. Dans l'intégrale $\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$, on pose $t = \varphi(u) = ux$ qui est de classe C^1 sur le segment $[1;2]$ et on a donc par changement de variable (version sup.) $\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^2 f(ux)x\mathrm{d}u$. Or $f(ux) = f(u) + f(x)$ donc, par linéarité de l'intégrale, $\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = x\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u + xf(x)$. En divisant par $x > 0$, on a bien la relation attendue, $f(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t - \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$.

c. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet une primitive F et, par le théorème fondamental de l'intégration, il vient $f(x) = \frac{F(2x)-F(x)}{x} - (F(2)-F(1))$, ce qui prouve par opérations que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc dériver (1) par rapport à y, ce qui donne $\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2,\ xf'(xy) = f'(y)$ (2). En prenant maintenant $y = 1$ dans (2), on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$. Ainsi, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ f(x) = f'(1)\ln(x) + C$ (3). En prenant $x = 1$ dans (3), comme $f(1) = 0$, on a $C = 0$ donc $\forall x > 0,\ f(x) = f'(1)\ln(x)$.

Les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$ sont proportionnelles à $\ln$.

1.97 **a.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geqslant 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a;b],\ h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0;1[$ tel que $h(c) = 0$ donc un unique point fixe c de cos sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f, on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c, devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question **a.**, on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c, devient $f'(c)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0;1[\subset]0;\pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$. Comme en **b.**, on a $f(c) = c$. Si f n'était pas injective sur $[0;1]$, alors il existerait deux réels x et y tels que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ et $f(x) = f(y)$ et on aurait $f \circ f(x) = f \circ f(y) = \cos(x) = \cos(y)$ et la fonction cos ne serait pas injective sur $[0;1]$. NON !

Ainsi, f est injective sur $[0;1]$ donc, par continuité, elle y est strictement croissante ou strictement décroissante.

Comme f est continue en c, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c-\alpha; c+\alpha]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = \mathrm{Min}(c, 1-c) \sim 0,26 > 0$ dans $|f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$). On aurait donc, comme f est strictement monotone sur $[c-\alpha; c+\alpha]$ et que $f([c-\alpha; c+\alpha]) \subset [0;1]$, intervalle sur lequel f est aussi strictement monotone (la même monotonie) et, par composée, la fonction $f \circ f = \cos$ serait strictement croissante sur $[c-\alpha; c+\alpha]$. NON ! Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

1.98 Les fonctions $f : x \mapsto \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g : x \mapsto \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ sont continues sur $I = \left]\frac{2}{\pi}; +\infty\right[$ car les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont strictement positives sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\lim\limits_{x \to (2/\pi)^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, f se prolonge par continuité en $\frac{2}{\pi}$ en posant $f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \ln(1) = 0$. Par contre, $\lim\limits_{x \to (2/\pi)^+} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to (2/\pi)^+} g(x) = -\infty$.

• Comme $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\ln(x) + \ln\left(\frac{\sin(1/x)}{(1/x)}\right)$, on a $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -\ln(x) + o(1)$ donc $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Ainsi, f n'est pas intégrable sur I et, comme f est négative sur I, $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$ diverge.

• Comme $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1, bijective et strictement décroissante de $J = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $I = \left]\frac{2}{\pi}; +\infty\right[$, on sait d'après le cours que les intégrales $\int_I g(x)dx$ et $\int_J g(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on aura $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx = \int_{\pi/2}^{0} \ln(\cos(t))\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2}dt$. En posant $h : t \mapsto \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = \frac{\ln(1-(1-\cos(t)))}{t^2}$, comme $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, on a $h(t) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$ car $\ln(1-u) \underset{0}{\sim} -u$ donc $\lim\limits_{t \to 0^+} h(t) = -\frac{1}{2}$ et on peut prolonger h par continuité en 0 en posant $h(0) = -\frac{1}{2}$. De plus, en posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ avec $u \in J$, $h(t) = \frac{\ln(\cos((\pi/2)-u)))}{((\pi/2)-u)^2} = \frac{\ln(\sin(u))}{((\pi/2)-u)^2} \underset{0}{\sim} \frac{4}{\pi^2}\ln(u)$ comme avant. Par conséquent, comme $\ln(u) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$, on a $h(t) \underset{(\pi/2)^-}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{(\pi/2)-t}}\right)$ et g est intégrable sur J par comparaison aux intégrales de Riemann. Ainsi, $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$ converge.

1.99 **a.** Comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ d'où $\forall t \in [0;1]$, $e^{i\theta}t \neq 1$ et la fonction $t \mapsto e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}$ est continue sur le segment $[0;1]$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}dt$ est bien définie. Comme $e^{in\theta}t^n = (e^{i\theta}t)^n$ avec Moivre et $e^{i\theta}t \neq 1$, on a la relation $\frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta}t)^k$ donc $e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta}t^k$. Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}dt = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} \int_0^1 t^k dt = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1}$. On effectue ensuite le changement d'indice $m = k+1$ et on a bien $\sum\limits_{m=1}^{n} \frac{e^{im\theta}}{m} = \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}dt$.

b. Posons $I = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t}dt$, qui existe bien car $t \mapsto \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t}$ est continue sur le segment $[0;1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k}$, qui est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$, on a donc d'après **a.** et par linéarité de l'intégrale, $S_n - I = -\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}dt$. Par inégalité triangulaire, on a $|S_n - I| \leqslant \int_0^1 |e^{i\theta}| \times \frac{|e^{in\theta}t^n|}{|1 - e^{i\theta}t|}dt = \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - e^{i\theta}t|}dt$. Il s'agit de minorer le dénominateur en écrivant

$|1-e^{i\theta}t|^2=(1-\cos(\theta)t)^2+\sin^2(\theta)t^2=1-2\cos(\theta)t+t^2=(t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)$ pour $t\in[0;1]$. Ainsi, $|1-e^{i\theta}t|^2\geqslant \sin^2(\theta)$ donc $|1-e^{i\theta}t|\geqslant|\sin(\theta)|>0$ et $|S_n-I|\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{|\sin(\theta)|}dt=\frac{1}{(n+1)|\sin(\theta)|}$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=I$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k}=\int_0^1\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}dt$.

c. $t\mapsto\dfrac{\cos(\theta)-t+i\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}$ est continue sur $[0;1]$ car $t^2-2t\cos(\theta)+1=|1-e^{i\theta}t|^2>0$. Par définition d'une intégrale complexe, $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(\theta)-t+i\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt=\int_0^1\frac{\cos(\theta)-t}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt+i\int_0^1\frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt$. Or $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(\theta)-t}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt=-\frac{1}{2}\Big[\ln(t^2-2t\cos(\theta)+1)\Big]_0^1$ car $(t^2-2t\cos(\theta)+1)'=2(t-\cos(\theta))$ donc $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(\theta)-t}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt=-\frac{1}{2}\ln(1-2\cos(\theta)+1)=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos(\theta))$.

De plus, $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt=\int_0^1\frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}dt=\int_0^1\frac{\sin(\theta)}{(t-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}dt$.

Comme $\sin(\theta)\neq0$, on a donc $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt=\int_0^1\frac{\frac{1}{\sin(\theta)}}{1+\left(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}dt=\left[\text{Arctan}\left(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\right]_0^1$ donc $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt=\text{Arctan}\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$ par imparité de Arctan.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(\theta)-t+i\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt=-\frac{1}{2}\ln\big(2-2\cos(\theta)\big)+i\,\text{Arctan}\left(\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)+i\,\text{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.

d. Si $\theta\in]0;\pi[$, on a bien $\theta\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. D'après **b.**, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\theta}}{k}=\int_0^1\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}dt$. Or, en multipliant par la quantité conjuguée, $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}t}dt=\int_0^1\frac{e^{i\theta}(1-e^{-i\theta}t)}{|1-e^{i\theta}t|^2}dt=\int_0^1\frac{e^{i\theta}-t}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt$ est l'intégrale de la question **c.**. En identifiant parties réelle et imaginaire des séries et des intégrales, on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k}=\int_0^1\frac{\cos(\theta)-t}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k}=\int_0^1\frac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}dt$. Or $1-\cos(\theta)=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donc $-\frac{1}{2}\ln\big(2-2\cos(\theta)\big)=-\frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=-\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$. Comme $\sin(\theta)=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a aussi $\text{Arctan}\left(\dfrac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)=\text{Arctan}\left(\dfrac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\right)=\text{Arctan}\big(\tan(\theta/2)\big)=\dfrac{\theta}{2}$ car $\dfrac{\theta}{2}\in\Big]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big[$.
De plus, $\text{Arctan}\left(\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)=\text{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ car $\dfrac{\pi}{2}-\theta\in\Big]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\Big[$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k\theta)}{k}=-\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k\theta)}{k}=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$.

1.100 **a.** Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n:t\mapsto e^{-(1-i)t}t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(t)|=t^ne^{-t}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-(1-i)t}t^ndt$ existe. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u(t)=t^n$ et $v(t)=\dfrac{e^{(i-1)t}}{i-1}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ par croissances comparées donc $I_n=0-\dfrac{n}{i-1}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{(i-1)t}t^{n-1}dt=\frac{n(i+1)}{2}I_{n-1}$ par intégration par parties. Par une récurrence très simple, puisque $I_0=\left[\dfrac{e^{(i-1)t}}{i-1}\right]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{i+1}{2}$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=n!\left(\dfrac{i+1}{2}\right)^{n+1}$.

b. Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $g_n:t\mapsto e^{-t^{1/4}}\sin(t^{1/4})t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|g_n(t)|\leqslant e^{-t^{1/4}}t^n\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

par croissances comparées donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}}\sin(t^{1/4})t^n dt$ existe. On effectue dans J_n le changement de variable $t = u^4 = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de sorte que $J_n = 4\int_0^{+\infty} e^{-u}\sin(u)u^{4n+3}du = 4\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-u}e^{iu}u^{4n+3}du\right)$ donc $J_n = 4\,\mathrm{Im}\,(I_{4n+3})$. Or $I_{4n+3} = (4n+3)!\left(\frac{i+1}{2}\right)^{4n+4} = (4n+3)!\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{4(n+1)} = (4n+3)!(-1)^{n+1}$ est réel donc $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}}\sin(t^{1/4})t^n dt = 0$.

1.101 D'après l'énoncé, on pose $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(y) = f(\sqrt{y})$ pour $y \geqslant 0$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que f est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, g est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par la formule de TAYLOR-YOUNG, comme f est de classe C^4 et paire donc que $f'(0) = 0$ et $f'''(0) = 0$, on a $f(x) \underset{0}{=} f(0) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4)$. En composant par $\sqrt{y}$, on obtient le développement limité d'ordre 2 en 0 pour g, à savoir $g(y) = f(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f(0) + \frac{f''(0)}{2}y + \frac{f^{(4)}(0)}{24}y^2 + o(y^2)$.

<u>Aspect C^1</u> : comme g admet un développement limité d'ordre 1 en 0, g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$. Pour $y > 0$, on a $g'(y) = \frac{f'(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$. Or, f' étant de classe C^3 avec $f'(0) = 0$ car f est paire, on a le développement limité à l'ordre 1 suivant de f' en 0, à savoir $f'(x) \underset{0}{=} f''(0)x + o(x)$. En posant $x = \sqrt{y}$, on obtient $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y} + o(\sqrt{y})$ qui justifie que $g'(y) \underset{0}{=} \frac{f''(0)}{2} + o(1)$ donc que $\lim\limits_{y\to 0^+} g'(y) = g'(0)$ et g' est continue en 0. Avec ce qui précède, on a bien établi l'aspect C^1 de g sur $\mathbb{R}_+$.

<u>Aspect C^2</u> : pour $y > 0$, comme $g'(y) = \frac{f'(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$, on a $\frac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} = \frac{f'(\sqrt{y}) - f''(0)\sqrt{y}}{2y\sqrt{y}}$. Comme f' est de classe C^3 et paire sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 par TAYLOR-YOUNG qui s'écrit, comme $f'(0) = f'''(0) = 0$, $f'(x) \underset{0}{=} f''(0)x + \frac{f^{(4)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$ donc, en composant par $\sqrt{y}$, on obtient $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y} + \frac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y})$. Ceci montre que $\frac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} \underset{0}{=} \frac{f^{(4)}(0)}{12} + o(1)$ donc que g est deux fois dérivable en 0 avec $g''(0) = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} = \frac{f^{(4)}(0)}{12}$. Montrons que g'' est continue en 0.

Après calculs, on a $\forall y > 0,\ g''(y) = \frac{\sqrt{y}\,f''(\sqrt{y}) - f'(\sqrt{y})}{4y\sqrt{y}}$. Or $f'(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0)\sqrt{y} + \frac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y})$ et, comme f'' est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on a par TAYLOR-YOUNG $f''(x) \underset{0}{=} f''(0) + \frac{f^{(4)}(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ donc, en composant par $\sqrt{y}$, cela donne $f''(\sqrt{y}) \underset{0}{=} f''(0) + \frac{f^{(4)}(0)}{2}y + o(y)$. En reportant dans l'expression de $g''(y)$,
$g''(y) = \frac{1}{4y\sqrt{y}}\left[\sqrt{y}\left(f''(0) + \frac{f^{(4)}(0)}{2}y + o(y)\right) - \left(f''(0)\sqrt{y} + \frac{f^{(4)}(0)}{6}y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y})\right)\right] \underset{0}{=} \frac{f^{(4)}(0)}{12} + o(1)$. Ceci montre que $\lim\limits_{y\to 0^+} g''(y) = g''(0) = \frac{f^{(4)}(0)}{12}$ donc que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ avec ce qui précède. Par le théorème de prolongement C^1 (ici de g' en 0), le calcul préalable de $g''(0)$ n'était pas nécessaire.

1.102 **a.** Par convention, si $t > 0$, on prendra $0^t = \lim\limits_{x\to 0^+} x^t = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{t\ln(x)} = 0$.

<u>Méthode 1</u> : comme $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 et concave car $\forall x > 0,\ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, on sait que

$\forall(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall\lambda \in [0;1],\ \ln(\lambda a + (1-\lambda)b) \geqslant \lambda\ln(a) + (1-\lambda)\ln(b)$. Comme $\exp$ est croissante, on en déduit que $\exp(\ln(\lambda a + (1-\lambda)b)) = \lambda a + (1-\lambda)b \geqslant a^\lambda b^{1-\lambda} = \exp(\lambda\ln(a) + (1-\lambda)\ln(b))$.

Avec $t \in]0;1[$, $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, considérons des cas :

- si $u > 0$ et $v > 0$, on prend $\lambda = t$, $a = u$ et $b = v$ ci-dessus et on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.
- si $u = 0$ et $v > 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1-t)v = (1-t)v > 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.
- si $u > 0$ et $v = 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1-t)v = tu > 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.
- si $u = 0$ et $v = 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1-t)v = 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.

Méthode 2 : soit $t \in]0;1[$, soit $g_t : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g_t(u) = u^t - tu - (1-t)$. La fonction g_t est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $g_t(0) = t - 1 < 0$ et on a $\forall u > 0,\ g_t'(u) = tu^{t-1} - t = t\Big(\dfrac{1}{u^{1-t}} - 1\Big)$ donc g_t est croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Comme $g(1) = 0$, la fonction g_t est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in]0;1[,\ u^t \leqslant tu + (1-t)$ (1). Traitons deux cas :

- si $v = 0$, $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1-t)v = tu \geqslant 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$.
- si $v > 0$, en remplaçant u par $\dfrac{u}{v}$ dans (1), on a $\Big(\dfrac{u}{v}\Big)^t \leqslant t\dfrac{u}{v} + (1-t)$ puis, en multipliant par $v > 0$, on a $\dfrac{u^t v}{v^t} = u^t v^{1-t} \leqslant tu + (1-t)v$ comme attendu.

b. Pour $A \in \mathbb{R}_+$ et des fonctions $g, h : [0;A] \to \mathbb{R}$ continues, comme $|g|^p$ et $|h|^q$ sont continues sur un segment, les réels $I = \Big(\displaystyle\int_0^A |g|^p\Big)^{1/p} \in \mathbb{R}_+$ et $J = \Big(\displaystyle\int_0^A |h|^q\Big)^{1/q} \in \mathbb{R}_+$ existent. Si $A = 0$, l'inégalité à établir est claire car elle se ramène à $0 \leqslant 0$. Si $A > 0$, traitons des cas :

- si $I = J = 0$, comme les fonctions $|g|^p$ et $|h|^q$ sont continues, positives, on en déduit que $g = h = 0$ sur $[0;A]$, ainsi, on a bien l'inégalité $\displaystyle\int_0^A |gh|dt = 0 \leqslant 0 = \Big(\int_0^A |g|^p\Big)^{1/p} \times \Big(\int_0^A |h|^q\Big)^{1/q}$.
- si $I = 0$ et $J > 0$, comme avant, $h = 0$ donc $\displaystyle\int_0^A |gh| = 0 \leqslant 0 = \Big(\int_0^A |g|^p\Big)^{1/p} \times \Big(\int_0^A |h|^q\Big)^{1/q}$.
- si $I > 0$ et $J = 0$, comme avant, $g = 0$ donc $\displaystyle\int_0^A |gh| = 0 \leqslant 0 = \Big(\int_0^A |g|^p\Big)^{1/p} \times \Big(\int_0^A |h|^q\Big)^{1/q}$.
- si $I > 0$ et $J > 0$, posons $t = \dfrac{1}{p} \in]0;1[$, $u = \dfrac{|g(x)|^p}{I^p} \in \mathbb{R}_+$ et $v = \dfrac{|h(x)|^q}{J^q} \in \mathbb{R}_+$ pour $x \in [0;A]$, on a $1 - t = \dfrac{1}{q}$ donc $u^t v^{1-t} = \dfrac{|g(x)|\,|h(x)|}{IJ} = \dfrac{|g(x)h(x)|}{IJ}$ donc, $\dfrac{|g(x)h(x)|}{IJ} \leqslant \dfrac{1}{p}\dfrac{|g(x)|^p}{I^p} + \dfrac{1}{q}\dfrac{|h(x)|^p}{J^p}$. On a donc $\dfrac{1}{IJ}\displaystyle\int_0^A |g(x)h(x)|dx \leqslant t\dfrac{\Big(\int_0^A |g(x)|^p dx\Big)^{1/p}}{\Big(\int_0^A |g(x)|^p dx\Big)^{1/p}} + (1-t)\dfrac{\Big(\int_0^A |h(x)|^q dx\Big)^{1/q}}{\Big(\int_0^A |h(x)|^q dx\Big)^{1/q}} = t + 1 - t = 1$ par croissance de l'intégrale. Par conséquent, $\displaystyle\int_0^A |g(t)h(t)|dt \leqslant IJ = \Big(\int_0^A |g(t)|^p dt\Big)^{1/p} \times \Big(\int_0^A |h(t)|^q dt\Big)^{1/q}$.

Dans tous les cas, on a l'inégalité $\displaystyle\int_0^A |g(t)h(t)|dt \leqslant \Big(\int_0^A |g(t)|^p dt\Big)^{1/p} \times \Big(\int_0^A |h(t)|^q dt\Big)^{1/q}$.

c. Si $p > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_n : t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, si $A \geqslant 0$, d'après **b.**, on a $\displaystyle\int_0^A |t^n f(t)|dt = \int_0^A |(f(t)e^{t/p})(t^n e^{-t/p})|dt \leqslant \Big(\int_0^A |f(t)|^p e^t dt\Big)^{1/p} \times \Big(\int_0^A t^{nq} e^{-tq/p} dt\Big)^{1/q}$. Comme f est strictement positive par hypothèse, $\displaystyle\int_0^A |f(t)|^p e^t dt \leqslant M = \int_0^{+\infty} |f(t)|^p e^t dt = \int_0^{+\infty} (f(t))^p e^t dt > 0$. De plus, on se rappelle de la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ qu'on note $\Gamma(x) = (x-1)!$ même pour un réel $x > 0$ (justifié car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$), ce qui permet d'écrire, avec le changement de variable $t = \dfrac{pu}{q} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{nq}e^{-tq/p}dt = \int_0^{+\infty} \frac{(pu)^{nq}}{q^{nq}}e^{-u}\frac{p}{q}du = \Big(\frac{p}{q}\Big)^{nq+1}\int_0^{+\infty} u^{nq}e^{-u}du = \Big(\frac{p}{q}\Big)^{nq+1}(nq)!$. Pour $A \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A t^nf(t)dt \leqslant M^{1/p}\Big(\frac{p}{q}\Big)^{n+(1/q)}\big((nq)!\big)^{1/q} = K\Big(\frac{p}{q}\Big)^n((nq)!)^{1/q}$ (2) en posant $K = M^{1/p}\Big(\dfrac{p}{q}\Big)^{1/q} \in \mathbb{R}_+$. Ceci justifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^nf(t)dt$ converge car la fonction a_n est positive. De plus, en passant à la limite dans (2) quand A tend vers $+$, on a $u_n \leqslant K\Big(\dfrac{p}{q}\Big)^n((nq)!)^{1/q}$.

Pour $n \geqslant 1$, on a donc $|u_n|^{-1/n} \geqslant K^{-1/n} \times \dfrac{q}{p} \times ((nq)!)^{-1/(nq)}$. On sait que Γ est convexe et croissante sur un intervalle du type $[\alpha;+\infty[$ (en fait $\alpha \sim 1,46$) donc dès que n est assez grand et que $nq+1 \geqslant \alpha$, on a $(nq)! \leqslant (\lfloor nq\rfloor+1)!$ donc $((nq)!)^{-1/(nq)} \geqslant ((\lfloor nq\rfloor+1)!)^{-1/(nq)} \geqslant ((\lfloor nq\rfloor+1)!)^{-1/(\lfloor nq\rfloor)}$. Alors, pour n assez grand $|u_n|^{-1/n} \geqslant v_n = K^{-1/n} \times \dfrac{q}{p} \times ((\lfloor nq\rfloor+1)!)^{-1/(\lfloor nq\rfloor)}$.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites strictement positives telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$, on a $a_n^{1/c_n} \underset{+\infty}{\sim} b_n^{1/c_n}$ en écrivant $\dfrac{a_n^{1/c_n}}{b_n^{1/c_n}} = \exp\Big(\dfrac{1}{c_n}\ln\Big(\dfrac{a_n}{b_n}\Big)\Big)$.

D'après Stirling, en notant $t_n = \lfloor nq\rfloor$ et puisque $\lfloor nq\rfloor \underset{+\infty}{\sim} nq$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(t_n+1)^{-1/t_n} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\sqrt{2\pi t_n}\Big)^{\frac{-1}{t_n}} = 1$, on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{q}{p} \times \bigg(\sqrt{2\pi t_n}\Big(\dfrac{t_n}{e}\Big)^{t_n}\bigg)^{\frac{-1}{t_n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{q}{p} \times \dfrac{e}{t_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{np}$ donc, par comparaison aux séries de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}|u_n|^{-1/n}$ diverge.

d. Si $p = 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, en écrivant $t^nf(t) = (f(t)e^t)(t^ne^{-t})$, comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^ne^{-t} = 0$ par croissances comparées, on a $t^nf(t) \underset{+\infty}{=} o(f(t)e^t)$ donc, par comparaison, la fonction $a_n : t \mapsto t^nf(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc u_n existe. Pour $n \geqslant 1$, la fonction $b_n : t \mapsto t^ne^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $b_n'(t) = nt^{n-1}e^{-t} - t^ne^{-t} = t^{n-1}e^{-t}(n-t)$ donc b_n est positive, croissante sur $[0;n]$ et décroissante sur $[n;+\infty[$ donc maximale en n où elle vaut $b_n(n) = n^ne^{-n}$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, on a la majoration $\displaystyle u_n = \int_0^{+\infty} t^nf(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^tb_n(t)dt \leqslant b_n(n)\int_0^{+\infty} f(t)e^tdt = Mn^ne^{-n}$ si $\displaystyle M = \int_0^{+\infty} f(t)e^tdt > 0$.

Par conséquent, $u_n^{-1/n} \geqslant \dfrac{M^{-1/n}e}{n} = v_n$ et, comme $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$ et que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge, par comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|u_n|^{-1/n}$ diverge.

1.103 **a.** Les fonctions $f_a : t \mapsto \exp\Big(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\Big)$ et $g_a : t \mapsto \dfrac{a}{t^2}\exp\Big(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\Big)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeables par continuité en 0 en posant $f_a(0) = g_a(0) = 0$ car $\exp\Big(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\Big) \underset{0}{\sim} \exp\Big(-\dfrac{a^2}{t^2}\Big)$ et $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{a^2}{t^2} = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = 0$. De plus, $\exp\Big(-t^2-\dfrac{a^2}{t^2}\Big) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t^2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t^2} = 0$ donc $f_a(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ et $g_a(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Ceci assure, par comparaison aux intégrales de Riemann, que f_a et g_a sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc que $I(a)$ et $J(a)$ existent pour tout $a > 0$.

b. Dans $I(a)$, on pose $t = \dfrac{a}{u} = \varphi(u)$ avec φ de classe C^1 et bijective strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Par changement de variable, $\displaystyle I(a) = \int_{+\infty}^0 \exp\Big(-\frac{a^2}{u^2}-u^2\Big)\Big(-\frac{a}{u^2}\Big)du = \int_0^{+\infty}\frac{a}{u^2}\exp\Big(-u^2-\frac{a^2}{u^2}\Big)du = J(a)$.

c. D'après **b.**, $\displaystyle I(a) = \frac{I(a)+J(a)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\bigg(\exp\Big(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\Big)+\frac{a}{t^2}\exp\Big(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\Big)\bigg)dt$ par linéarité de l'intégrale donc $I(a) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)\exp\left(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\right)dt$. Or $-t^2-\frac{a^2}{t^2} = \left(t-\frac{a}{t}\right)^2 - 2a$ d'où $\exp\left(-t^2-\frac{a^2}{t^2}\right) = e^{-2a}\exp\left(-\left(t-\frac{a}{t}\right)^2\right)$ (mise sous forme canonique). Toujours par linéarité de l'intégrale, on obtient bien la relation $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)\exp\left(-\left(t-\frac{a}{t}\right)^2\right)dt$.

d. Dans l'intégrale de la question précédente, on pose $x = t - \frac{a}{t} = \varphi(t)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante (car $\varphi'(t) = 1+\frac{a}{t^2} > 0$) de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{t\to-\infty}\varphi(t) = -\infty$ car $a > 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty$. Ainsi, $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(t)^2}\varphi'(t)dt = \frac{e^{-2a}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ par parité de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Par conséquent, $I(a) = e^{-2a}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$ avec le rappel de l'énoncé concernant l'intégrale de Gauss.

1.104 **a.** Pour $x \in]-1;+\infty[$, soit $f_x :]0;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = \frac{t^x\ln(t)}{t-1}$. La fonction f_x est continue sur $]0;1[$ par opérations. Comme $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ en posant $u = t-1$ dans $\ln(1+u)\underset{0}{\sim} u$, on a $f_x(t) \underset{1}{\sim} t^x \underset{1}{\sim} 1$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1) = 1$. De plus, $f_x(t)\underset{0}{\sim} t^x\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\right)$ par croissances comparées car $\frac{1+x}{2} < 0$ donc, comme $\frac{1-x}{2} < 1$, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_x est intégrable sur $]0;1[$ ce qui montre la convergence de $\int_0^1 f_x(t)dt$.

b. Soit $-1 < x < y$, $\forall t \in]0;1[$, $t^x = e^{x\ln(t)} \geqslant e^{y\ln(t)} = t^y \geqslant 0$ car $\ln(t) < 0$ donc, $t^x\ln(t) \leqslant t^y\ln(t) \leqslant 0$ et, puisque $t-1 < 0$, $f_x(t) \geqslant f_y(t) \geqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, $H(x) = \int_0^1 f_x(t)dt \geqslant \int_0^1 f_x(t)dt = H(y) \geqslant 0$ ce qui montre que H est positive et décroissante sur $]-1;+\infty[$.

c. La fonction $a : t \mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0;1[$, se prolonge par continuité en 1 en posant $a(1) = 1$ car $\ln(t)\underset{1}{\sim} t-1$ comme ci-dessus et, par croissances comparées, elle se prolonge aussi par continuité en 0 en posant $a(0) = 0$. La fonction positive a ainsi prolongée est continue sur le segment $[0;1]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes et il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in]0;1[$, $0 \leqslant a(t) \leqslant M$. Alors, pour $x > 0$, on a $0 \leqslant H(x) = \int_0^1 t^{x-1}a(t)dt \leqslant M\int_0^1 t^{x-1}dt = M\left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{M}{x}$ car $\lim\limits_{t\to 0} t^x = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{M}{x} = 0$, par encadrement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

d. Pour $x > -1$, avec l'indication, $H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{(t^x - t^{x+1})\ln(t)dt}{t-1} = -\int_0^1 t^x\ln(t)dt$ et, en posant $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \frac{t^{x+1}}{x+1}$ qui sont C^1 sur $]0;1[$ et qui vérifient $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on a $-\int_0^1 t^x\ln(t)dt = \int_0^1 \frac{t^x}{x+1}dt = \left[\frac{t^{x+1}}{(x+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(x+1)^2}$ (1) par intégration par parties. Comme H est décroissante sur $]-1;+\infty[$, on a $\forall x \in]-1;0[$, $H(0) \leqslant H(x+1) \leqslant H(1)$ donc $H(x+1) \underset{-1^+}{=} O(1)$ et (1) montre que $H(x) \underset{-1^+}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}$ car $O(1) \underset{-1^+}{=} o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$.

e. Comme $\lim\limits_{m\to+\infty} H(m) = 0$ d'après **c.**, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(H(k-1) - H(k)\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ par dualité suite-série avec la relation de la question **d.**. De plus, comme $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\forall k \geqslant 2$, $\int_k^{k+1} g(x)dx \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} g(x)dx$. Pour $n \geqslant 1$, en sommant pour $k \geqslant n+1$, puisque g est intégrable sur $[1;+\infty[$ par RIEMANN, $\int_n^{+\infty} g(x)dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_n^{+\infty} \leqslant H(n) \leqslant \left[-\frac{1}{x}\right]_{n-1}^{+\infty} = \int_{n-1}^{+\infty} g(x)dx$ par CHASLES donc $\frac{1}{n} \leqslant H(n) \leqslant \frac{1}{n-1}$ (1). Pour $x \geqslant 1$, H étant décroissante sur $[1;+\infty[$ d'après **b.**, $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1 \Longrightarrow H(\lfloor x\rfloor+1) \leqslant H(x) \leqslant H(\lfloor x\rfloor)$ donc $\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{1}{\lfloor x\rfloor-1}$ avec (1) donc $\frac{1}{x+1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{1}{x-2}$. Comme $\frac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, par encadrement, on trouve $H(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

De la même manière, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H(0)-H(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\big(H(k)-H(k+1)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$ donc, comme $\lim_{n\to+\infty} H(n) = 0$, on a $H(0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

1.105 **a.** La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. La convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ équivaut donc à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$. Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et que $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ ce qui, par intégration par parties, montre que la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$. Soit $g : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{\cos(t)}{t^2}$, alors g est continue sur $[1;+\infty[$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc, a fortiori, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

b. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, comme $|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, on a $|f(t)| \geqslant \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$. Comme en **a.**, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}dt$ converge en réalisant une intégration par parties. Par contre, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge par critère de RIEMANN. Par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)dt}{t}$ diverge donc la fonction positive $g : t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. Comme $\forall t > 0$, $|f(t)| \geqslant \frac{\sin^2(t)}{t} = g(t)$, par comparaison, f n'est pas non plus intégrable sur $[1;+\infty[$, donc a fortiori pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Posons $u :\mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $1-\cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ donc $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$ et $u(t)v(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t}\right)$, on a $\lim_{t\to0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t)$. Ainsi, par intégration par parties, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = 0 - \int_0^{+\infty}(1-\cos(t))\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}dt$.
On pose maintenant $t = 2u = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante et $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a, par changement de variable, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2((2u)/2)}{4u^2}(2du) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}du$.

1.106 **a.** Puisque f est une fonction positive, on peut définir $g = \sqrt{f} = f^{1/2}$ et $h = f^2\sqrt{f} = f^{5/2}$. Comme les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2\sqrt{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par composition, g et h sont continues sur $[0;1]$ car f est continue sur $[0;1]$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ associée au produit scalaire $(a,b) \mapsto \int_0^1 a(t)b(t)dt$ sur l'espace vectoriel $C^0([0;1],\mathbb{R})$, on a $\left|\int_0^1 gh\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 g^2} \times \sqrt{\int_0^1 h^2}$, ce qui donne exactement, en élevant au carré, l'inégalité $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$.

Si on a égalité dans cette inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, alors les vecteurs g et h sont colinéaires.

- Soit $g = 0$ ou $h = 0$, et dans ce cas $f = 0$.
- Soit g et h sont non nulles, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (car g et h positives) tel que $h = \lambda g$, ce qui s'écrit $\forall x \in [0;1],\ f(x)^{5/2} = \lambda f(x)^{1/2}$ donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = \sqrt{\lambda}$. Comme f n'est pas nulle, sinon g et h le seraient, et que f est continue sur $[0;1]$, on a forcément $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \sqrt{\lambda}$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans les deux cas, f est constante et positive sur $[0;1]$. Réciproquement, si f est constante et positive (valant α) sur $[0;1]$, alors on a $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 = \alpha^6 = \alpha^5 \times \alpha = \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$.

Il y a égalité dans $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$ si et seulement si f est constante et positive sur $[0;1]$.

b. L'hypothèse faite sur f nous incite à utiliser la dérivation. Soit la fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$, alors g existe car f et f^3 sont continues sur $[0;1]$, et g est même dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ par le théorème fondamental de l'intégration avec $\forall x \in [0;1],\ g'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)dt - f^3(x)$ d'où $g'(x) = 2f(x)\left(\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2}\right)$. Comme f' est positive sur $[0;1]$, la fonction f est croissante sur $[0;1]$ donc positive sur cet intervalle car $f(0) = 0$. De plus, pour $x \in [0;1]$, on a $\forall t \in [0;x],\ 0 \leqslant f'(t) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f(t)f'(t) \leqslant f(t)$ ce qui donne $0 \leqslant \int_0^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x = \frac{f(x)^2}{2} \leqslant \int_0^x f(t)dt$ en intégrant et par croissance de l'intégrale. Ainsi, $\forall x \in [0;1],\ g'(x) \geqslant 0$ donc g est croissante sur l'intervalle $[0;1]$. Comme $g(0) = 0$, on a donc $g(1) \geqslant 0$, ce qui s'écrit bien $\int_0^1 f^3 \leqslant \left(\int_0^1 f\right)^2$.

c. S'il y a égalité dans l'inégalité de la question **b.**, on a $g(1) = 0$ donc g est constante sur $[0;1]$ et $\forall x \in [0;1],\ g'(x) = 0 \iff \left(f(x) = 0 \text{ ou } \int_0^x f(t)dt = \frac{f(x)^2}{2}\right)$. Or, pour $x \in]0;1]$, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^x f(t)dt - \frac{f(x)^2}{2} = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(t)f'(t)dt = \int_0^x f(t)(1 - f'(t))dt = 0$ et la fonction $t \mapsto f(t)(1 - f'(t))$ est continue et positive sur $[0;x]$ donc $\int_0^x f(t)dt = \frac{f(x)^2}{2} \iff \big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$.

Ainsi, s'il y a égalité dans l'inégalité de **b.**, $f = 0$ ou $\big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$. Supposons que $\big(\forall t \in [0;x],\ (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1)\big)$, posons alors $m = \text{Sup}(\{t \in [0;1] \mid f(t) = 0\})$, qui existe car $A = \{t \in [0;1] \mid f(t) = 0\}$ contient 0, est inclus dans $\mathbb{R}$ et est minoré par 0. Considérons trois cas :

- Si $m = 0$, alors $\forall t > 0,\ f(t) \neq 0$ donc $f'(t) = 1$ et, par continuité de la fonction f' sur $[0;1]$, on a $\forall x \in [0;1],\ f'(x) = 1$. Comme $[0;1]$ est un intervalle et $f(0) = 0$, on a donc $\forall x \in [0;1],\ f(x) = x$.
- Si $m \in]0;1[$, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = m$ par caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Par continuité de f, on a donc $f(m) = \lim_{n\to+\infty} f(t_n) = 0$ donc $m \in A$. Comme f est croissante sur $[0;1]$, on a $\forall x \in [0;m],\ f(x) = 0$. Pour $t \in]m;1]$, $t \notin A$ donc $f(t) \neq 0$ donc $f'(t) = 1$ et, par continuité de f' en m, on a donc $f'(m) = 1$, ce qui contredit le fait que f est constante (et nulle) sur $[0;m]$. Ce cas ne se peut !
- Si $m = 1$, comme ci-dessus, on a $\forall x \in [0;m],\ f(x) = 0$ donc f est nulle sur $[0;1]$.

Ainsi, l'égalité dans **b.** implique que $f=0$ ou que $\forall x \in [0;1],\ f(x)=x$.

Réciproquement, si f est nulle sur $[0;1]$, on a bien $\displaystyle\int_0^1 f^3 = 0 = \Big(\int_0^1 f\Big)^2$ et si $f : x \mapsto x$, on a bien l'égalité $\displaystyle\int_0^1 f^3 = \Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \Big(\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1\Big)^2 = \Big(\int_0^1 f\Big)^2$.

Par conséquent, il y a égalité dans **b.** pour une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0)=0$ et $\forall x \in [0;1],\ f'(x) \in [0;1]$ si et seulement si f est nulle sur $[0;1]$ ou si $f : x \mapsto x$.

1.107 **a.** Les fonctions $u : t \mapsto \lambda t + \cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lambda$ donc, par intégration par parties, la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t}dt$ équivaut à celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t + \cos(t)}{t^2}dt$. Or $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et $\dfrac{\cos(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est absolument convergente par comparaison et, même si $t \mapsto \dfrac{\lambda t}{t^2} = \dfrac{\lambda}{t}$ est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t}dt$ ne converge que si $\lambda = 0$ d'après RIEMANN. Ainsi, par somme, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t}dt$ converge si et seulement si $\lambda = 0$.

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut définir $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en 0. De plus, f est continue sur le segment $[0;T]$ donc elle y est bornée, et étant T-périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1 : notons $M = ||f||_{\infty,\mathbb{R}}$. Soit $x \geqslant 0$ et l'entier n_x tel que n_xT soit le plus grand multiple de T inférieur à x, ce qui se traduit par $n_xT \leqslant t < (n_x+1)T \iff n_x \leqslant \dfrac{x}{T} < n_x + 1$ donc $n_x = \Big\lfloor \dfrac{x}{T} \Big\rfloor$. Par CHASLES, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{n_xT}^x f(t)dt$. Posons $I = \displaystyle\int_0^T f(t)dt$, ce qui donne $F(x) = n_x I + \displaystyle\int_{nT}^x f(t)dt$. Par inégalité triangulaire, on a $\Big|\displaystyle\int_{n_xT}^x f(t)dt\Big| \leqslant \int_{n_xT}^x Mdt = M(x - n_xT) \leqslant MT$ et on a donc $F(x) \underset{+\infty}{=} n_xI + O(1)$. L'inégalité $n_xT \leqslant x < (n_x+1)T$ montre que $x - n_xT \underset{+\infty}{=} O(1)$ donc $n_x \underset{+\infty}{=} \dfrac{x}{T} + O(1)$. Posons $m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \frac{I}{T}$ qui représente la valeur moyenne de f sur une période, de sorte que ce qui précède s'énonce $F(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{I}{T}x + O(1) \underset{+\infty}{=} mx + O(1)$.

Méthode 2 : posons $m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(u)du = \frac{F(T)}{T}$, $g : x \mapsto F(x) - mx$ et $h : x \mapsto g(x+T) - g(x)$. Comme F est dérivable par le théorème fondamental de l'intégration, g et h le sont aussi et on a $h'(x) = g'(x+T) - g'(x)$ donc $h'(x) = F'(x+T) - m - F'(x) + m = f(x+T) - f(x) = 0$ par hypothèse. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante et $h(0) = g(T) - g(0) = F(T) - F(T) = 0$ donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. g est donc T-périodique et, comme avant puisque g est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) \underset{+\infty}{=} mx + O(1)$.

Concluons : les fonctions $u : t \mapsto \lambda t - F(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lambda - m$ car $u(t)v(t) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\lambda t - (mt + O(1))}{t}$. Par intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t - F(t)}{t^2}dt$ ont même nature. Comme $\dfrac{\lambda t - F(t)}{t^2} = \dfrac{\lambda t - mt - (F(t) - mt)}{t^2} = \dfrac{(\lambda - m)}{t} + \dfrac{F(t) - mt}{t^2}$ et $\dfrac{F(t) - mt}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ d'après ce qui précède, comme à la question **a.**, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}dt$ converge si et seulement si $\lambda = m$.

1.108 **a.** Comme f est continue, positive et non nulle sur $[a;b]$, d'après la contraposée d'un théorème du cours, il vient $A=\int_a^b f(x)dx>0$. Comme f est continue sur $[a;b]$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, $F:[a;b]\to\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a sur $[a;b]$. F est donc de classe C^1, strictement croissante car $f>0$ donc F réalise une bijection de l'intervalle $[a;b]$ dans $[0;A]$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $x_0,x_1,\cdots,x_n$ reviennent à $\forall k\in[\![1;n]\!], F(x_k)-F(x_{k-1})=\frac{A}{n}$ donc, puisque $x_0=a$ est imposé donc $F(x_0)=0$, les conditions imposées se résument à $\forall k\in[\![0;n]\!],\ F(x_k)=\frac{kA}{n}$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la subdivision demandée et qu'on a $\forall k\in[\![0;n]\!],\ x_k=F^{-1}\Big(\frac{kA}{n}\Big)$.

b. Pour $n\geqslant 1$, $u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}f\Big(F^{-1}\big(\frac{kA}{n}\big)\Big)=\frac{1}{A}\times\left[\frac{A}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}g\Big(\frac{kA}{n}\Big)\right]=\frac{g(0)}{n}+\frac{1}{A}\times\left[\frac{A}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}g\Big(\frac{kA}{n}\Big)\right]$ en définissant $g:[0;A]\to\mathbb{R}$ par $g(x)=f\circ F^{-1}(x)$. Comme g est continue sur le segment $[0;A]$ par composition puisque F^{-1} est continue de $[0;A]$ dans $[a;b]$, le théorème sur les sommes de RIEMANN montre que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{A}\int_0^A g(x)dx=\frac{1}{A}\int_0^A f\circ F^{-1}(x)dx$. On peut effectuer le changement de variable $x=F(t)$ car F est de classe C^1, bijective et strictement croissante de $[a;b]$ dans $[0;A]$ et on obtient la nouvelle expression $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{A}\int_a^b\big(f\circ F^{-1}\circ F(t)\big)\times f(t)dt=\frac{1}{A}\int_a^b f(t)^2dt$ car $F'(t)=f(t)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{\int_a^b(f(x))^2dx}{\int_a^b f(x)dx}$.

1.109 **a.** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n:x\mapsto x^ne^{\omega x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(x)|=x^ne^{-x/2}\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n=\int_0^{+\infty}f_n(x)dx$ existe. Pour tout entier $n\geqslant 1$, les fonctions $u:x\mapsto x^n$ et $v:x\mapsto\frac{e^{\omega x}}{\omega}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)v(x)=0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $I_n=-\frac{n}{\omega}\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{\omega x}dx=-\frac{n}{\omega}I_{n-1}$. Par une récurrence simple, on en déduit que $I_n=n!(-j)^{n+1}$ car $\omega=j^2$ donc $\frac{1}{\omega}=j$.

Ainsi, pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Im}(I_{3k-1})=0=\mathrm{Im}\Big(\int_0^{+\infty}x^{3k-1}e^{\omega x}dx\Big)=-\int_0^{+\infty}x^{3k-1}e^{-x/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)dx$. Dans $\int_0^{+\infty}x^{3k-1}e^{-x/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big)dx=0$ (vue sur $\mathbb{R}_+^*$), on pose $x=\varphi(t)=t^{1/3}$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}t^{k-(1/3)}e^{-t^{1/3}/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\Big)t^{-2/3}dt=0$ donc, en posant, $n=k-1$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}e^{-t^{1/3}/2}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\Big)t^ndt=0$. En définissant $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ par $g(t)=e^{\frac{-\sqrt[3]{t}}{2}}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{t}}{2}\Big)$, la fonction g est continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}g(t)t^n=0$.

b. L'énoncé nous incite à admettre le théorème de STONE-WEIERSTRASS, il s'agit de l'approximation uniforme de toute fonction continue sur un segment par des polynômes. Soit donc $\varepsilon>0$, il existe par ce théorème un polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $\forall t\in[a;b]$, $|f(t)-P(t)|\leqslant\varepsilon$, c'est-à-dire $||f-P||_{\infty,[a;b]}\leqslant\varepsilon$. Ainsi, en écrivant $P=\sum\limits_{n=0}^{d}a_nX^n$, on a $\int_a^b(f-P)\overline{f}=\int_a^b|f|^2-\int_a^b\overline{f}|P$ or, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b\overline{f}P=\sum\limits_{n=0}^{d}\int_a^b\overline{f(t)}t^ndt=\overline{\sum\limits_{n=0}^{d}\int_a^b f(t)t^ndt}=0$ donc $\int_a^b(f-P)\overline{f}=\int_a^b|f|^2$. Or, par inégalité triangulaire,

$\left|\int_a^b (f-P)\overline{f}\right| \leqslant \int_a^b |f-P|\,|f| \leqslant ||f-P||_{\infty,[a;b]}\int_a^b |f| \leqslant \varepsilon(b-a)||f||_{\infty,[a;b]}$ car f est bornée sur $[a;b]$ puisque continue sur le segment $[a;b]$. En faisant tendre ε vers 0, il vient $\int_a^b |f|^2 = 0$. Comme $|f|^2$ est positive et continue sur $[a;b]$ non réduit à un point, $|f|^2$ est nulle sur $[a;b]$, donc f est nulle sur $[a;b]$ comme attendu.
Question subsidiaire : on pose $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, alors F est C^1 et croissante car $F' = f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ et $F(a) = F(b)$ donc F est constante sur $[a;b]$ ce qui prouve que $F' = f = 0$.

1.110 Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(t) = \dfrac{|\sin(t)|}{t}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $|\sin(t)| \underset{t\to 0^+}{\sim} \sin(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t$. Comme g est maintenant continue sur le segment $[0;x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, c'est même d'après le théorème fondamental de l'intégration la primitive de g qui s'annule en 0. Comme la fonction g s'annule en tous les multiples de π, on va considérer $f(n\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par la relation de Chasles, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n\pi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt$. Pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, on pose dans $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt$ le changement de variable affine $t = u + k\pi = \varphi_k$ avec φ_k de classe C^1 sur $[0;\pi]$ pour avoir $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)dt = \int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{u+k\pi}du$ car $\sin$ est positif sur $[0;\pi]$. On somme ces inégalités pour obtenir l'encadrement $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{\pi+k\pi}du \leqslant f(n\pi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{u+k\pi}du \leqslant \int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{u}du + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{k\pi}du$. En posant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, il est classique que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. De plus, $\int_0^\pi \sin(u)du = \big[-\cos(u)\big]_0^\pi = 2$ donc $\dfrac{2H_n}{\pi} \leqslant f(n\pi) \leqslant I + \dfrac{2H_{n-1}}{\pi}$ en posant $I = \int_0^\pi \dfrac{\sin(u)}{u}du$. Comme $\dfrac{2H_n}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} I + \dfrac{2H_{n-1}}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n)}{\pi}$ car $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, par encadrement, on a $f(n\pi) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n)}{\pi}$.

De plus, par définition de la partie entière, pour $x \in \mathbb{R}_+$, en posant $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi}\right\rfloor$, on a $n_x \leqslant \dfrac{x}{\pi} < n_x + 1$ donc $n_x\pi \leqslant x < (n_x+1)\pi$. Comme la fonction f est croissante car $f' = g \geqslant 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $f(n_x\pi) \leqslant f(x) \leqslant f((n_x+1)\pi)$. D'après ce qui précède, on a $f(n_x\pi) \underset{+\infty}{\sim} f((n_x+1)\pi) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n_x)}{\pi}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} n_x = +\infty$ puisque $n_x > \dfrac{x}{\pi} - 1$ donc, par encadrement, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(n_x)}{\pi}$. Mais $\dfrac{x}{\pi} - 1 < n_x \leqslant \dfrac{x}{\pi}$ donc, par croissance de la fonction $\ln$, $\ln\left(\dfrac{x}{\pi}-1\right) \leqslant \ln(n_x) \leqslant \ln\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$ donc $\ln(n_x) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{x}{\pi}\right) = \ln(x) - \ln(\pi) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.
Par conséquent, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(x)}{\pi}$.

1.111 **a.** La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est négative, continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) - \ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi, $f(x) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Par conséquent, $\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(x)\big)dx$ converge donc I existe.
b. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t = \varphi(t)$ avec φ qui est de classe C^1 et une bijection strictement décroissante de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, ce qui garantit l'existence de $\int_{\pi/2}^0 \ln(\cos t)(-1)dt = K$ et le fait que $I = K$. Par linéarité de l'intégrale, vue ici sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, comme on a la relation $\ln\big(\sin(x)\cos(x)\big) = \ln\big(\sin(x)\big) + \ln\big(\cos(x)\big)$, le réel J existe aussi et $J = I + K = 2I$.

c. En considérant les intégrales sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $J=\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin x\cos x\big)dt=\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(2x)\big)dx-\frac{\pi\ln 2}{2}$. On change de variable $x=\frac{t}{2}=\psi(t)$ avec ψ qui est de classe C^1 et une bijection strictement croissante de $]0;\pi[$ dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, et on a $\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(2x)\big)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\big(\sin t\big)dt=\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin t\big)dt$ par symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de la courbe de $t\mapsto\ln(\sin t)$ ou par changement de variable $t=\pi-s$. Alors $J=I+I=I-\frac{\pi\ln 2}{2}$ donc $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$. Cette intégrale est dite d'Euler.

1.112 **a.** Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(t)=\dfrac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{e^{nt}}{(e^t)^{n+1}}=e^{-t}$. Par comparaison, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $t\mapsto e^{-t}$ l'est. Ainsi, I_n existe.

b. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, dans $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}dt$, on pose $u:t\mapsto-\dfrac{(1+e^t)^{-n}}{n}$ et $v:t\mapsto e^{(n-1)t}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ car $u(t)v(t)\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{e^{-t}}{n}$ d'où, par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}u(t)v'(t)dt$, ce qui donne bien la relation $I_n=\dfrac{1}{n(1+1)^n}+\dfrac{n-1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{(n-1)t}}{(1+e^t)^n}dt=\frac{1}{n2^n}+\frac{n-1}{n}I_{n-1}$.

c. Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $J_n=nI_n=\frac{1}{2^n}+(n-1)I_{n-1}$ donc $J_n=J_{n-1}+\frac{1}{2^n}$.

d. On calcule $J_1=I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt=\left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$. Ainsi, avec la question précédente, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_n=J_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(J_{k+1}-J_k)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}=1-\frac{1}{2^n}$ donc $I_n=\dfrac{1}{n}\Big(1-\dfrac{1}{2^n}\Big)$.

e. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1-\dfrac{1}{2^n}\Big)=1$, on a $I_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.

1.5 Officiel de la Taupe

1.113 Toutes les fonctions sont intégrables car continues sur des segments. On utilise le changement de variables $t=nx$ puis Chasles puis le changement de variables $t=s+k$ avec la 1-périodicité de g pour avoir la relation $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(nx)dx=\frac{1}{n}\int_0^n f\Big(\frac{t}{n}\Big)g(t)dt=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f\Big(\frac{t}{n}\Big)g(t)dt=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\Big(\frac{s+k}{n}\Big)g(s)ds$.
Comme f est de classe C^1, par le théorème des accroissements finis : $\forall(x,y)\in[0;1]^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant M_1|x-y|$ avec $M_1=\underset{[0;1]}{\mathrm{Max}}\,|f'|$ car $|f'|$ est continue sur une segment donc y est bornée et y atteint ses bornes.
Donc f est bien M_1-lipschitzienne sur le segment $[0;1]$.
En utilisant la relation montrée précédemment et la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\Big(\frac{k}{n}\Big)g(s)ds=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1\left(f\Big(\frac{s+k}{n}\Big)-f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right)g(s)ds$$

Comme f est M_1-lipschitzienne sur $[0;1]$ et comme g est bornée sur $[0;1]$ car elle y est continue :

$$\left|\int_0^1 f(x)g(nx)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\Big(\frac{k}{n}\Big)g(s)ds\right|\leqslant\frac{M_1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 s|g(s)|ds=\frac{M_1}{n}\int_0^1 s|g(s)|ds\underset{+\infty}{=}O\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

On prend $g=1$: $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\Big(\frac{k}{n}\Big)ds\right|=\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right|\underset{+\infty}{=}O\Big(\frac{1}{n}\Big)$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\Big(\frac{k}{n}\Big)=\int_0^1 f(x)dx$.

Pour la suite, il faut aller un cran plus loin dans le développement de $f\Big(\frac{s+k}{n}\Big)$.

Par TAYLOR reste intégral, on a $f\Big(\frac{s+k}{n}\Big)-f\Big(\frac{k}{n}\Big)-\frac{s}{n}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)=\int_{k/n}^{(s+k)/n}\Big(\frac{s+k}{n}-u\Big)f''(u)du$. Comme f est de classe C^2, avec $M_2=\underset{[0;1]}{\mathrm{Max}}\,|f''|$: $\left|\int_{k/n}^{(s+k)/n}\Big(\frac{s+k}{n}-u\Big)f''(u)du\right|\leqslant\frac{M_2}{2}\Big[-\Big(\frac{s+k}{n}-u\Big)^2\Big]_{k/n}^{(s+k)/n}=\frac{M_2s^2}{2n^2}$.

On peut intégrer entre 0 et 1 l'inégalité trouvée : $\left|\int_0^1\Big(f\Big(\frac{s+k}{n}\Big)-f\Big(\frac{k}{n}\Big)-\frac{s}{n}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)ds\right|\leqslant\int_0^1\frac{M_2s^2}{2n^2}ds=\frac{M_2}{6n^2}$.

Or : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_0^1\left(f\Big(\frac{s+k}{n}\Big)-f\Big(\frac{k}{n}\Big)-\frac{s}{n}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\right)=n\int_0^1 f(x)dx-\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\Big(\frac{k}{n}\Big)-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)$ donc grâce à l'inégalité précédente, $\left|n\int_0^1 f(x)dx-\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\Big(\frac{k}{n}\Big)-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\right|\underset{+\infty}{=}O\Big(\frac{1}{n}\Big)$ qui tend vers 0 quand $n\to+\infty$.

Avec les sommes de RIEMANN, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f'\Big(\frac{k}{n}\Big)=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)dt=\frac{f(1)-f(0)}{2}$ car f' continue sur $[0;1]$.

Au final, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 f(x)dx-\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2}$.

1.114 La fonction $f_\alpha : x\mapsto\dfrac{x}{1+x^\alpha\big(\sin(x^2)\big)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La présence du x^2 dans le $\sin$ nous encourage à simplifier cette étude en posant $x=\sqrt{t}=\varphi(t)$. En effet, φ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$; le théorème de changement de variable montre alors que $\int_0^{+\infty}f_\alpha(x)dx$ est de même nature que $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}(1+t^{\frac{\alpha}{2}}(\sin(t))^2)}dt$ ou encore, après simplification et multiplication par 2, que l'intégrale $\int_0^{+\infty}g_\alpha(t)dt$ avec $g_\alpha(t)=\dfrac{1}{1+t^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(t)}$ et g_α est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$.

On pose, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale $J_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+t^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(t)}dt$. On sait d'après le cours, puisque g_α est positive, que $\int_0^{+\infty}g_\alpha(t)dt$ a la même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant0}J_n$.

On aurait très bien pu poser directement $I_n=\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\frac{x}{1+x^\alpha\sin^2(x^2)}dx$ mais c'est plus lourd.

Pour $t\in[n\pi;(n+1)\pi]$, on a $(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\leqslant t^{\frac{\alpha}{2}}\leqslant((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}$ donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(t)}dt\leqslant J_n\leqslant\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(t)}dt.$$

Mais la fonction $\sin^2$ est π-périodique donc en posant $t=n\pi+u$ (facile à justifier), on trouve :

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(u)}du\leqslant J_n\leqslant\int_0^{\pi}\frac{1}{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(u)}du.$$

Or, $\sin(\pi-t)=\sin(t)$, donc en posant $u=\pi-v$ dans $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(u)}du$ par exemple, on a $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(u)}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(v)}dv$. Ainsi, on obtient l'encadrement

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(u)}du\leqslant J_n\leqslant2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\sin^2(u)}du\quad(1).$$

Méthode 1 : on pose $u = \mathrm{Arctan}(w) = \psi(w)$ (ou $w = \tan(u)$: BIOCHE) avec ψ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et, pour $a > 0$ et car $\sin^2(u) = \dfrac{\tan^2(u)}{1+\tan^2(u)} = \dfrac{w^2}{1+w^2}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a\sin^2(u)}du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+a)w^2}dw = \left[\frac{1}{\sqrt{1+a}}\mathrm{Arctan}(w\sqrt{1+a})\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$. Ainsi,

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}} \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}} = v_n.$$

Or $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}} \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ainsi, par le théorème des gendarmes, on a $J_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{(\pi)^{\frac{\alpha}{4}}} \times \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{4}}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} J_n$, comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$, converge si et seulement si $\alpha > 4$ par RIEMANN.

Méthode 2 : on se débarrasse de $\sin$ dans l'encadrement (1) avec les inégalités classiques qui découlent de la concavité de la fonction $\sin$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $\forall u \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2u}{\pi} \leqslant \sin(u) \leqslant u$. Ainsi, avec $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$:

$$a_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}u^2}du \leqslant J_n \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\lambda^2u^2}du = b_n.$$

On reconnaît à nouveau des primitives en Arctan, $a_n = 2\left[\dfrac{1}{((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{4}}}\mathrm{Arctan}\left(((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{4}}u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}}$ et $b_n = 2\left[\dfrac{1}{\lambda(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}}\mathrm{Arctan}\left(\lambda(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\lambda(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}}$. On peut considérer deux cas, d'après RIEMANN :

- si $\alpha > 4$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} J_n$ converge donc l'intégrale I converge grâce à la majoration $J_n \leqslant b_n$.
- si $\alpha \leqslant 4$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} J_n$ diverge donc l'intégrale I diverge étant donnée la minoration $a_n \leqslant J_n$.

Toujours est-il que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 4$.

1.115 D'abord, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On étudie f aux deux bornes de $\mathbb{R}_+^*$.

- Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left((x+1)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}\right) = 1$, on obtient $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{3}}} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Ainsi f est intégrable sur $]0;1]$ avec RIEMANN (car $\dfrac{1}{2} < 1$).
- $(x+1)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right) \underset{0}{=} x^{\frac{1}{4}}\left(1+\dfrac{1}{4x} - 1 + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ donc $(x+1)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$. Par conséquent, $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{4x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{\ln(x)}{4x^{\frac{13}{12}}} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{25}{24}}}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$ (car $\dfrac{25}{24} > 1$).

Au final : f est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.116 **a.** Soit $\varphi : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$ définie sur $\mathbb{R}^* \times [0;1]$. Si $x \neq 0$, $\varphi(x,.)$ est continue sur $[0;1]$ donc y est intégrable. Si $x = 0$, on a $\varphi(0,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc $f(0)$ n'existe pas d'après RIEMANN.

Ainsi le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$ et f est strictement positive.

b. Comme f est clairement paire, on étudie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit deux réels $0 < a < b$.

- Pour $t \in [0;1]$, la fonction $\varphi(\cdot,t)$ est de classe C^1 par opérations.
- Pour $x > 0$, les fonctions $\varphi(x,\cdot)$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\cdot)$ sont continues et intégrables sur $[0;1]$.
- Pour $(x,t) \in [a;b] \times [0;1]$, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{-x}{\sqrt{1+t^2}(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \dfrac{b}{\sqrt{1+t^2}(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} = g(t)$.

Comme g est continue donc intégrable sur $[0;1]$, par le théorème de LEIBNIZ, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{1+t^2}(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci justifie déjà l'existence des limites (finies ou infinies) de f en 0^+ et en $+\infty$. De plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \Big[\text{Argsh}\Big(\frac{t}{x}\Big)\Big]_0^1 = \text{Argsh}\Big(\frac{1}{x}\Big)$.

c. • $\forall x>0,\ f(x) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Argsh}\Big(\frac{1}{x}\Big)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

• $\forall x>0,\ f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{x}\text{Argsh}(1)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.

• Comme $\text{Argsh}(y) = \ln(y+\sqrt{1+y^2})$, on a $\text{Argsh}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \ln(y)$ (après calculs). De plus, on peut encadrer $\displaystyle\Big|f(x)-\text{Argsh}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}dt\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} \times \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}+1}dt\Big| \leqslant \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ avec des identités remarquables et des minorations comme $1+t^2 \geqslant 1$, $\sqrt{1+t^2}+1 \geqslant 1$ et $\sqrt{x^2+t^2} \geqslant t$.
Par conséquent $f(x) - \text{Argsh}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) \underset{x\to 0^+}{=} O(1)$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

• Quand x tend vers $+\infty$, le terme en t^2 à côté de x^2 ne compte plus, ce qui nous conduit à considérer : $\displaystyle\Big|xf(x) - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+t^2}-x}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}dt\Big| = \Big|\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}(\sqrt{x^2+t^2}+x)}dt\Big|$ donc, en posant $I = \text{Argsh}(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$: $|xf(x)-I| \leqslant \dfrac{1}{2x^2}\displaystyle\int_0^1 t^2dt$: $f(x) - \dfrac{I}{x} \underset{x\to 0^+}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{I}{x}$.

1.117 Il est clair que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}([a;b],\mathbb{R})$.

Soit $f\in F$ telle que $\exists g\in G,\ f=g''$, alors il suffit de calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g''(x)dx = g'(b)-g'(a) = 0$ et $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx = [xg'(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)dx = g(a)-g(b) = 0$ donc $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx$.
Réciproquement, supposons que $f\in F$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx$, alors posons $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x \Big(\int_a^t f(u)du\Big)dt$.
Il est clair que g est deux fois dérivable et que $g'(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)du$ et $g''(x) = f(x)$ avec $g(a)=0$ et $g'(a)=0$.
Comme $\{(t,u)\ |\ a\leqslant u\leqslant t\leqslant x\}$ est un compact élémentaire (pour $x\in[a;b]$) pour lequel le théorème de FUBINI s'applique : $g(x) = \displaystyle\int_a^x \Big(\int_u^x f(u)dt\Big)du = \int_a^x (x-u)f(u)du = x\int_a^x f(u)du - \int_a^x uf(u)du$ (f est continue donc $(t,u)\mapsto f(u)$ aussi). Ainsi $g(b) = b\displaystyle\int_a^b f(u)du - \int_a^b uf(u)du = 0$ par hypothèse et $g'(b) = \displaystyle\int_a^b f(u)du = 0$.
L'équivalence de l'énoncé est donc établie.
Supposons l'existence de $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tel que $h(x) = u+vx$ (h affine) alors, pour une fonction $g\in G$, il vient $\displaystyle\int_a^b h(x)g''(x)dx = \int_a^b (u+vx)g''(x)dx = 0$ (calcul comme précédemment).
Réciproquement, si $h\in F$ et $\forall g\in G,\ \displaystyle\int_a^b h(x)g''(x)dx = 0$, alors l'existence de u et v vérifiant les deux conditions de l'énoncé provient du fait que le système linéaire associé est de CRAMER (matrice de HILBERT) car il équivaut à $(b-a)u + \dfrac{(b-a)^2}{2}v = \displaystyle\int_a^b h(x)dx$ et $\dfrac{(b-a)^2}{2}u + \dfrac{(b-a)^3}{3}v = \displaystyle\int_a^b xh(x)dx$ or $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \neq 0$.
Avec ces valeurs de u et v (uniques mais dont les expressions en fonction de h importent peu), on déduit d'après la première partie de cet exercice qu'il existe $g\in G$ telle que $\forall x\in[a;b],\ h(x)-u-vx = g''(x)$. En prenant cette fonction g dans l'hypothèse : $\displaystyle\int_a^b (u+vx+g''(x))g''(x)dx = 0$ mais on sait que l'on a $\displaystyle\int_a^b (u+vx)g''(x)dx = 0$ donc $\displaystyle\int_a^b g''(x)^2dx = 0$. Comme g''^2 est continue et positive, ceci implique que $g''=0$ sur $[a;b]$ donc que g est affine et puisque $g\in G$, on en déduit que $g=0$. Ainsi : $\forall x\in[a;b],\ h(x) = u+vx$ et h est bien affine.

On vient de monter pour $h \in F$ que : $\big(h \text{ affine}\big) \Longleftrightarrow \big(\forall g \in G,\ \int_a^b hg'' = 0\big)$.

1.118 • Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' - y = 0$ associée à (E) sont les $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $y(x) = \lambda e^x$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$). On cherche une solution particulière de (E) par variation de la constante, avec $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $y(x) = \lambda(x)e^x$ et, en reportant, $\lambda'(x)e^x = f(x)$, soit $\lambda(x) = e^{-x}f(x)$. En prenant pour λ la primitive de $x \mapsto e^{-x}f(x)$ qui s'annule en 0, $\lambda(x) = \int_0^x e^{-t}f(t)dt$, ce qui montre que $x \mapsto e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ est solution particulière de (E). Par structure affine des solutions de (E), les solutions de (E) sont les $F_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $F_C : x \mapsto Ce^x + e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt = e^x\Big(C + \int_0^x e^{-t}f(t)dt\Big)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

• Pour l'existence, il semble logique de prendre la constante C qui rend petite la quantité $C + \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. Tout d'abord, comme $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |e^{-t}f(t)| \leqslant |f(t)|$ et que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ converge et on pose donc $C_0 = -\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{C_0}(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ par CHASLES. Vérifions que F_{C_0} est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\forall t \in [x\,;+\infty[,\ |e^{-t}f(t)| \leqslant e^{-x}|f(t)|$, on obtient la majoration $|F_{C_0}(x)| = e^x\Big|\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\Big| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ donc F_{C_0} est bornée sur $\mathbb{R}$. Définissons donc $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = F_{C_0}(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$. Cette fonction F est solution de (E) et elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

• Les solutions de (E) sont donc aussi les $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $y(x) = F(x) + \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq 0$, comme F est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda e^x = \pm\infty$, la fonction y n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

• En conclusion, il existe donc une unique solution F de (E) bornée sur $\mathbb{R}$ et il s'agit de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$.

• On veut maintenant montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$, or on dispose de la majoration établie précédemment $\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leqslant G(x) = e^x \int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt$, ce qui nous conduit à nous intéresser à l'intégrabilité de G. Or, en écrivant, $G(x) = e^x\Big(\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt - \int_0^x |f(t)|e^{-t}dt\Big)$, comme $t \mapsto |f(t)|e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $G'(x) = G(x) - e^x|f(x)|e^{-x}$ donc $G' = G - |f|$. Par conséquent, G est une primitive de $G - |f|$, ce qui montre que $\int_{-\infty}^{+\infty}(G - |f|)$ converge si et seulement G admet des limites finies en $\pm\infty$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, on a vu ci-dessus que $G(x) \leqslant \int_x^{+\infty} |f(t)|dt$ donc, comme $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ converge, on sait d'après le cours que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} |f(t)|dt = 0$ (reste). Par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

• Soit $\varepsilon > 0$, comme $\int_{-\infty}^0 |f|$ converge, il existe $A \in \mathbb{R}_-$ tel que $\int_{-\infty}^A |f| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit un réel $x \leqslant A$, comme on a $G(x) = \Big|e^x \int_x^A e^{-t}f(t)dt + e^x \int_A^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\Big| \leqslant e^x\Big|\int_x^A e^{-t}f(t)dt\Big| + e^x\Big|\int_A^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\Big|$ par CHASLES et inégalité triangulaire. Alors, par inégalité de la moyenne, comme $\forall t \in [x;A],\ e^{-t} \leqslant e^{-x}$ et $\forall t \geqslant A,\ e^{-t} \leqslant e^{-A}$, on obtient $G(x) \leqslant \int_x^A |f(t)|dt + e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)|dt$. Or $[x;A] \subset]-\infty;A]$ et $|f|$ positive donc $0 \leqslant G(x) \leqslant \int_{-\infty}^A |f(t)|dt + e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)|dt$. Mais $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)|dt = 0$ donc il existe $B \leqslant A$ tel que $\forall x \leqslant B,\ e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, $\forall x \leqslant B,\ G(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$.

• Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty}(G - |f|)$ converge avec ce qui précède donc, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ converge par hypothèse, on en déduit la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} G$ ce qui équivaut, puisque G est positive, à l'intégrabilité de G sur $\mathbb{R}$. Par théorème de comparaison, comme $0 \leqslant |F| \leqslant G$, la fonction F est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Par construction, $F+f = F'$ car F est solution de (E) donc, comme avant, F est une primitive de $F+f$. Or $F+f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par somme avec ce qui précède donc $\int_{-\infty}^{+\infty}(F+f) = [F]_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$. Puisque $0 \leqslant |F| \leqslant G$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Par conséquent, $\int_{-\infty}^{+\infty}(F+f) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} F = -\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

1.119 **a.** d est dérivable par opérations, $d'(t) = 1 - \sin(t) \geqslant 0$ et d' ne s'annule qu'en les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; ainsi d est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $d(0) = 1$, on a bien d strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.
Comme d est strictement croissante et positive, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par croissance de l'intégrale, si $x > 0$, on a $\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(0)dt$ donc $f(x) \leqslant g(x) \leqslant f(0)$ et on conclut que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = f(0) = 1$ par encadrement puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ par continuité de f en 0.
b. Soit $x > 0$, par intégration par parties en posant $u : x \mapsto g^2(x)$ et $v : x \mapsto x$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} xg^2(x) = 0$ d'après la question **a.**, u et v étant de classe C^1 sur $]0;x]$, et puisque $g'(t) = \frac{f(t)-g(t)}{t}$ par calculs, on obtient $\int_0^x g(t)^2dt = [tg(t)^2]_0^x - \int_0^x 2tg(t)g'(t)dt = xg(x)^2 - \int_0^x 2tg(t)\frac{f(t)-g(t)}{t}dt = xg(x)^2 - \int_0^x 2g(t)(f(t)-g(t))dt$ ce qui, en développant, devient la relation de l'énoncé : $\int_0^x g(t)^2dt = 2\int_0^x f(t)g(t)dt - xg(x)^2$.
c. • Pour $t \geqslant 2$, comme $d(t) \geqslant t-1$, on a $f(t) \leqslant \frac{1}{t-1}$ et on en déduit que $g(x) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ car on a la majoration $g(x) \leqslant \frac{1}{x}\left(\int_0^2 f(t)dt + \int_2^x \frac{1}{t-1}dt\right) = \frac{1}{x}\left(\int_0^2 f(t)dt + \ln(x-1)\right) \leqslant \frac{\ln(x)+A}{x}$ pour $x \geqslant 2$ en posant $A = \int_0^2 f(t)dt$. Ainsi : $xg(x)^2 \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(x)^2}{x}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xg(x)^2 = 0$ par croissances comparées.

• Comme $d(t) \underset{+\infty}{\sim} t$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. Mais $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(t)^2}{t}\right)$ d'après ce qui précède. Par croissances comparées, $f(t)g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(t)^2}{t^2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc fg intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par Riemann ($\frac{3}{2} > 1$) : $\int_0^{+\infty} fg$ converge.
On en déduit donc que $x \mapsto 2\int_0^x f(t)g(t)dt - xg(x)^2$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\int_0^x f(t)g(t)dt - xg(x)^2\right) = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$. Or g^2 est positive donc la convergence de $\int_0^{+\infty} g^2$, qu'on vient d'établir, montre l'intégrabilité de g^2 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^{+\infty} g(t)^2dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$.

1.120 **a.** On calcule $f''(x) + 4\pi^2 f(x) = -8\pi^2\sin(2\pi x\sqrt{2}) + 4\pi^2\sin(2\pi x\sqrt{2}) = -4\pi^2\sin(2\pi x\sqrt{2})$. S'il existait une période $T > 0$ de f, alors f'' serait aussi T-périodique donc $g : x \mapsto \sin(2\pi x\sqrt{2})$ le serait aussi d'après l'équation et $h : x \mapsto \sin(2\pi x)$ le serait encore par différence. Or les périodes de g sont les éléments de $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}$ et celles de h sont les éléments de $\mathbb{Z}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel, on aboutit à une contradiction. Par conséquent : f n'est pas périodique.
b. Soit $q > 0$, posons $p = \lfloor q\sqrt{2}\rfloor + 1$, alors par définition de la partie entière : $p \leqslant q\sqrt{2} + 1 < p + 1$ mais $q \neq 0$ et $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $p \neq q\sqrt{2} + 1$. Ainsi, on a bien $0 < p - q\sqrt{2} < 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour chaque $q \in [\![1;n]\!]$, il existe $p_q \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < x_q = p_q - q\sqrt{2} < 1$ d'après ce qui précède. Les n réels $x_1, \cdots, x_n$ sont dans l'intervalle $]0;1[$ donc (par l'absurde), il en existe deux d'indices différents dont la distance relative est inférieure à $\frac{1}{n}$. Ainsi, il existe deux entiers $1 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant n$ tels

que $|x_{q_1} - x_{q_2}| < \dfrac{1}{n}$ ce qui implique $|p_{q_1} - q_1\sqrt{2} - p_{q_2} - q_2\sqrt{2}| < \dfrac{1}{n}$ et on a bien $\left|p - q\sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{n}$ avec $p = p_{q_1} - p_{q_2}$ et $q = q_1 - q_2 \in \mathbb{N}^*$. De plus $p \in \mathbb{N}^*$ car $\left|p - q\sqrt{2}\right| < 1$ et $q\sqrt{2} \geqslant \sqrt{2} > 1$.

c. Avec n tel que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, on construit $(p_1, q_1) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\left|p_1 - q_1\sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ d'après la question **b.**.

Supposons r couples distincts $\big((p_k, q_k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ construits tels que $\forall k \in [\![1;r]\!],\ \left|p_k - q_k\sqrt{2}\right| < \varepsilon$. Alors prenons un entier n tel que $\forall k \in [\![1;r]\!],\ \left|p_k - q_k\sqrt{2}\right| > \dfrac{1}{n}$ et utilisons la question **b.** pour construire un <u>nouveau</u> couple $(p_{k+1}, q_{k+1}) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\left|p_{k+1} - q_{k+1}\sqrt{2}\right| < \dfrac{1}{n} < |p_1 - q_1\sqrt{2}| < \varepsilon$.

Par récurrence, on construit ainsi une infinité de couples distincts deux à deux et vérifiant la condition.

d. ????

e. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et ℓ' associé à $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2\pi}$ dans la question précédente. Posons alors $\ell = \ell' + 1$. Soit $a > 0$ et $n = \lfloor a \rfloor + 1$. Alors par construction $[n; n + \ell'] \subset [a; a + \ell]$. Prenons alors un entier $q \in N_{\varepsilon'}$ et posons $r = q$. Alors $r \in [a; a + \ell]$ et il existe un entier p tel que $\left|p - q\sqrt{2}\right| < \varepsilon'$. Pour tout réel x, on a donc $\left|f(x + r) - f(x)\right| = \left|\sin(2\pi(x + q)\sqrt{2}) + \sin(2\pi(x + q)) - \sin(2\pi x\sqrt{2}) + \sin(2\pi x)\right|$ donc par 2π-périodicité de $\sin$: $\left|f(x + r) - f(x)\right| = \left|\sin(2\pi(x\sqrt{2} + q\sqrt{2} - p) - \sin(2\pi x\sqrt{2})\right| \leqslant 2\pi\left|p - q\sqrt{2}\right|$ car $\sin$ est 1-lipschitzienne. Enfin, $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f(x + r) - f(x)\right| \leqslant 2\pi\varepsilon' = \varepsilon$.

1.121 **a.** ($\Longrightarrow$) Supposons Φ croissante et soit P une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, on sait qu'elle admet alors une borne inférieure α. Soit $y \in \Phi(P)$, alors il existe $x \in P$ tel que $y = \Phi(x)$. Or $x \in P$ donc $\alpha \leqslant x$ et comme Φ est croissante, on a $\Phi(\alpha) \leqslant y = \Phi(x)$. Par conséquent $\Phi(\alpha)$ est un minorant de $\Phi(P)$ qui n'est pas vide. Comme la borne inférieure est le plus grand des minorants, on a $\Phi(\alpha) = \Phi(\mathrm{Inf}(P)) \leqslant \mathrm{Inf}(\Phi(P))$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $\forall P \in M,\ \Phi(\mathrm{Inf}(P)) \leqslant \mathrm{Inf}(\Phi(P))$. Soit x, y réels tels que $x < y$. Posons $P = \{x, y\}$. Alors $P \in M$ donc $\Phi(x) = \Phi(\mathrm{Inf}(P)) \leqslant \mathrm{Inf}(\Phi(P)) = \mathrm{Inf}\big(\{\Phi(x), \Phi(y)\}\big) \leqslant \Phi(y)$. Φ est donc croissante.

b. ($\Longrightarrow$) Supposons que Φ croit et est continue à droite, alors d'après **a.** on a $\forall P \in M,\ \Phi(\mathrm{Inf}(P)) \leqslant \mathrm{Inf}(\Phi(P))$. Soit $P \in M$ et $\alpha = \mathrm{Inf}(P)$, montrons que $\mathrm{Inf}(\Phi(P)) \leqslant \Phi(\alpha)$. Pour $\varepsilon > 0$, comme Φ est continue à droite en α, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]\alpha; \alpha + \eta[,\ \Phi(\alpha) \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi(\alpha) + \varepsilon$. Or puisque $\alpha = \mathrm{Inf}(P)$, pour $\eta > 0$, il existe $x \in P$ tel que $\alpha \leqslant x < \alpha + \eta$ ce qui donne par croissance de Φ : $\Phi(\alpha) \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi(\alpha) + \varepsilon$. Et comme $\Phi(x) \in \Phi(P)$, on a $\mathrm{Inf}(\Phi(P)) \leqslant \Phi(\alpha) + \varepsilon$. Mais ceci est vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$ ce qui implique que $\mathrm{Inf}(\Phi(P)) \leqslant \Phi(\alpha)$. Comme on avait déjà $\Phi(\mathrm{Inf}(P)) \leqslant \mathrm{Inf}(\Phi(P))$, on en déduit que $\Phi(\mathrm{Inf}(P)) = \mathrm{Inf}(\Phi(P))$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $\forall P \in M,\ \Phi(\mathrm{Inf}(P)) = \mathrm{Inf}(\Phi(P))$, alors d'après la question **a.**, la fonction Φ est déjà croissante. Si Φ n'était pas continue à droite partout, il existerait un réel x tel que $\Phi(x) < \lim\limits_{t \to x^+} \Phi(t) = \beta$. On prendrait alors $P =]x; +\infty[\in M$ et on aurait $\Phi(x) = \Phi(\mathrm{Inf}(P)) < \mathrm{Inf}(\Phi(P)) = \beta$ contredisant l'hypothèse. Ainsi, Φ est croissante et continue à droite partout.

1.122 **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ donc $f(t) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$ qui tend vers 0. Posons $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t)$ donc les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{2t\sqrt{t}}dt$ sont de même nature. Comme $\left|\dfrac{1 - \cos(t)}{2t\sqrt{t}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{3/2}}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1 - \cos(t)}{2t\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (prolongeable par continuité en 0) donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ converge.

b. D'après la question **a.**, la suite $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge en posant $(-1)^n u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$. On a donc $(-1)^n u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u + n\pi)}{\sqrt{u + n\pi}}du = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u + n\pi}}du$ avec le changement de variable $t = u + n\pi$

d'où $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+n\pi}}du > 0$. Comme $u + n\pi < u + (n+1)\pi$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $0 < u_n < \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{n\pi}}du = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}$ qui tend vers 0. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par encadrement et on en déduit avec le critère spécial des séries alternées que $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge (on le savait déjà) et que la somme A de cette série est du signe du premier terme u_0 donc $A > 0$.

1.123 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto e^{-t^2}e^{-tx}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a la relation $e^t f_x(t) = e^{-t^2-tx+t} = e^{t(1-x+t)}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t f_x(t) = 0$ d'où $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ et comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_x l'est aussi. Par conséquent le réel $f(x)$ est défini pour tout réel x.

b. Pour $x > 0$, comme $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant 1$, on a $0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-tx}$ et par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = \frac{1}{x}$. Par théorème d'encadrement, on a facilement (trop !) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1.124 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{t^x}{e^t - 1} = \dfrac{e^{x\ln(t)}}{e^t - 1}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $t^2 f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} t^{x+2}e^{-t}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_x(t) = 0$ d'où $f_x(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ d'après Riemann, la fonction f_x l'est aussi. De plus, $f_x(t) \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ car $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$. D'après Riemann, f_x est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $1 - x < 1 \iff x > 0$. Le réel $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $x > 0$, alors $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}dt > \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$ car $\forall t > 0,\ 0 < e^t - 1 < e^t$. Mais on reconnaît cette intégrale, c'est la célèbre fonction gamma d'Euler ainsi $f(x) > \Gamma(x+1)$.

Or $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \int_0^1 t^x e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^x e^{-t}dt = F(x) + G(x)$. Or $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ donc F est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et G est croissante car $x \mapsto t^x$ est croissante si $t \geqslant 1$. Ainsi G admet une limite en $+\infty$. De plus, $\Gamma(n+1) = F(n) + G(n) = n!$ (classique) donc $G(n) = n! - F(n) \geqslant n! - 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} G(n) = +\infty$ d'où l'on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1.125 **a.** • D'abord $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, f est continue en 0 donc $f(t) \underset{0}{=} O(1)$ et $t^\alpha f(t) \underset{0}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{-\alpha}}\right)$ avec $-\alpha < 1$ par hypothèse donc $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $]0;1]$. Comme, par hypothèse, $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, on en déduit que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)dt$ converge.

• Pour $x > 0$, par intégration par parties avec $u(t) = t^{\alpha+1}$ et $v(t) = f(t)$, comme u et v sont de classe C^1 sur $]0;x]$ et que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{\alpha+1}f(t) = 0$ car $\alpha + 1 > 0$, ce qui précède garantit que les intégrales suivantes convergent et qu'on a $\displaystyle\int_0^x (\alpha+1)t^\alpha f(t)dt = x^{\alpha+1}f(x) - \int_0^x t^{\alpha+1}f'(t)dt$. On ne pouvait pas tout de suite faire ceci sur $\mathbb{R}_+^*$ car on ne encore rien de la limite (ni même de son existence) de $x \mapsto x^{\alpha+1}f'(x)$ en $+\infty$.

• Or $t \mapsto t^{\alpha+1}f'(t)$ est continue et négative sur $\mathbb{R}_+$ car $\alpha + 1 > 0$, donc on a par le théorème de la limite monotone l'alternative suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x t^{\alpha+1}f'(t)dt = \ell \in \mathbb{R}_-$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x t^{\alpha+1}f'(t)dt = -\infty$.

• Comme $x^{\alpha+1}f(x) = \displaystyle\int_0^x (\alpha+1)t^\alpha f(t)dt + \int_0^x t^{\alpha+1}f'(t)dt$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}f(x) = (\alpha+1)\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)dt + \ell = \ell'$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}f(x) = -\infty$. Or f est positive donc on a forcément $\ell' \in \mathbb{R}_+$ dans le premier cas.

• Si on avait $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}f(x) = -\infty$, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1/x)}{x^\alpha f(x)} = 0$ qui se traduit par $\dfrac{1}{x} \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha f(x))$ or ceci est absurde par Riemann car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha f(x)dx$ converge d'après **a.**.

• Si on avait $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}f(x) = \ell' > 0$, alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell'}{x}$ ce qui à nouveau absurde avec la question **a.**.

• On a donc $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}f(x) = 0$, ce qui montre l'intégrabilité de $t \mapsto t^{\alpha+1}f'(t)$ car $x \mapsto \int_0^x t^{\alpha+1}f'(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$ et que cette fonction est négative (de signe constant).

b. On reprend l'intégration par parties précédente avec toujours $u(t) = t^{\alpha+1}$ et $v(t) = f(t)$, comme u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on sait maintenant que $\lim_{t\to0^+} t^{\alpha+1}f(t) = \lim_{t\to+\infty} t^{\alpha+1}f(t) = 0$, on a directement la relation attendue : $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1}f'(t)dt = -(\alpha+1)\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)dt$.

1.126 **a.** Méthode 1 : Supposons $\int_0^1 f(t)dt = 0$, si f continue sur $[0;1]$ ne s'annulait pas sur $]0;1[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f garderait un signe constant sur cet intervalle, par exemple positif. On aurait donc f positive, continue avec $\int_0^1 f(t)dt = 0$ et on sait qu'alors $f = 0$ sur $[0;1]$ ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi on a bien l'implication suivante : $\int_0^1 f(t)dt = 0 \Longrightarrow f$ s'annule au moins une fois sur $]0;1[$.

Méthode 2 (directe) : Soit $F : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, alors F est de classe C^1 sur $[0;1]$ et $F' = f$ d'après le théorème fondamental de l'intégration. De plus $F(0) = F(1) = 0$ avec l'hypothèse, alors avec le théorème de Rolle, on a l'existence de $c \in]0;1[$ tel que $F'(c) = f(c) = 0$.

b. Méthode 1 : Comme $\frac{1}{2} = \int_0^1 tdt$, on a $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \int_0^1 (f(t)-t)dt = 0$. D'après question **a.**, comme $g : t \mapsto f(t) - t$ est continue sur $[0;1]$, $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow g$ s'annule au moins une fois sur $]0;1[$. Or f admet en c un point fixe sur $]0;1[$ si et seulement si $f(c) = c$, c'est-à-dire $g(c) = 0$. Par conséquent, on a bien l'implication suivante : $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow f$ admet au moins un point fixe sur $]0;1[$.

Méthode 2 (directe) : Soit $G : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tdt = F(x) - \frac{x^2}{2}$. Alors G est de classe C^1 sur $[0;1]$ et $G'(x) = F'(x) - x = f(x) - x$. De plus $G(0) = G(1) = 0$ par hypothèse donc, avec le théorème de Rolle, il existe $c \in]0;1[$ tel que $G'(c) = 0 = f(c) - c$.

1.127 • Si $f(0) > 0$, par continuité de f en 0, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0;\alpha],\ f(x) > \frac{f(0)}{2}$.

Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) > \frac{f(0)}{2}$ (dès que $\frac{1}{n_0} < \alpha$).

Alors $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant \frac{(n+1)f(0)}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• De même, si $f(0) < 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

• Si $f(0) = 0$, par dérivabilité de f en 0 : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [0;\alpha],\ \left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in [0;\alpha],\ \left|f(x) - xf'(0)\right| \leqslant \varepsilon x$. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0} < \alpha$ associé à ε. Alors $\forall n \geqslant n_0,\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \alpha$ donc $\left|f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \frac{k}{n^2}f'(0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon k}{n^2}$. On obtient donc, en notant $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}f'(0)$, $|u_n - v_n| = \left|\sum_{k=0}^{n}\Big(f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \frac{k}{n^2}f'(0)\Big)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \frac{k}{n^2}f'(0)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon k}{n^2} = \frac{(n+1)\varepsilon}{2n} \leqslant \varepsilon$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et comme $v_n = \frac{(n+1)f'(0)}{2n}$, on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{f'(0)}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}$.

1.128 • Pour la première intégrale, on calcule $\frac{1}{x}\int_0^x \sin^2(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{x}\Big[\frac{2t-\sin(2t)}{4}\Big]_0^x$ pour $x > 0$ donc $\frac{1}{x}\int_0^x \sin^2(t)dt = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2x)}{4x}$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \sin^2(t)dt = \frac{1}{2}$.

• L'exercice est plus général quand on constate que les fonctions $t \mapsto \sin^2(t)$ et $t \mapsto |\sin t|$ sont π-périodiques. Prenons donc une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue et T-périodique avec $T > 0$.

Soit $x > 0$, alors $x = n_x T + y_x$ avec $n_x = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ et $y_x \in [0; T[$ car $n_x \leqslant \frac{x}{T} < n_x + 1 \Longleftrightarrow n_x T \leqslant x < (n_x + 1)T$.

Cette double inégalité se transforme en $\frac{1}{T} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{n_x}{x} \leqslant \frac{1}{T}$, donc, par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{n_x}{x} = \frac{1}{T}$.

On décompose $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n_x - 1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{n_x T}^{x} f(t)dt \Big)$ par Chasles. Or par T-périodicité de f, on a $\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ donc $\frac{1}{x} \sum\limits_{k=0}^{n_x - 1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \frac{n_x}{x} \int_0^T f(t)dt$ qui tend donc vers $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. Or $\left| \int_{n_x T}^{x} f(t)dt \right| \leqslant \int_{n_x T}^{x} |f(t)|dt \leqslant \int_0^T |f(t)|dt$ est borné : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_{n_x T}^{x} f(t)dt = 0$.

On en conclut que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dtdt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$.

Comme $\int_0^\pi |\sin(t)|dt = \int_0^\pi \sin(t)dt = \big[-\cos(t) \big]_0^\pi = 2$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin(t)|dt = \frac{2}{\pi}$.

1.129 Comme Arctan est impaire et ch paire, $x \mapsto \big| \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\, x) \big|$ et $x \mapsto \alpha + \beta \,\mathrm{Arccos} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)} \right)$ sont paires donc il suffit de trouver α et β qui conviennent sur $\mathbb{R}_+$. De plus, si la relation est vérifiée, en $x = 0$, cela donne $0 = \alpha$ et en prenant la limite en $+\infty$, on obtient $\frac{\pi}{2} = \beta \frac{\pi}{2}$ donc $\beta = 1$.

Il s'agit de prouver que : $\forall x \geqslant 0,\ g(x) = \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\, x) - \mathrm{Arccos} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)} \right) = 0$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car Arccos est dérivable sur $]-1; 1[$ et on a classiquement : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{\mathrm{ch}\,(x)}{1 + \mathrm{sh}^2(x)} - \Big(- \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \Big) \Big(- \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}}} \Big)$. Comme $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, on trouve en simplifiant que $g'(x) = 0$ donc que g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = 0$. On en conclut que $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big| \mathrm{Arctan}\,\big(\mathrm{sh}\,(x)\big) \Big| = \mathrm{Arccos} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)} \right)$.

1.130 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x) - \ln(1 - e^{-x})}{x} e^{-\alpha x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\ln(x) - \ln(1 - e^{-x}) = -\ln \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)$ or $\frac{1 - e^{-x}}{x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ par DL donc $\frac{\ln(x) - \ln(1 - e^{-x})}{x} \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$ et f se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = -\frac{1}{2}$. Ainsi f est intégrable sur $]0; 1]$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-x}) = 0$ donc $\ln(x) - \ln(1 - e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x} e^{-\alpha x} \underset{+\infty}{=} o(e^{-\alpha x}) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ car $\alpha > 0$ et on conclut avec Riemann que f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Par conséquent $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) - \ln(1 - e^{-x})}{x} e^{-\alpha x} dx$ existe pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1.131 Si $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : x \mapsto \ln \Big(2 \sin \frac{x}{2} \Big) \cos(nx)$ et $g_n : x \mapsto \sin(nx) \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ sont continues sur $]0; \pi]$. De plus $f_n(x) \underset{0}{\sim} \ln x \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{x}} \Big)$ donc f_n est intégrable sur $]0; \pi]$ par Riemann. Enfin g_n se prolonge par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 2n$ (car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$) donc g_n est intégrable sur $[0; \pi]$.

Pour $n \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u(x) = \ln \Big(2 \sin \frac{x}{2} \Big)$ et $v(x) = \sin(nx)$, alors les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0; \pi]$ et $\lim\limits_{x \to 0} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} nx \ln(x)$, de sorte que $nI_n = \int_0^\pi uv' = [uv]_0^\pi - \int_0^\pi u'v = -\frac{1}{2} J_n$.

De plus, $J_{n+1} = \int_0^\pi \sin((n+1)x)\dfrac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}dx$ or $\sin((n+1)x) - \sin(nx) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)$ ainsi on obtient $J_{n+1} = J_n + 2\int_0^\pi \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)\cos\frac{x}{2}dx$. De plus, $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(a+b) - \cos(a-b)\Big)$ donc $2\int_0^\pi \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)\cos\frac{x}{2}dx = \int_0^\pi \Big(\cos((n+1)x) - \cos(nx)\Big)dx = 0$ si $n \geqslant 1$. Ainsi, $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est constante et $J_1 = \int_0^\pi 2\cos^2\frac{x}{2}dx = \int_0^\pi (1+\cos x)dx = \pi$. Par conséquent : $J_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ J_n = \pi$ et $I_n = -\dfrac{\pi}{2n}$.

La convergence des intégrales $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$ se montre comme avant. De plus, le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ transforme l'une en l'autre : $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$.

Ainsi $I_0 = \int_0^\pi \ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)dx$, avec le changement de variable $x = 2u$: $I_0 = 2\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin u)du = \pi\ln 2 + 2I$.

Puis $2I = I + I = \int_0^{\pi/2} (\ln(\cos x) + \ln(\sin x))dx = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(2x)) - \ln 2)dx = -\dfrac{\pi\ln 2}{2} + \dfrac{1}{2}\int_0^\pi \ln(\sin t)dt$ (en ayant posé $x = \frac{t}{2}$). Mais comme $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, on a $\int_0^\pi \ln(\sin t)dt = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt = 2I$. Par conséquent $I = -\dfrac{\pi\ln 2}{2}$ (intégrales d'Euler). Enfin on arrive à $I_0 = 0$.

1.132 f étant continue sur le segment $[0;1]$, elle est bornée et atteint ses bornes ; on pose $m = \underset{[a;b]}{\mathrm{Min}}\, f = f(c) > 0$ et $M = \underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}\, f = f(d) > 0$ avec $(c,d) \in [a;b]^2$. Comme $\forall t \in [a;b],\ f(t) \leqslant M$, on a la majoration suivante $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\int_0^1 f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_0^1 M^n dt\right)^{\frac{1}{n}} = M$. De plus, par continuité de f en d (l'un des réels en le(s)quel(s) f atteint son maximum) : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in [a;b] \cap [d-\alpha; d+\alpha],\ M - \varepsilon/2 \leqslant f(t) \leqslant M$.
Soit $\delta = y - x > 0$ le diamètre de l'intervalle $[a;b]\cap[d-\alpha; d+\alpha] = [x;y]$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $u_n = \left(\int_0^1 f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\int_x^y f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta^{\frac{1}{n}} = w_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = M - \frac{\varepsilon}{2}$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ w_n \geqslant M - \varepsilon$. Conclusion : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ M - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant u_n \leqslant M$.
Ceci garantit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M = \underset{[a;b]}{\mathrm{Max}}\, f$.

1.133 Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto 1 - 2x\cos t + x^2 = \sin^2 t + (x - \cos t)^2 \geqslant 0$ est continue sur $]0;\pi[$. Elle ne peut s'y annuler car $\sin t > 0$ si $t \in]0;\pi[$ ainsi $g : t \mapsto \ln(1 - 2x\cos t + x^2)$ est continue sur $]0;\pi[$. De plus $\sin^2 t + (x - \cos t)^2 = 0 \iff \big((t = 0$ et $x = 1)$ ou $(t = \pi$ et $x = -1)\big)$. Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ car :

- si $x \neq \pm 1$, g est même continue sur $[0;\pi]$ donc $f(x)$ existe.
- si $x = 1$, g est continue sur $]0;\pi]$, $g(t) = \ln(2) + \ln(1 - \cos t) \underset{0}{\sim} 2\ln(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$: g est intégrable sur $]0;\pi]$.
- si $x = -1$, g est continue sur $[0;\pi[$, $g(\pi - t) = \ln(2) + \ln(1 - \cos t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$: g est intégrable sur $[0;\pi[$.
- Avec le changement de variable $t = \pi - u$, on a $f(x) = f(-x)$ car la fonction $\cos$ vérifie $\cos(\pi - u) = -\cos(u)$.
- Si $x \neq 0$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(\dfrac{1 - 2x\cos t + x^2}{x^2}\right)dt$ donc $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x) - 2\pi\ln|x|$.
- $f(x) + f(-x) = \int_0^\pi \big(\ln(1 - 2x\cos t + x^2) + \ln(1 + 2x\cos t + x^2)\big)dt$. Un petit calcul montre que l'on a $(1 - 2x\cos t + x^2)(1 + 2x\cos t + x^2) = (1 + x^2)^2 - 4x^2\cos^2(t) = x^4 - 2x^2\cos(2t) + 1$. Donc, en effectuant le changement de variable $t = \frac{u}{2}$: $f(x) + f(-x) = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(x^4 - 2x^2\cos u + 1)du$. Mais par 2π-périodicité et parité de $\cos$, on a $f(x) + f(-x) = f(x^2) = 2f(x)$.

On en déduit que $f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$. On a simplement $f(0) = \int_0^\pi 0 = 0$.

Soit $x \in]0;1[$, alors posons $u_n = x^{2^n}$ de sorte que $u_{n+1} = u_n^2$ et $f(u_{n+1}) = 2f(u_{n+1})$, puis, par récurrence : $f(u_n) = f(x^{2^n}) = 2^n f(x)$. Or f est bornée au voisinage de 0, en effet la fonction $g : K = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times [0;\pi] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \ln(1-2x\cos t + x^2)$ est continue sur le compact (ou fermé borné mais il faut se méfier :-)) K donc elle est bornée (par M disons). Alors $\forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, $f(x) = \int_0^\pi g(x,t)dt$ vérifie $|f(x)| \leqslant M$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x^{2^n})}{2^n} = 0 = f(x)$ car $\left|\dfrac{f(x^{2^n})}{2^n}\right| \leqslant \dfrac{M}{2^n}$. Si $x > 1$: $f(x) = 2\ln x - f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2\pi \ln x$.

Enfin par parité de f : $\forall x \in [-1;1]$, $f(x) = 0$ et $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f(x) = 2\pi\ln|x|$.

On peut aussi dériver $f(x)$ sous le signe somme, poser le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ qui s'impose avec les règles de BIOCHE et intégrer la fraction rationnelle qui en découle : légèrement hors programme.

1.134 Les solutions de (E_0) : $y'-y=0$ sont les $y : t \mapsto \lambda e^t$ et par variation de la constante, les solutions de (E) sont les $y : t \mapsto \lambda e^t + e^t\int_0^t f(u)e^{-u}du = \left(\lambda + \int_0^t f(u)e^{-u}du\right)e^t$. Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda + \int_0^t f(u)e^{-u}du = 0$ si et seulement si $\lambda = -\int_0^{+\infty} f(u)e^{-u}du$ qui existe car f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (même $\mathbb{R}$) et $\forall u \geqslant 0$, $|f(u)e^{-u}| \leqslant |f(u)|$.

Considérons donc $y_0 : t \mapsto \left(\int_0^t f(u)e^{-u}du - \int_0^{+\infty} f(u)e^{-u}du\right)e^t = -\int_t^{+\infty} f(u)e^{t-u}du$ la solution particulière. y_0 est bornée sur $\mathbb{R}$ car $\forall t \in \mathbb{R}$, $|y_0(t)| = \left|-\int_t^{+\infty} f(u)e^{t-u}du\right| \leqslant \int_t^{+\infty}|f(u)|du \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du$ puisque $\forall u \in [t;+\infty[$, $0 < e^{t-u} \leqslant 1$. Les solutions de (E) sont donc, par structure, les $y : t \mapsto \alpha e^t + y_0(t)$ et les fonctions $t \mapsto \alpha e^t$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = 0$ ainsi la seule solution de (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}$ est la fonction $h = y_0$.

Si $a > 0$, en intégrant $h = h' - f$: $\int_{-a}^a h(t)dt = h(a)-h(-a)-\int_{-a}^a F'(t)e^t dt = h(a)-h(-a)-\int_{-a}^a f(t)dt$ (1). On sait que $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. On a déjà vu que $|h(t)| = |u(t)v(t)| \leqslant \int_t^{+\infty}|f(u)|du$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$ (reste d'intégrale convergente). De plus $h(t) = -e^t\int_t^{+\infty} f(u)e^{-u}du$. Et en $-\infty$?

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, alors avec la relation de CHASLES, l'inégalité de la moyenne, on obtient l'inégalité suivante $\forall t \leqslant t_0$, $|h(t)| \leqslant \int_t^{t_0}|f(u)|e^{t-u}du + e^t\int_{t_0}^{+\infty}|f(u)|e^{-u}du$. Soit $\varepsilon > 0$ et t_0 tel que $\int_{-\infty}^{t_0}|f(u)|du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, comme $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$, $\exists t_1 \leqslant t_0$, $\forall t \leqslant t_1$, $0 \leqslant e^t\int_{t_0}^{+\infty}|f(u)|e^{-u}du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $t \leqslant t_1$, comme $\forall u \in [t;t_0]$, $e^{t-u} \leqslant 1$: $0 \leqslant \int_t^{t_0}|f(u)|e^{t-u}du \leqslant \int_t^{t_0}|f(u)|du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, $\forall t \leqslant t_1$, $|h(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et on arrive à $\lim\limits_{t\to-\infty} h(t) = 0$. Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} h$ converge et, en passant à la limite quand a tend vers $+\infty$ dans la relation (1) : $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

On recommence, pour $a > 0$, $\int_{-a}^a |h(t)|dt \leqslant \int_{-a}^a G(t)e^t dt$ en notant $G(t) = -\int_t^{+\infty}|f(u)|e^{-u}du$ pour montrer que h est intégrable (à faire) en effectuant une IPP et en majorant comme ci-dessus.

1.135 $I(x)$ ne peut être défini que si $\sin(2\theta) > 0$ pour $\theta \in \widetilde{]0;x[}$ donc pour $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Si $f : \theta \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{\sin(2\theta)} - 1}$, alors f est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ (car $\sin(2\theta) \in]0;1]$) et $f(\theta) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$ donc f est intégrable sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$. De même, f est intégrable sur $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ car $f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = f(\theta)$. Ainsi, on peut définir $I(x)$ pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ en prolongeant par continuité : $I(0) = 0$ (reste) et $I\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\dfrac{1}{\sin(2\theta)} - 1}\, d\theta$.

Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $I\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \int_0^{\pi/2-x} \sqrt{\frac{1}{\sin(2\theta)} - 1}\, d\theta$; on pose $\theta = \frac{\pi}{2}-t$: $I\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \int_x^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\sin(2t)} - 1}\, dt$ car $\sin(\pi-2t) = \sin(2t)$. Par conséquent $I\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + I(x) = I\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ce qui montre que le graphe de la fonction I est symétrique par rapport au point $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}I\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

On sait que $\sin(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ donc $I(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-2\tan\theta+\tan^2\theta}{2\tan\theta}}\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\, d\theta$. Le changement de variable $t = \tan\theta = \varphi(\theta)$ avec φ qui est bien de classe C^1 et bijective de $]0;x]$ dans $]0;\tan x]$, donne $I(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{|1-t|dt}{\sqrt{2t}(1+t^2)}$. Par la symétrie précédente, on peut se contenter de calculer $I(x)$ pour $x \in]0; \frac{\pi}{4}\Big[$ et on a donc $I(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{(1-t)dt}{\sqrt{2t}(1+t^2)}$ car $\tan(x) \leqslant 1$. On pose $t = u^2$ et $I(x) = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{\tan(x)}} \frac{(1-u^2)du}{(1+u^4)}$.
Comme $1+X^4 = (1+X^2)^2 - 2X^2 = (1+\sqrt{2}X+X^2)(1-\sqrt{2}X+X^2)$, on décompose la fraction en éléments simples $\frac{1-X^2}{1+X^4} = \frac{\sqrt{2}X+1}{2(1+\sqrt{2}X+X^2)} - \frac{\sqrt{2}X-1}{2(1-\sqrt{2}X+X^2)}$.

On reconnaît des logarithmes, il en découle la formule $\forall x \in]0; \frac{\pi}{4}\Big[$, $I(x) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}u+u^2}{1-\sqrt{2}u+u^2}\right)\right]_0^{\sqrt{\tan(x)}}$.

1.136 La fonction $f_n : x \mapsto \tan(x) - x$ est continue sur I_n, $\lim\limits_{x\to(\frac{-\pi}{2}+n\pi)^+} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^-} f_n(x) = +\infty$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. De plus, $f_n'(x) = \tan^2(x) \geqslant 0$ et $f_n'(x)$ ne s'annule qu'en $x = n\pi$ donc f_n est strictement croissante sur I_n ce qui prouve d'après le théorème de la bijection que f_n réalise une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f_n ne s'annule qu'une seule fois sur I_n, en un réel qu'on note $x_n \in I_n$.
Comme $x_n \in I_n$, $-\frac{\pi}{2}+n\pi \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}+n\pi$ donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$. Si on pose $y_n = x_n - n\pi$ alors $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $y_n \underset{+\infty}{=} O(1)$. De plus $\tan(y_n+n\pi) = x_n$ donc $\tan(y_n) = x_n \iff y_n = \text{Arctan}(x_n)$ car $\tan$ est π-périodique. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire $y_n = \frac{\pi}{2} - z_n$ avec $z_n \in]0;\pi[$ et $z_n \underset{+\infty}{=} o(1)$.
À nouveau $\tan\left(\frac{\pi}{2} - z_n\right) = x_n = \frac{1}{\tan(z_n)}$ donc $z_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$ d'où $z_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$. Enfin, comme on a $x_n = n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)$, on a $z_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{+\infty}{=} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o(1)}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$ ce qui donne $z_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec le $DL_2(0)$ de Arctan qui s'écrit $\text{Arctan}(x) \underset{0}{=} x + o(x^2)$. On en déduit le développement asymptotique avec une précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ souhaité : $x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1.137 Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$. f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = 5x^4 + n$ donc f_n' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui garantit l'injectivité de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Comme f_n est strictement négative sur $\mathbb{R}_-$, que $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n \geqslant 0$, il existe par le TVI un unique réel $u_n \in]0;1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$. Ceci garantit bien l'existence et l'unicité de cette suite.
Or $\forall x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) = x^5 + (n+1)x - 1 \geqslant x^5 + nx - 1$. Alors $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 = f_n(u_n) \geqslant f_n(u_{n+1})$ mais comme f_n est strictement croissante sur $[0;1]$, cela implique que $u_n \geqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minoré par 0 donc elle converge vers $\ell \in [0;1]$.

Or $\forall n \geqslant 1$, $\frac{u_n^5}{n} + u_n - \frac{1}{n} = 0$ ce qui donne en passant à la limite $0 + \ell - 0 = 0$ donc $\ell = 0$.

Pour $n > 0$, on a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} > 0$ donc $u_n \in \left]0; \frac{1}{n}\right[$ et on a donc $u_n \underset{+\infty}{=} o(1)$: ceci montre aussi que la limite de la suite est nulle mais sans la décroissance.

Ainsi $u_n^5 \underset{+\infty}{=} o(1)$ donc $u_n - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{u_n^5}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^6}$ ce qui donne $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$ qui est le développement asymptotique à deux termes cherché.

1.138 La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur chaque segment $\widetilde{\left[\frac{1}{x}; x\right]}$ pour $x \neq 0$. La fonction Φ est donc bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ la primitive (de classe C^1) de f qui s'annule en 1. On a $\forall x > 0,\ \Phi(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (par CHASLES) donc Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations. De même, si on note $G : x \mapsto \int_{-1}^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en -1 : $\forall x < 0,\ \Phi(x) = G(x) - G\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$.

Par conséquent, Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \neq 0$, effectuons le changement de variable $t = -u$ (assez facile à justifier) dans $\Phi(x)$, on a donc $\Phi(x) = \int_{-1/x}^{-x} e^{-(-u)^2}(-1)du = -\Phi(-x)$: Φ est donc impaire.

Si $x > 0$, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est continue et $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} f(t)dt$.

De même, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et que F est continue en 0, $\lim\limits_{x\to+\infty} F\left(\dfrac{1}{x}\right) = F(0) = -\int_0^1 f(t)dt$. Comme $\Phi(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS).

$\lim\limits_{x\to0^+} \Phi(x) = \int_{+\infty}^0 e^{-t^2}dt = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et Φ est impaire : $\lim\limits_{x\to0^-} \Phi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc Φ n'est pas prolongeable par continuité en 0. Comme $f > 0$, $\forall x \in]0;1]$, $\dfrac{1}{x} \geqslant x \Longrightarrow \Phi(x) \leqslant 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[$, $\dfrac{1}{x} \leqslant x \Longrightarrow \Phi(x) \geqslant 0$.

1.139 Même si ce n'est pas dit dans l'énoncé, on suppose a positif.

On écrit TAYLOR reste intégral : $\forall t \in [0;a],\ f(t) = f(0) + tf'(0) + \int_0^t (t-u)f''(u)du = \int_0^t (t-u)f''(u)du$.

De plus, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $\int_0^a |f(t)f''(t)|dt \leqslant \sqrt{\int_0^a f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^a f''^2(t)dt}$.

Comme f est continue sur le segment $[0;a]$, f y est bornée et y atteint ses bornes donc il existe $c \in [0;a]$ tel que $|f(c)| = \underset{t\in[0;a]}{\text{Sup}} |f(t)|$. Or $f(c)^2 = \left(\int_0^c (c-u)f''(u)du\right)^2 \leqslant \int_0^c (c-u)^2du \int_0^c f''^2(u)du \leqslant \dfrac{c^3}{3}\int_0^c f''^2(u)du$ donc $\int_0^a f^2(t)dt \leqslant af(c)^2 \leqslant \dfrac{a^4}{3}\int_0^a f''^2(u)du$ car $c \leqslant a$. Mais on ne trouve que $\int_0^a |f(t)f''(t)|dt \leqslant \dfrac{a^2}{\sqrt{3}}\int_0^a f''^2(t)dt$.

La bonne méthode était la suivante : comme $f(0) = 0$, on a $f(t) = \int_0^t f'(u)du$ et on majore avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $f^2(t) = \left(\int_0^t 1.f'(u)du\right)^2 \leqslant \int_0^t 1du \int_0^t f'^2(u)du = t\int_0^t f'^2(u)du \leqslant t\int_0^a f'^2(u)du$.

En intégrant entre 0 et a : $\int_0^a f^2(t)dt \leqslant \int_0^a f'^2(u)du \int_0^a tdt = \dfrac{a^2}{2}\int_0^a f'^2(u)du$.

Comme $f'(0) = 0$, il vient $f'(t) = \int_0^t f''(u)du$, et on obtient de même $\int_0^a f'^2(t)dt \leqslant \dfrac{a^2}{2}\int_0^a f''^2(u)du$.

Enfin, $\left(\int_0^a |f(t)f''(t)|dt\right)^2 \leqslant \int_0^a f^2(t)dt \int_0^a f''^2(t)dt \leqslant \dfrac{a^4}{4}\left(\int_0^a f''^2(t)dt\right)^2$ et on passe à la racine.

On a égalité dans cette inégalité si les trois inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et $\int_0^t f'^2(u)du \leqslant \int_0^a f'^2(u)du$ sont des égalités, c'est-à-dire si $a = 0$ ou si f est constante. On ne sait donc pas si cette inégalité est optimale.

1.140 **a.** G est bien définie car $t \mapsto |x-t|g(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$ pour tout $x \in [0;1]$. Pour justifier la régularité de G, on écrit $G(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)g(t)dt + \frac{1}{2}\int_x^1 (t-x)g(t)dt$ par CHASLES car $|x-t| = x-t$ si $t \in [0;x]$ et $|x-t| = t-x$ si $t \in [x;1]$. On en déduit par linéarité de l'intégrale que $G(x) = \frac{x}{2}\int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^x tg(t)dt + \frac{1}{2}\int_x^1 tg(t)dt - \frac{x}{2}\int_x^1 g(t)dt$. Comme les fonctions $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto tg(t)$ sont continues sur $[0;1]$, le théorème fondamental de l'intégration montre que G est de classe C^1 sur $[0;1]$ avec $G'(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) - \frac{xg(x)}{2} - \frac{xg(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_x^1 g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2}\int_x^1 g(t)dt$. Sous cette forme, G' est aussi de classe C^1 car g est continue, donc G est de classe C^2, avec $G''(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} = g(x)$.
b. Si on pose $f(x) = G(x) + ax + b$, alors $f(0) = G(0) + b$ donc $f(0) = 0 \iff b = -G(0)$. De plus $f(1) = G(1) + a + b$ d'où $f(1) = 0 \iff a = -b - G(1) = G(0) - G(1)$. Par conséquent la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = G(x) - (G(1) - G(0))x - G(0)$ vérifie bien $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' = G'' = g$.
c. Si $h : [0;1] \to \mathbb{R}$ vérifie aussi h de classe C^2 sur $[0;1]$, $h'' = g$ et $h(0) = h(1) = 0$, alors $f'' - h'' = (f-h)'' = 0$ ce qui prouve, comme $[0;1]$ est un intervalle, que $(f-h)'$ est constante puis que $f-h$ est affine. Or $(f-h)(0) = 0 - 0 = 0$ et $(f-h)(1) = 0 - 0 = 0$. Ainsi, la fonction affine $f-h$ s'annulant en deux points distincts, on a $f - h = 0$ donc $h = f$.
Conclusion : il existe une unique $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'' = g$, $f(0) = f(1) = 0$ et on a $f(x) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 |x-t|g(t)dt - \big(\int_0^1 (1-t)g(t)dt - \int_0^1 tg(t)dt\big)x - \int_0^1 tg(t)dt\Big) = \int_0^1 \frac{|x-t| - x + 2tx - t}{2} g(t)dt$.

1.141 Pour $n = 0$, $(e^{-x^2})^{(0)} = e^{-x^2} = P_0(x)e^{-x^2}$ avec $P_0 = 1$. Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(e^{-x^2})^{(n)} = P_n(x)e^{-x^2}$, alors $(e^{-x^2})^{(n+1)} = \big(P_n(x)e^{-x^2}\big)' = P_n'(x)e^{-x^2} - 2xP_n(x)e^{-x^2} = P_{n+1}(x)e^{-x^2}$ en posant $P_{n+1} = P_n'(x) - 2xP_n(x)$ qui est bien polynomiale.
On conclut par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X], \forall x \in \mathbb{R}$, $(e^{-x^2})^{(n)} = P_n(x)e^{-x^2}$. Par récurrence avec $P_{n+1} = P_n'(x) - 2xP_n(x)$, on montre que P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$.
On se rappelle de la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}$.
Pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, P_nP_m est un polynôme (de degré d) donc $P_n(x)P_m(x)e^{-x^2} \underset{+\infty}{=} O(x^d e^{-x^2}) = O(e^{-x})$ ainsi $x \mapsto P_n(x)P_m(x)e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Même chose sur $\mathbb{R}_-$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2}dx$ converge bien.
Si $m \geqslant 1$, $u(x) = P_n(x)$ et $v(x) = P_m(x)e^{-x^2} = (e^{-x^2})^{(m)}$, $\lim_{x\to\pm\infty} u(x)v(x) = 0$ et u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2}dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_n'(x)(e^{-x^2})^{(m-1)}dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_n'(x)P_{m-1}(x)e^{-x^2}dx$.
Si $0 \leqslant n < m$, en répétant ceci m fois, $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2}dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{(m)}(x)e^{-x^2}dx = 0$ car $P_n^{(m)} = 0$.
Si $n = m$, on parvient à $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)^2e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{(n)}(x)e^{-x^2}dx$ or $P_n^{(n)}(x) = (-2)^n n!$ car $\deg(P_n) = n$ et $\mathrm{dom}(P_n) = (-2)^n$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)^2e^{-x^2}dx = (-1)^n(-2)^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$.

1.142 $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un prolongement par continuité en 0 : $f(0) = 1$. Ainsi $\int_0^1 f$ converge. Posons $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$. Ces deux fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ (car $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$) et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ (car $u(t) \underset{+\infty}{=} O(1)$). Par théorème, les intégrales

$\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt$ sont de même nature.

Or si on pose $g : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un prolongement par continuité en 0 : $g(0) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 g$ converge. De plus $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur $[1; +\infty[$ et l'absolue convergence implique la convergence de cette intégrale. Par conséquent : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge et il en est de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$. Cette intégrale est dite de Dirichlet et $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire.

1.143 Méthode 1 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}(x+1)$. Comme la fonction Arctan, la fonction f est continue et strictement croissante, elle réalise donc d'après le théorème du même nom une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= \left]-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$. Ainsi, il existe un unique réel x tel que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{\pi}{4} + \mathrm{Arctan}(2) > \dfrac{\pi}{2}$, il vient $x \in]0; 1[$.

$\mathrm{Arctan}(x-1)+\mathrm{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x$ donc $\tan(\mathrm{Arctan}(x-1)+\mathrm{Arctan}(x+1)) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\, x\right)$ donc $\tan(\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}(x+1)) = \dfrac{1}{\tan(\mathrm{Arctan}(x))} = \dfrac{1}{x}$ car $\mathrm{Arctan}(x) \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, comme $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, il vient $\dfrac{2x}{1-(x^2-1)} = \dfrac{1}{x} \iff 2x^2 = 2 - x^2 \iff x = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \sim 0,82$.

Méthode 2 : On sait que $\mathrm{Arctan}(y)$ est un argument du complexe $1+iy$ si $y \in \mathbb{R}$ car on peut écrire $1+iy = \sqrt{1+y^2}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ (faire un dessin) et $1+iy = \sqrt{1+y^2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ donc $\tan(\theta) = y$ ce qui montre bien que $\theta = \mathrm{Arctan}(y)$.

On sait aussi que $\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$ donc, en itérant, $\arg(zz'z'') \equiv \arg(z)+\arg(z')+\arg(z'')\ [2\pi]$. Ainsi $\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}(x+1) \equiv \mathrm{Arg}\left((1+i(x-1))(1+ix)(1+i(x+1))\right)\ [2\pi]$ et l'équation devient $\arg(2-3x^2+(4x-x^3)i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ce qui équivaut à $2-3x^2+(4x-x^3)i \in i\,\mathbb{R}_+^*$ et, à nouveau, on trouve $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (car si $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ la partie imaginaire de $2-3x^2+(4x-x^3)i$ est strictement négative).

1.144 La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{th}\,(3x) - \mathrm{th}\, x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = 2$ car $\mathrm{th}\,(t) \underset{0}{=} t + o(t^2)$ donc $f(t) \underset{0}{=} \dfrac{3t - t + o(t^2)}{t} \underset{0}{=} 2 + o(t)$. De plus, $\mathrm{th}\,(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \dfrac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}} = 1 - \dfrac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$ donc $\mathrm{th}\,(t) \underset{+\infty}{=} 1 + O(e^{-2t})$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1+O(e^{-6x}) - 1 + O(e^{-2x})}{x} \underset{+\infty}{=} \dfrac{O(e^{-2x})}{x} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{e^{-2x}}{x}\right) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$.

Par comparaison avec une fonction de référence intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $u > 0$, $\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{th}\,(3x) - \mathrm{th}\, x}{x}dx = \int_0^u \frac{\mathrm{th}\,(3x)}{x}dx - \int_0^u \frac{\mathrm{th}\, x}{x}dx$ (les deux intégrales convergent). On pose $x = \dfrac{y}{3} = \varphi(y)$ dans la première intégrale (avec φ de classe C^1 sur le segment $[0; 3u]$) et on obtient la relation $\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{th}\,(3x) - \mathrm{th}\, x}{x}dx = \int_0^{3u} \frac{\mathrm{th}\,(y)}{y}dy - \int_0^u \frac{\mathrm{th}\, x}{x}dx = \int_u^{3u} \frac{\mathrm{th}\, x}{x}dx$ (par Chasles). Or $\dfrac{\mathrm{th}\, x}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc $\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{th}\,(3x) - \mathrm{th}\, x}{x}dx = \int_u^{3u} \frac{1}{x}dx + \int_u^{3u} \frac{\mathrm{th}\, x - 1}{x}dx = \ln(3) - \int_u^{3u} \frac{1-\mathrm{th}\, x}{x}dx$. Or $0 \leqslant 1 - \mathrm{th}\, x \leqslant 2e^{-x}$ donc $0 \leqslant \displaystyle\int_u^{3u} \frac{1-\mathrm{th}\, x}{x}dx \leqslant \int_u^{3u} \frac{2e^{-x}}{x}dx \leqslant 2(3u-u)\frac{e^{-u}}{u} = 4e^{-u}$. Ainsi, comme $\lim\limits_{u\to+\infty} 4e^{-u} = 0$, on en déduit par encadrement la valeur de I : $I = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th} x}{x} dx = \ln(3)$.

1.145 Comme la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $D =]0;1[\cup]1;+\infty[$, la fonction f est bien définie sur D car pour tout réel x appartenant à D, le segment $\widetilde{[x;x^2]}$ est inclus dans D.

Soit G une primitive de g sur D, alors $f(x) = [G(t)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x)$ donc f est C^∞ sur D car G l'est.

Si $x \in]0;1[$, g étant décroissante sur $[x^2;x]$, on a $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt = \frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt$.

Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = 0$ donc, par encadrement, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Comme $g(t) \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$, on est conduit à transformer $f(x)$ en $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt + \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt$.

Or $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(x+1)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1. De plus, en posant $h : t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$, on trouve par DL que $h(1+u) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$ donc h se prolonge par continuité en 1 en posant $h(1) = \frac{1}{2}$. Ceci signifie que h est bornée (par M) sur un voisinage de 1. Sur ce même voisinage, on a donc $\left|\int_x^{x^2} h(t)dt\right| \leqslant M|x^2 - x| \to 0$. Par encadrement, $\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} h(t)dt = 0$. Par somme, $\lim_{x\to 1} f(x) = \ln(2)$.

Par conséquent, la fonction f prolongée par $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

D'après ce qui précède, f est C^∞ sur D avec $f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ donc, classiquement, $\lim_{x\to 1} f'(x) = 1$. Par le théorème de prolongement C^1, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(1) = 1$.

Soit $\varphi :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ et $\varphi(0) = 1$, alors φ ne s'annule jamais sur son ensemble de définition et, d'après ce qui précède : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{\varphi(x-1)}$.

La fonction φ est DSE sur $]-1;1[$ car, classiquement : $\forall t \in]-1;1[,\ \varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n}$. Ainsi, φ est de classe C^∞ sur $]-1;1[$, et aussi comme rapport de telles fonctions sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ donc finalement sur $]-1;+\infty[$. Par composée et inverse, f', donc f, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{\ln x} = 0^+$ donc $f'(0) = 0$ par le théorème de prolongement C^1. Mais $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x\ln x} = +\infty$ et $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{x-1}{x\ln x}$ donc f n'est pas deux fois dérivable en 0 : f n'est pas de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

1.146 On suppose que $a < b$, la fonction $f : t \mapsto (b-t)^\alpha (t-a)^n$ est continue sur $[a;b[$ et $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} \frac{(b-a)^n}{(b-t)^{-\alpha}}$ donc f est intégrable sur $[a;b[$ si et seulement si $-\alpha < 1 \Longleftrightarrow \alpha > -1$ d'après RIEMANN et $I_{\alpha,n}$ existe.

Si on a $\alpha > -1$, on commence par le cas simple :

- si $n = 0$, alors on a $I_{\alpha,0} = \left[-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
- si $n \geqslant 1$, par IPP en définissant les deux fonctions de classe C^1 u et v par posant $u(t) = -\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $v(t) = (t-a)^n$, on a $\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt = \left[\frac{(b-t)^{\alpha+1}(t-a)^n}{\alpha+1}\right]_a^b + \frac{n}{\alpha+1} \int_a^b (b-t)^{\alpha+1} (t-a)^{n-1}$ donc $I_{\alpha,n} = \frac{n}{\alpha+1} I_{\alpha+1,n-1}$. Par une récurrence simple $I_{\alpha,n} = \frac{n}{\alpha+1} \times \frac{n-1}{\alpha+2} \times \cdots \times \frac{1}{\alpha+n} I_{\alpha+n,0}$ donc, compte tenu du point précédent : $I_{\alpha,n} = \frac{n!(b-a)^{\alpha+n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1} (\alpha+k)}$.

1.147 $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 1$ (classique). Les fonctions $u : t \to 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par DL ou croissances comparées, $\lim\limits_{t \to 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t)$. Ainsi, par IPP, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv' = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ ont même nature. Or la seconde est absolument convergente car la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1 - \cos t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = \dfrac{1}{2}$ par DL et $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge (mais pas absolument) pour $x \geqslant 0$. Soit donc $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction F y est C^1 et vérifie $F'(x) = -f(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$ par le théorème fondamental de l'intégration. $G : x \mapsto x$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc, par IPP, on a $\displaystyle\int_0^a F(x)G'(x)dx = [F(x)G(x)]_0^a - \int_0^a F'(x)G(x)dx$ pour un réel $a \geqslant 0$; ce qui donne $\displaystyle\int_0^a F(x)dx = aF(a) + \int_0^a \sin(x)dx = aF(a) + 1 - \cos(a)$.

Or par IPP encore, $aF(a) = a\left[\dfrac{1 - \cos t}{t}\right]_a^{+\infty} + a\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \cos(a) - 1 + a\int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ et on obtient $\displaystyle\int_0^a F(x)dx = a\int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = a\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - a\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = 1 - a\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ qui se transforme par une ultime IPP, $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \dfrac{1}{x^2}$, en $\displaystyle\int_0^a F(x)dx = 1 + \frac{\sin a}{a} - 2a\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

Enfin $\left|\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx\right| \leqslant \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2a^2}$ donc $\lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{\sin a}{a} = \lim\limits_{a \to +\infty} \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx = 0$ et on peut enfin conclure à la convergence l'intégrale proposée et que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt\right) dx = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a F(x)dx = 1$.

1.148 Récurrence descendante sur k. Pour $k = n$, la fonction $f^{(0)} = f$ s'annule au moins n fois par hypothèse.

Si $k \in [\![1; n]\!]$ et si on suppose que $f^{(n-k)}$ s'annule au moins k fois, en des réels $x_1 < \cdots < x_k$, d'après le théorème de Rolle appliqué sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, la fonction $(f^{(n-k)})' = f^{(n-k+1)}$ s'annule en $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ donc $f^{(n-(k-1))}$ s'annule en $y_1 < \cdots < y_{k-1}$ donc elle s'annule au moins $k - 1$ fois.
Par principe de récurrence, $\forall k \in [\![0; n]\!]$ $f^{(n-k)}$ s'annule au moins k fois.
Si $\deg(P) = n$ et si on suppose que l'équation $P(x) = e^x$ admet au moins $n+2$ solutions, donc que la fonction $f : x \mapsto P(x) - e^x$ de classe C^∞ s'annule au moins $n + 2$ fois, alors d'après ce qui précède, $f^{(n+1)}$ s'annule au moins $n + 2 - (n + 1) = 1$ fois ce qui est absurde puisque $f^{(n+1)} = -e^x$ ne s'annule jamais.
Par conséquent, si $P \in \mathbb{R}[X]$, l'équation $P(x) = e^x$ possède au maximum $\deg(P) + 1$ solutions.

1.149 Si $n \geqslant 3$, $P_n' = n(X^{n-1} - 1)$ donc la fonction polynomiale P_n (qui est clairement continue) est strictement décroissante sur $]0; 1[$ car pour tout $x \in]0; 1[$, $0 < x^{n-1} < 1$ donc $P_n'(x) < 0$. Or $P_n(0) = 1 > 0 > 2 - n = P(1)$. Ainsi, par le théorème de la bijection continue : $\exists! x_n \in]0; 1[$, $P_n(x_n) = 0$.

Comme $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on a $nx_n - 1 = x_n^n \in]0; 1[$ donc $1 \leqslant nx_n \leqslant 2$, d'où $x_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^n = 0$ car $0 < x_n^n < x_n$ et on a donc $x_n = \dfrac{1 + x_n^n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + x_n^n) = 1$.

$x_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ si $n \geqslant 4$ donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^n$ et on en déduit que $x_n^n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{2^n}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ par croissances comparées. De plus, $x_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{x_n^n}{n}$, ainsi $x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\ln(x_n) = \ln\left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -\ln(n) + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Par conséquent, $n\ln(x_n) \underset{+\infty}{=} -n\ln(n) + o(1)$ donc $x_n^n = e^{n\ln(x_n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^n}$. Au final, on a $x_n - \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{n+1}}$.

1.150 Les fonctions $a : x \mapsto 0$ et $b : x \mapsto x^4+1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $(E)\ :\ y''+ay'+by=0$ donc il existe d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable (et même de classe C^∞ par récurrence) qui vérifie le problème de CAUCHY : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = (x^4+1)f(x)$, $f(0)=f'(0)=1$.

Comme $\dfrac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on a l'existence de $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} - \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2}$. Par conséquent, H est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a $H'(x) = -\dfrac{1}{f^2(x)}$. Par produit, g est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(x) = f'(x)H(x)+f(x)H'(x) = f'(x)H(x) - \dfrac{1}{f(x)}$. À nouveau, comme f est supposée ne pas s'annuler, g' est dérivable et $g''(x) = f''(x)H(x) - \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} + \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = f''(x)H(x) = (x^4+1)f(x)H(x) = (x^4+1)g(x)$ puisque $f''(x) = (x^4+1)f(x)$. Ainsi, g est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Supposons que f s'annule sur $\mathbb{R}_+$ et posons $\alpha = \mathrm{Inf}\{x>0 \mid f(x)=0\}$. Par continuité de f en α, on a $\alpha>0$. Ainsi, f est strictement positive sur $[0;\alpha[$, donc f'' aussi d'où f' est strictement croissante sur $[0;\alpha[$ mais comme $f'(0)>0$, on a f' strictement positive sur $[0;a[$ donc f est strictement croissante sur $[0;\alpha[$ et $f(\alpha)>f(0)=1$ ce qui est absurde compte tenu de la continuité de f en α. Par conséquent, f reste strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Alors $f''>0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc $\forall t \geqslant 0,\ f'(t) \geqslant f'(0)=1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)dt \geqslant 1 + \int_0^x dt = 1+x$. On a donc $\dfrac{1}{f(x)^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+x)^2}$; or $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc, par comparaison, $\dfrac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1.151 Soit, pour $n \geqslant 3$, la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$ définie sur $\mathbb{R}_+$. On a $f_n'(x) = e^x - n$ donc f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[\ln(n);+\infty[$ et strictement décroissante sur $[0;\ln(n)]$. Comme $f_n(0)=1>0$, $f_n(\ln(n)) = n(1-\ln(n)) < 0$ car $n \geqslant 3 > e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ par croissance comparée, il existe bien d'après le théorème de la bijection appliqué à f_n sur les intervalles $[\ln(n);+\infty[$ et $[0;\ln(n)]$ seulement deux réels x_n et y_n tels que $0<x_n<\ln(n)<y_n$ et $f_n(x_n)=f_n(y_n)=0$.

Comme $f_n(1) = e-n < 0$ et que $1 \in [0;\ln(n)]$, on a par l'étude de f_n : $0<x_n<1$.

Il s'agit de constater que $\forall x>0,\ f_n(x) > f_{n+1}(x)$ de sorte que :

• Ainsi $f_n(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$ et $x_{n+1} \in [0;1] \subset [0;\ln(n)]$, intervalle sur lequel f_n est strictement décroissante donc $x_{n+1} < x_n$ et la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante.

• De même, $f_n(y_{n+1}) > f_{n+1}(y_{n+1}) = 0 = f_n(y_n)$ et $y_{n+1} \in [\ln(n+1);+\infty[\subset [\ln(n);+\infty[$, intervalle sur lequel f_n est strictement croissante donc $y_{n+1} > y_n$ et la suite $(y_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement croissante.

La suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est donc décroissante minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$. Or $x_n = \dfrac{e^{x_n}}{n}$ et on a les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{x_n} = e^\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ par produit.

La suite $(y_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante et $y_n \geqslant \ln(n)$ par construction donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ par encadrement.

Soit $\varepsilon>0$, alors $f_n((1+\varepsilon)\ln(n)) = n^{1+\varepsilon} - n(1+\varepsilon)\ln(n) = n(n^\varepsilon - (1+\varepsilon)\ln(n))$. Par croissance comparée, on a $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n^\varepsilon)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n((1+\varepsilon)\ln(n)) = +\infty$. Ainsi, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ (1+\varepsilon)\ln(n) \in [\ln(n);+\infty[$ et $f_n((1+\varepsilon)\ln(n)) > 0$. L'étude de la fonction f_n montre alors que $y_n \leqslant (1+\varepsilon)\ln(n)$.

Par conséquent, $\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \ln(n) \leqslant y_n \leqslant (1+\varepsilon)\ln(n)$. Ceci montre que $y_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

1.152 • $f : t \mapsto \dfrac{e^{\sin t}}{t}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$ mais $\forall t \geqslant 1,\ \dfrac{e^{\sin t}}{t} \geqslant \dfrac{1}{et}$ car $\sin(t) \geqslant -1$ et l'exponentielle est croissante. Or $t \mapsto \dfrac{1}{et}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$. Ainsi I diverge et f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

• $g : t \mapsto \sin t \sin \dfrac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0)=0$. De plus, $g(t) = \sin t \sin \dfrac{1}{t} = \dfrac{\sin(t)}{t} + \sin(t)\Big(\sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t}\Big)$. On pose $g_1 : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $g_2 : t \to \sin\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t}$. g_1 et g_2 se prolongent par continuité en 0 en posant $g_1(0) = 1$ et $g_2(0) = -1$. Il est classique que $\int_0^{+\infty} g_1$ converge (par IPP en se ramenant à $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ qui est absolument convergente). De plus, par DL : $g_2(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ donc g_2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par somme, $\int_0^{+\infty} g$ converge mais g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1.153 On a $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{x+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. On peut bien sûr aussi appliquer les techniques usuelles ou procéder par identification.
La fonction $f : t \mapsto t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0;1]$ (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]0;1]$) car ses seuls points de discontinuité sont les réels $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et tout segment inclus dans $]0;1]$ ne contient qu'un nombre fini de tels points.
De plus, f est positive et majorée par 1 car $\forall t \in]0;1]$, $0 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{t} < \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor + 1$ donc $0 \leqslant t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leqslant 1$, ainsi, par comparaison, f est intégrale sur $]0;1]$. On en déduit que $\int_0^1 f(t)dt$ converge d'où l'existence de I.
Or $I = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{1/n}^1 t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$. D'après CHASLES, en coupant aux points de discontinuité de f, on a $\int_{1/n}^1 t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \sum_{k=1}^{n-1} k \int_{1/(k+1)}^{1/k} tdt$ car $\forall t \in \left]\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k}\right]$, $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = k$.
Or, $\int_{1/(k+1)}^{1/k} tdt = \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2}$. Ainsi, $I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$. La série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$ converge car $\frac{2k+1}{2k(k+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ (on le savait déjà car $\int_0^1 f(t)dt$ converge) donc $I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$.
Mais $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$ vérifie $S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$ et, avec la classique valeur de $\zeta(2)$, on a $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = \frac{\pi^2}{12} \sim 0,82$.

1.154 Comme $\frac{\cos(t)}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$, on écrit $\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt - \int_x^{3x} \frac{1-\cos(t)}{t} dt = \ln(3) + \int_x^{3x} f(t)dt$ où l'on pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$ (prolongement par continuité avec DL). La fonction f étant continue sur le segment $[-3;3]$, on peut poser $M = \underset{t \in [-3;3]}{\mathrm{Max}} |f(t)|$ de sorte que $\forall x \in [-1;1]$, $\left|\int_x^{3x} f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_x^{3x} M dt\right| = 2M|x|$. Ainsi, par encadrement : $\lim_{x \to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \ln(3)$.

1.155 <u>Méthode 1</u> : la fonction $f : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^3 x}$ est continue sur le segment $[0;\ln(2)]$ donc I existe. Les règles de BIOCHE nous poussent à écrire $I = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^4(x)} \mathrm{ch}(x)dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{sh}^2(x))^2} \mathrm{ch}(x)dx$ car $\mathrm{ch}^2(x) = 1+\mathrm{sh}^2(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$, et à effectuer le changement de variable $t = \mathrm{sh}(x)$, licite car sh est une bijection strictement croissante et C^1 de $[0;\ln(2)]$ dans $[0;\mathrm{sh}(\ln(2)] = \left[0;\frac{3}{4}\right]$ car $\mathrm{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2-(1/2)}{2} = \frac{3}{4}$, ce qui montre que $I = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{sh}^2 x}{(1+\mathrm{sh}^2 x)^2}(\mathrm{ch}\, x)dx = \int_0^{3/4} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$.
On pose alors $u(t) = \frac{t}{2}$ et $v(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ de sorte que $u'(t) = \frac{1}{2}$ et $v'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ et, comme u et v sont C^1 sur $\left[0;\frac{3}{4}\right]$, par intégration par parties, $I = \left[-\frac{t}{2(1+t^2)}\right]_0^{3/4} + \frac{1}{2}\int_0^{3/4} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{6}{25} \sim 0,08$.
<u>Méthode 2</u> : on aurait aussi pu effectuer directement une intégration par parties avec $u(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ et

$v(x) = -\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{2}$, u et v étant de classe C^1 sur le segment $[0;\ln(2)]$ avec $u'(x) = -\dfrac{2\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}^3(x)}$ et $v'(x) = -\dfrac{\mathrm{ch}\,(x)}{2}$ donc $u'(x)v(x) = f(x)$, pour avoir $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} u(x)v'(x)dx$ ce qui donne $I = \left[-\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{2\mathrm{ch}^2(x)}\right]_0^{\ln(2)} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \dfrac{dx}{\mathrm{ch}\,(x)} = \left[-\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{2\mathrm{ch}^2(x)} + \mathrm{Arctan}(e^x)\right]_0^{\ln(2)} = \mathrm{Arctan}(2) - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{6}{25}$ car $\mathrm{ch}\,(\ln(2)) = \dfrac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \dfrac{2 + (1/2)}{2} = \dfrac{5}{4}$. C'est bien sûr la même valeur que précédemment avec la méthode 1 car en notant $\alpha = \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{3}{4}\right)$ et $\beta = \mathrm{Arctan}(2) - \dfrac{\pi}{4}$, on a $\tan(2\alpha) = \tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{3}{4}\right)\right) = \dfrac{3}{4}$ et $\tan(2\beta) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{Arctan}(2)\right) = -\dfrac{1}{\tan(2\,\mathrm{Arctan}(2))} = -\dfrac{1 - \tan^2(\mathrm{Arctan}(2))}{2\tan(\mathrm{Arctan}(2))} = -\dfrac{1-4}{2\times 2} = \dfrac{3}{4}$. De plus, les réels 2α et 2β appartiennent clairement à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel $\tan$ est injective, donc $\alpha = \beta$.

1.156 Si $\alpha = 2$, comme $u_n > 0$, posons $v_n = \ln(u_n^{1/n}) = \dfrac{1}{n}\ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{k^2}{n^2}\right)$. On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur le segment $[0;1]$ sur lequel f est continue. Par un théorème du cours, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(x)dx = I$. Par IPP, en posant $u : x \mapsto x$ et $v = f$ qui sont C^1 sur $[0;1]$, $I = [xf(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln(2) - \int_0^1 \dfrac{2(x^2+1) - 2}{1+x^2}dx = \ln(2) - 2 + 2[\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2} = \ell$ avec $\ell \sim 0,2639$. Par continuité de la fonction $\exp$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = e^{\ell} = a \sim 1,302$.
Il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n^{1/n} > 1.2$ donc $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant (1,2)^n$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Soit $\alpha \in [0;1]$, on effectue une comparaison série-intégrale classique, puisque $g : x \mapsto x^{\alpha}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et on a $\forall k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} g(x)dx \leqslant k^{\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} g(x)dx$ donc $\displaystyle\int_0^n g(x)dx \leqslant a_n \leqslant \int_1^{n+1} g(x)dx$. Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leqslant n^2 a_n \leqslant \dfrac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$ ainsi $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{\alpha+1}$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ si $\alpha \in [0;1[$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$ si $\alpha = 1$ ce qu'on savait déjà car si $\alpha = 1$, $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$.
Si $\alpha \in [0;1[$, d'après l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, comme $u_n \geqslant 1$, on a $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln(u_n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^{\alpha}}{n^2} = a_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ainsi, par le théorème d'encadrement, on conclut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Pour $x \in [0;1]$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ et la convergence se fait avec les conditions du CSSA donc, d'après ce théorème, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ (ce qu'on peut aussi prouver facilement par des études de fonctions). Ainsi, si $\alpha = 1$, $\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{k^2}{2n^4}\right)\ln(u_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} = \dfrac{n+1}{2n}$. Par le théorème des gendarmes toujours, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \dfrac{1}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{1/2} \sim 1,65$.
Si $\alpha \in]1;2[$, d'après l'inégalité précédente, comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\dfrac{k^{\alpha}}{n^2} \in [0;1]$, $u_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k^{\alpha}}{n^2} - \dfrac{k^{2\alpha}}{2n^4}\right) = w_n$ or $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{\alpha+1}$ d'après la comparaison série-intégrale qui précède. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car $\alpha > 1$. Bien sûr, si $\alpha \geqslant 2$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car $u_n \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{k^{\alpha}}{n^2}\right)$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{k^{\alpha}}{n^2}\right) = +\infty$ comme vu avant.

1.157 Posons, pour tout $n \geqslant 3$, la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = e^x - n$ donc f_n est strictement décroissante sur $[0;\ln(n)]$ et strictement croissante sur $[\ln(n);+\infty[$. Or $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n(\ln(n)) = n(1 - \ln(n)) < 0$ car $\ln(n) \geqslant \ln(3) > \ln(e) = 1$ et, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

On en déduit que f_n s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en $x_n \in]0; \ln(n)[$ et en $y_n \in]\ln(n); +\infty[$. Comme $f_{n+1}(x_n) = e^{x_n} - (n+1)x_n = f_n(x_n) - x_n = -x_n < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ et que $0 < x_n < \ln(n+1)$ et puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0; \ln(n+1)]$, que $0 < x_{n+1} < x_n$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \in]0; x_3]$. Comme $x_n = \dfrac{e^{x_n}}{n}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{x_n} = e^{\ell}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, il vient par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
De même, $f_n(y_{n+1}) = e^{y_{n+1}} - ny_{n+1} = f_{n+1}(y_{n+1}) + y_{n+1} = y_{n+1} > 0 = f_n(y_n)$ et $y_{n+1} > \ln(n+1) > \ln(n)$ donc, comme f_n est strictement croissante sur $[\ln(n); +\infty[$, on a $y_n < y_{n+1}$. Ainsi, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si elle convergeait vers un réel $a > 0$, alors on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{y_n} - ny_n) = +\infty$ ce qui est impossible puisque $e^{y_n} - ny_n = 0$. Alors, on a forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (limite monotone).

On reprend la relation $nx_n = e^{x_n}$ pour avoir de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$ donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. On reporte pour avoir $x_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n}\Big(e^{1/n+o(1/n)}\Big) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n}\Big(1 + \dfrac{1}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)\Big) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.
Soit $\varepsilon > 0$, posons $z_n = (1+\varepsilon)\ln(n) \in [\ln(n); +\infty[$, alors on obtient par croissances comparées la limite $f_n(z_n) = n^{1+\varepsilon} - (1+\varepsilon)n\ln(n) = n(n^{\varepsilon} - (1+\varepsilon)\ln(n)) \to +\infty$. Ainsi, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ f_n(z_n) > 0 = f_n(y_n)$. Or f_n est strictement croissante sur $[\ln(n); +\infty[$ donc $y_n < z_n = (1+\varepsilon)\ln(n)$. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \ln(n) \leqslant y_n \leqslant (1+\varepsilon)\ln(n)$ ce qui signifie que $y_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

1.158 D'abord, comme $f_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$ est continue sur le segment $[0;1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx$ converge et I_n existe pour tout entier n. Comme $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction $f = 0$ (fonction nulle) sur $]0;1]$, que les f_n et f sont continues sur $]0;1]$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0;1],\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x) = 1$ avec φ intégrable sur $]0;1]$, le théorème de convergence dominée montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 0$.
On effectue une intégration par parties en posant $u(x) = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ et $v(x) = e^{-2x}$, u et v sont de classe C^1 sur $[0;1]$ donc $I_n = -\Big[\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}e^{-2x}\Big]_0^1 - \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-2x}dx$ donc $I_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{2I_{n+1}}{n+1}$.
On multiplie par n et $nI_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{2n}{n+1}I_{n+1}$. Or d'après ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n+1}I_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$ ce qui donne l'équivalent $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. On a donc déjà $a = 0$ et $b = 1$. D'après la relation précédente, $n^2\Big(I_n - a - \dfrac{b}{n}\Big) = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{2n^2}{n+1}I_{n+1} - n = -\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{2n^2 I_{n+1}}{n+1}$. Or $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 I_{n+1}}{n+1} = 2$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\Big(I_n - a - \dfrac{b}{n}\Big) = -3$ ce qui donne enfin $c = -3$ et $I_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

1.159 Notons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n$ pour $n \geqslant 1$. $v_n - u_n = \dfrac{2}{n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.
De plus, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) \geqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n+1}\Big)$. Ainsi, comme $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$, on a $v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
$(u_n)_{\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont donc adjacentes, on sait qu'elles convergent vers la constante $\gamma \sim 0,577$.

1.160 Si $x < 0$, la fonction positive $f_x : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x = 0$, la fonction f_0 vérifie $f_0(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc f_0 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, si $x > 0$, la fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $f_x(t) \underset{0}{=} o(e^{-t})$ donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, l'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^1 f_x(t)dt + \int_1^{+\infty} f_x(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{x+t}dt - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{x+t}dt + \int_1^{+\infty} f_x(t)dt$. Or, par l'inégalité $\ln(1+y) \leqslant y$, on a aussi $e^u \geqslant 1+u$ donc $0 \leqslant 1-e^{-t} \leqslant t$ donc $0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{x+t}dt \leqslant \int_0^1 \frac{t}{x+t}dt \leqslant 1$. De plus, $0 \leqslant \int_1^{+\infty} f_x(t)dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+x}dt = \frac{1}{1+x}\Big[-e^{-t}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{e(1+x)} \leqslant 1$. Mais $\int_0^1 \frac{1}{x+t}dt = \ln(1+x) - \ln(x)$. Par conséquent, $F(x) \underset{0}{=} -\ln(x) + O(1)$ donc $F(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$.

1.161 La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est négative et continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $f(t) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) - \ln(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$ car $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Ainsi $f(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f est intégrable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$: I existe. On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (facile à justifier) qui garantit l'existence de $\int_{\pi/2}^0 \ln(\cos u)(-1)du = J$ et $I = J$. En considérant les intégrales sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin t \cos t\right)dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin(2t)\right)dt - \frac{\pi \ln 2}{2}$. On change de variable $v = 2t$ (facile à justifier), $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin(2t)\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left(\sin v\right)dv = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin v\right)dv$ par symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de la courbe de $v \mapsto \ln(\sin v)$ ou par changement de variable $w = \pi - v$. Alors $I + J = I + I = I - \frac{\pi \ln 2}{2}$ donc $I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}$. Cette intégrale est dite d'EULER.

1.162 $f : x \mapsto \frac{x - \text{Arctan}\, x}{x(1+x^2)\text{Arctan}\, x}$ est continue sur $]0; +\infty[$. Comme $\text{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{3}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. De plus, $x - \text{Arctan}(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi x^2}$ donc f intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN : I existe. $\frac{1}{(x^2+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ donc $f(x) = \frac{\text{Arctan}'\, x}{\text{Arctan}\, x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}$: $\int_a^b f(x)dx = \left[\ln(\text{Arctan}\, x) - \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_a^b = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+b^2)\,\text{Arctan}^2\, b}{b^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+a^2)\,\text{Arctan}^2\, a}{a^2}\right)$.

On fait rendre b vers $+\infty$ et on obtient : $\forall a > 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \ln(\pi/2) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+a^2)\,\text{Arctan}^2(a)}{a^2}\right)$. On fait maintenant tendre a vers 0^+ et on a enfin $I = \ln(\pi/2) \sim 0,45$.

1.163 Par construction, $f(x)$ est défini si $1 - \lfloor x \rfloor \neq 0$ donc si $x \notin [1; 2[$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$.

- f n'est pas définie en 1 où l'on ne peut donc pas étudier sa continuité.
- Il vient $f(2) = 3 = 4 - 1 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ donc f est continue en 2.
- De même $f(-2) = 4 = 4 + 0 = \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x)$ donc f est continue en -2.
- De plus, $f(-1) = 1$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 = 1 = 1 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \lim_{x\to -1^-} f(x)$ donc f est continue en -1.

En général, on a les différentes expressions de $f(x)$ selon les intervalles :

- Si $x \leqslant 0$, $\lfloor x \rfloor \leqslant -1$ donc $1 - \lfloor x \rfloor \geqslant 2$ donc $0 < \frac{1}{1 - \lfloor x \rfloor} \leqslant \frac{1}{2}$ donc $f(x) = x^2$.
- Si $x \in [0; 1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$ donc $f(x) = x^2 + 1$.
- Si $x > 2$, $\lfloor x \rfloor \geqslant 2$ donc $1 - \lfloor x \rfloor \leqslant -1$ d'où $-1 \leqslant \frac{1}{1 - \lfloor x \rfloor} < 0$ et on a donc $f(x) = x^2 - 1$.

On constate que f n'est pas continue en 0 car $f(0) = 1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

1.164 On remarque que par IPP en posant $x = t^2$ (facile à justifier), on a $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2tf(t^2)dt$. Or, en écrivant $\frac{1}{3} = \int_0^1 t^2 dt$, les fonctions cherchées vérifient $\int_0^1 (f(t^2)^2 - 2tf(t^2) + t^2)dt = 0$, c'est-à-dire

$\int_0^1 (f(t^2)-t)^2 dt = 0$. Mais $t \mapsto (f(t^2)-t)^2$ est continue et positive, un théorème du cours annonce l'équivalence suivante : $\int_0^1 (f(t^2)-t)^2 dt = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in [0;1],\ f(t^2)=t$.

Ainsi, il existe une unique fonction vérifiant les hypothèses imposées, il s'agit de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

1.165 Comme $\forall x \in [a;b],\ f(x) = \int_a^x f'(t)dt$, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on obtient la majoration $f(x)^2 = \Big(\int_a^x f'(t)dt\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^x 1^2 dt\Big)\Big(\int_a^x f'(t)^2 dt\Big) \leqslant (x-a)\Big(\int_a^b f'(t)^2 dt\Big)$. On intègre cette inégalité pour avoir $\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \Big(\int_a^b (x-a)dt\Big)\Big(\int_a^b f'(t)^2 dt\Big) = \dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)dx$.

1.166 Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g : t \mapsto \mathrm{Min}\big(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\big)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ g(t) = x$ donc g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $x = 0$, g est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc y est intégrable.
- Si $x > 0$, g est positive et $g(t) = x$ au voisinage de 0 donc g est intégrable sur $]0;1]$ d'après RIEMANN. De plus, $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc g est intégrable sur $[1;+\infty[$ d'après RIEMANN.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $\frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{t^2} \Longleftrightarrow t \leqslant 1$, on a $f(x) = \int_0^1 \mathrm{Min}\big(x, \frac{1}{\sqrt{t}}\big)dt + \int_1^{+\infty} \mathrm{Min}\big(x, \frac{1}{t^2}\big)dt$.

- Si $x \in [0;1]$, $f(x) = \int_0^1 x dt + \int_1^{1/\sqrt{x}} x dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 2\sqrt{x}$.
- Si $x \geqslant 1$, $f(x) = \int_0^{1/x^2} x dt + \int_{1/x^2}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 3 - \frac{1}{x}$.

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $f(1) = 2\sqrt{1} = 3 - \frac{1}{1} = 2$ mais elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2} = 1$ donc $f'(1) = 1$ mais $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$.

1.167 La fonction $f_\alpha : t \mapsto e^{\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}} - 1$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\alpha > 0$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = 0$ donc, comme on sait que $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$, on a $f_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \geqslant 0$ (fonctions positives). Traitons deux cas :

- Si $\alpha > 1$, $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc f_α aussi par comparaison.
- Si $\alpha \leqslant 1$, $\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = \frac{1}{2t^\alpha} - \frac{\cos(2t)}{2t^\alpha}$. Classiquement, par intégration par parties en posant $u(t) = \frac{\sin(2t)}{2}$ et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, u et v sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^\alpha}dt$ a même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^{\alpha+1}}dt$ qui est absolument convergente (comme ci-dessus). Mais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ diverge par RIEMANN, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}dt$ diverge (somme d'une convergente et d'une divergente) donc $\int_0^{+\infty} f_\alpha$ diverge.

De plus, à propos de l'étude locale au voisinage de 0, comme $\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} t^{2-\alpha}$:

- Si $\alpha < 2$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = 0$ donc f_α se prolonge par continuité en posant $f_\alpha(0) = e^0 - 1 = 0$.
- Si $\alpha = 2$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = 1$ donc f_α se prolonge par continuité en posant $f_\alpha(0) = e^1 - 1 \sim 1,72$.
- Si $\alpha > 2$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = +\infty$. Si $n \geqslant 1$, $\Big(\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}\Big)^n \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{n(\alpha-2)}} \underset{0}{=} o(f_\alpha(t))$ car $u^n \underset{+\infty}{=} o(e^u) \underset{+\infty}{=} o(e^u - 1)$.

Pour n tel que $n(\alpha-2) \geqslant 1$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{t^{n(\alpha-2)}}$ diverge par RIEMANN, $\int_0^1 f_\alpha(t)dt$ diverge par comparaison.

Au final, $\int_0^{+\infty} f_\alpha$ converge $\Longleftrightarrow \left(\int_0^1 f_\alpha \text{ converge et } \int_1^{+\infty} f_\alpha \text{ converge}\right) \Longleftrightarrow \alpha \in]1;2]$.

1.168 **a.** Si $f \in E$, comme f est de classe C^2 sur $[0;1]$, la fonction f'' est continue sur $[0;1]$ donc ϕ va bien de E dans F. Sa linéarité provient de la linéarité de la dérivation.

Soit $g : [0;1] \to \mathbb{C}$ continue, on sait qu'il existe une primitive g_1 de g et une primitive g_2 de g_1 sur l'intervalle $[0;1]$ (théorème fondamental de l'intégration). Ainsi, $g_2'' = (g_2')' = g_1' = g$. Comme les seules fonctions dont la dérivée seconde est nulle sont les fonctions affines, les fonctions dont une dérivée seconde est g sont les fonctions $G : [0;1] \to \mathbb{C}$ définies par $G(x) = g_2(x) + ax + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. La condition $G(0) = G(1) = 0$ se traduit donc par $g_2(0) + b = 0$ et $g_2(1) + a + b = 0$ donc par $a = g_2(0) - g_2(1)$ et $b = -g_2(0)$.

En conclusion, la seule fonction de E telle que $\phi(G) = g$ est la fonction $G : x \mapsto g_2(x) - (g_2(1) - g_2(0))x - g_2(0)$. Ceci prouve la bijectivité de ϕ : ϕ est donc un isomorphisme de E dans F.

Si on prend $g_1(x) = \int_0^x g(t)dt$ et $g_2(x) = \int_0^x g_1(t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t g(u)du\right)dt$ pour laquelle $g_2(0) = 0$ et $g_2(1) = \int_0^1 \left(\int_0^t g(u)du\right)dt$. Ainsi, $\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^x g_1(t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t g(u)du\right)dt - x\int_0^1 \left(\int_0^t g(u)du\right)dt$.

b. G est bien définie car $t \mapsto |x-t|g(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$. On a une autre expression de G qui va justifier sa régularité : $G(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)g(t)dt + \frac{1}{2}\int_x^1 (t-x)g(t)dt$. Ainsi : $G(x) = \frac{x}{2}\int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^x tg(t)dt + \frac{1}{2}\int_x^1 tg(t)dt - \frac{x}{2}\int_x^1 g(t)dt$. Comme les fonctions $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto tg(t)$ sont continues sur $[0;1]$, le théorème fondamental de l'intégration montre que G est dérivable et que $G'(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) - \frac{xg(x)}{2} - \frac{xg(x)}{2} - \frac{1}{2}\int_x^1 g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2}\int_x^1 g(t)dt$.

Sous cette forme, on voit que G' est à nouveau dérivable et on obtient $G''(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} = g(x)$. Comme g est continue, G est bien de classe C^2 et on a $G'' = g$ sur $[0;1]$.

c. On sait d'après la question **a.** (cette fois-ci $g_2 = G$) que $\phi^{-1}(g)(x) = G(x) - (G(1) - G(0))x - G(0)$ donc $\phi^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |x-t|g(t)dt - \left(\int_0^1 (1-t)g(t)dt - \int_0^1 tg(t)dt\right)x - \int_0^1 tg(t)dt\right)$. On regroupe sous une même intégrale, ce qui donne $\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 \frac{|x-t| - x + 2tx - t}{2}g(t)dt$. Si on définit $k : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ par $k(x,t) = \frac{|x-t| - x + 2tx - t}{2}$, on a donc $\forall x \in [0;1]$, $\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x,t)g(t)dt$.

d. La fonction k est continue sur le fermé borné (compact) $[0;1]^2$ donc elle y est bornée et y atteint ses bornes. Elle n'est de classe C^1 que sur les deux triangles ouverts $T_1 = \{(x,t) \in [0;1]^2 \mid 0 < t < x < 1\}$ et $T_2 = \{(x,t) \in [0;1]^2 \mid 0 < x < t < 1\}$. Cherchons les points critiques dans T_1 (par exemple). Si $(x,t) \in T_1$, on a $k(x,t) = \frac{x - t - x + 2tx - t}{2} = t(x-1) < 0$; si k admet en $(x,t) \in T_1$ un pont critique, alors $\frac{\partial k}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial k}{\partial t}(x,t) = 0$ donc $x - 1 = t = 0$: non car $(1,0) \notin T_1$. De même, k n'admet pas de point critique dans T_2 car $k(x,t) = \frac{t - x - x + 2tx - t}{2} = x(t-1) < 0$ si $(x,t) \in T_2$. Les extrema de k sont donc atteints sur $S_1 = \{(x,0) \mid x \in [0;1]\}$, $S_2 = \{(0,t) \mid t \in [0;1]\}$, $S_3 = \{(x,1) \mid x \in [0;1]\}$, $S_4 = \{(1,t) \mid t \in [0;1]\}$ ou $S_5 = \{(x,x) \mid x \in [0;1]\}$. Or $k(x,0) = k(0,t) = k(x,1) = k(1,t) = 0$. Par contre, $k(x,x) = x^2 - x \leqslant 0$ qui est minimal en $x = x_0 = \frac{1}{2}$ avec $k(x_0,x_0) = -\frac{1}{4}$. Ainsi, $\underset{[0;1]^2}{\text{Max}}\, k = 0$ et $\underset{[0;1]^2}{\text{Min}}\, k = -\frac{1}{4}$ d'où $||k||_{\infty,[0;1]^2} = \frac{1}{4}$.

Si $g \in E$, $|\phi^{-1}(g)(x)| = \left|\int_0^1 k(x,t)g(t)dt\right| \leqslant \int_0^1 |k(x,t)||g(t)|dt \leqslant ||k||_{\infty,[0;1]^2}||g||_{\infty,[0;1]} = \frac{||g||_{\infty,[0;1]}}{4}$ pour

$x \in [0;1]$. Alors $||\phi^{-1}(g)||_{\infty,[0;1]} \leqslant \dfrac{||g||_{\infty,[0;1]}}{4}$ donc ϕ^{-1} est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne donc continue.

Si ϕ était continue en 0, on aurait : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall f \in E,\ ||f||_{\infty,[0;1]} \leqslant \alpha \Longrightarrow ||\phi(f)||_{\infty,[0;1]} \leqslant \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1$, il existerait donc $\alpha > 0$ tel que (par homogénéité) $\forall f \in E,\ ||f||_{\infty,[0;1]} \leqslant 1 \Longrightarrow ||\phi(f)||_{\infty,[0;1]} < \dfrac{1}{\alpha}$. La fonction ϕ serait donc bornée sur la boule unité de E pour la norme infinie. Or, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto \sin(n\pi x)$, on a clairement $f_n \in E$ et $||f_n||_{\infty,[0;1]} = 1$.

Pourtant, comme $\phi(f_n) = f_n'' = -n^2\pi^2 f_n$, $||\phi(f_n)||_{\infty,[0;1]} = n^2\pi^2$ qui tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, ϕ n'est pas continue en 0 (et comme ϕ est linéaire ϕ n'est continue nulle part).

1.169 **a.** La fonction $f : u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{u}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et, comme $u \mapsto \sin(u)$ et $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$ et que $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\sin u}{u} = 0$, le théorème d'intégration par parties montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}du$ a même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}du$. Or $\left|\dfrac{\sin u}{u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$ donc, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}du$ converge absolument par RIEMANN. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}du$ converge.

b. Soit $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. La fonction $g : u \mapsto \dfrac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$ car $\cos(\alpha u) - \cos(\beta u) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{\alpha^2u^2}{2} - 1 + \dfrac{\beta^2u^2}{2} + o(u^2) \underset{0}{=} O(u^2)$ donc $g(u) \underset{0}{=} o(1)$. Ainsi, g est intégrable sur $[0;1]$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u}du$ existe d'après la question précédente car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u)}{u}du$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\beta u)}{u}du$ convergent et $I(\alpha,\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)du$.

Pour $x > 0$, toujours d'après la question **a.**, $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)du = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u)}{u}du - \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\beta u)}{u}du$. On effectue les changements de variable $t = \alpha u$ et $t = \beta u$ (faciles à justifier) dans ces intégrales et on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)du = \int_{\alpha x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt - \int_{\beta x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos t}{t}dt$ par CHASLES.

Or $\psi(t) = \dfrac{\cos t}{t} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{\cos t - 1}{t} = \dfrac{1}{t} + \varphi(t)$ avec φ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ (avec $\varphi(0) = 0$). Comme φ est continue sur le segment $[0;\mathrm{Max}(\alpha,\beta)]$, elle y est bornée par $M \geqslant 0$ donc on obtient la majoration $\forall x \in [0;1]$, $\left|\displaystyle\int_{\alpha x}^{\beta x} \varphi(t)dt\right| \leqslant M|\beta-\alpha|x$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_{\alpha x}^{\beta x} \varphi(t)dt = 0$. Comme $\displaystyle\int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{1}{t}dt = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, par linéarité de l'intégrale $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos t}{t}dt = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Ainsi, $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u}du = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

1.170 $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{th}(3x) - \mathrm{th}\,x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = 2$ car $\mathrm{th}(t) \underset{0}{=} t + o(t^2)$ donc $f(t) \underset{0}{=} \dfrac{3t - t + o(t^2)}{t} \underset{0}{=} 2 + o(t)$. De plus, $\mathrm{th}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \dfrac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = 1 - \dfrac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \underset{+\infty}{=} 1 + O(e^{-2t})$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1 + O(e^{-6x}) - 1 + O(e^{-2x})}{t} \underset{+\infty}{=} \dfrac{O(e^{-2x})}{x} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{e^{-2x}}{x}\right) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$. Par comparaison avec une fonction de référence intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $u > 0$, $\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{th}(3x) - \mathrm{th}\,x}{x}dx = \int_0^u \frac{\mathrm{th}(3x)}{x}dx - \int_0^u \frac{\mathrm{th}\,x}{x}dx$ (les deux intégrales convergent). On pose $x = \dfrac{y}{3} = \varphi(y)$ dans la première intégrale (avec φ de classe C^1 sur le segment $[0;3u]$) et on obtient la relation $\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{th}(3x) - \mathrm{th}\,x}{x}dx = \int_0^{3u} \frac{\mathrm{th}(y)}{y}dy - \int_0^u \frac{\mathrm{th}\,x}{x}dx = \int_u^{3u} \frac{\mathrm{th}\,x}{x}dx$ (par CHASLES). Or $\dfrac{\mathrm{th}\,x}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc

$\displaystyle\int_0^u \frac{\mathrm{th}\,(3x)-\mathrm{th}\,x}{x}dx = \int_u^{3u}\frac{1}{x}dx + \int_u^{3u}\frac{\mathrm{th}\,x-1}{x}dx = \ln(3) - \int_u^{3u}\frac{1-\mathrm{th}\,x}{x}dx$. Or $0 \leqslant 1-\mathrm{th}\,x \leqslant 2e^{-x}$ donc $\displaystyle 0 \leqslant \int_u^{3u}\frac{1-\mathrm{th}\,x}{x}dx \leqslant \int_u^{3u}\frac{2e^{-x}}{x}dx \leqslant 2(3u-u)\frac{e^{-u}}{u} = 4e^{-u}$. Ainsi, $\displaystyle I = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u \frac{\mathrm{th}\,(3x)-\mathrm{th}\,x}{x}dx = \ln(3)$.

1.171 **a.** La fonction f est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$ par opérations et $f'(x) = 1+\dfrac{1}{1+x} > 0$ donc f est strictement croissante. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par le théorème de la bijection. Comme f' ne s'annule pas, $g = f^{-1}$ est aussi de classe C^∞.
b. Comme $f(0) = 0$, on a directement $g(0) = 0$. De plus, on sait que $g'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$.
c. Comme g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, f admet par le théorème de Taylor-Young un développement limité à tout ordre en tout point. Notamment, g admet un $DL_3(0)$ donné par $g(x) \underset{0}{=} 0 + \frac{x}{2} + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$ avec $a = \dfrac{g''(0)}{2}$ et $b = \dfrac{g'''(0)}{6}$. Mais f admet aussi un $DL_3(0)$ donné classiquement par $f(x) \underset{0}{=} 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Il suffit de composer pour avoir $f\circ g(x) \underset{0}{=} = 2\Big(\frac{x}{2}+ax^2+bx^3\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{2}+ax^2+bx^3\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{x}{2}+ax^2+bx^3\Big)^3 + o(x^3)$.
En ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 3, $f(g(x)) \underset{0}{=} x + \Big(2a-\frac{1}{8}\Big)x^2 + \Big(2b-\frac{a}{2}+\frac{1}{24}\Big)x^3 + o(x^3)$.
Or $f(g(x)) = x$ donc, par unicité du développement limité, on a le système : $2a - \dfrac{1}{8} = 2b - \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{24} = 0$ donc $a = \dfrac{1}{16}$ et $b = -\dfrac{1}{192}$. Le développement limité à l'ordre 3 de g en 0 est donc $g(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x^3}{192} + o(x^3)$.

1.172 **a.** La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est négative et continue sur $\big]0;\frac{\pi}{2}\big]$. De plus, $f(t) = \ln\big(\frac{\sin(t)}{t}\big) - \ln(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$ car $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t} = 1$. Ainsi $f(t) \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$ donc f est intégrable sur $\big]0;\frac{\pi}{2}\big]$: I existe. On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (facile à justifier) qui garantit l'existence de $\displaystyle\int_{\pi/2}^0 \ln(\cos u)(-1)du = J$ et $I = J$.
b. En considérant les intégrales sur $\big]0;\frac{\pi}{2}\big[$, $\displaystyle I+J = \int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin t\cos t\big)dt = \int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(2t)\big)dt - \frac{\pi\ln 2}{2}$. On change de variable $v = 2t$ (facile à justifier), $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(2t)\big)dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\big(\sin v\big)dv = \int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin v\big)dv$ par symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de la courbe de $v \mapsto \ln(\sin v)$ ou par changement de variable $w = \pi - v$. Alors $I + J = I + I = I - \dfrac{\pi\ln 2}{2}$ donc $I = J = -\dfrac{\pi\ln 2}{2}$. Cette intégrale est dite d'Euler.

1.173 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{\tan^n(x)}$ est continue sur le segment $\Big[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\Big]$ en prolongeant f_n par continuité en $\frac{\pi}{2}$ avec $f_n\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0$. Ainsi, $\displaystyle I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\tan^n x}$ existe.
b. On pose $t = \tan(x) = \varphi(x)$ avec φ bijective de classe C^1 de $\Big[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\Big[$ dans $[1;+\infty[$, d'après le théorème de changement de variable : $\displaystyle I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{(1+\tan^2(x))\tan^n x}\times(1+\tan^2(x))dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)t^n}dt$.
c. On identifie $\dfrac{1}{t^2(1+t^2)} = \dfrac{a}{t^2} + \dfrac{b}{t} + \dfrac{ct+d}{1+t^2} = \dfrac{a(1+t^2)+bt(1+t^2)+(ct+d)t^2}{t^2(1+t^2)}$ ce qui donne le système $c+b = a+d = b = a-1 = 0$ donc $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = -1$.
d. D'après les questions **b.** et **c.** : $\displaystyle I_2 = \int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)t^2}dt = \int_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\Big)dt$ donc, en intégrant simplement, $\displaystyle I_2 = \Big[-\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}(t)\Big]_1^{+\infty} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \sim 0,21$.
De plus, avec le changement de variable $u = \varphi(t) = t^2$: $\displaystyle I_3 = \int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)t^3}dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{2t\,dt}{(1+t^2)(t^2)^2}$

donc $I_3 = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^2} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{1+u}\right)du = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u} + \ln\left(1+\frac{1}{u}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{1-\ln(2)}{2} \sim 0,15$.

Enfin, $I_2 + I_4 = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+t^2)t^2} + \frac{1}{(1+t^2)t^4}\right)dt = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^4} = \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$: $I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \sim 0,12$.

1.174 **a.** Des primitives des fonctions continues $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ sont respectivement Arcsin et $t \mapsto -\sqrt{1-t^2}$ sur $[0;1[$. Comme ces deux fonctions admettent des limites finies en 1^-, les deux intégrales de l'énoncé convergent et on a $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\mathrm{Arcsin}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = [-\sqrt{1-t^2}]_0^1 = 1$.

b. La fonction $f_3 : t \mapsto \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0;1[$ et $f_3(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1-t}}$ donc f_3 est intégrable sur $[0;1[$ par RIEMANN donc I_3 existe. On pose $t = \sin(u) = \varphi(u)$ où φ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $[0;1[$ et on obtient $I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2(u)du$ donc $I_3 = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos(2u)}{2}\right)du = \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.