SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 2 ALGÈBRE GÉNÉRALE ET LINÉAIRE

2.1 Complexes

2.1 C'est une équation bicarrée, on pose $Z = z^2$. On trouve $z = \pm(3-2i)$ ou $z = \pm(1-i)$.

2.2 On écrit que $S_p(x) = \mathrm{Re}\left(-\sum_{k=1}^{2p}\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}}{2} \times \frac{1-\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)^{2p}}{1+\frac{e^{ix}}{2}}\right)$. Ainsi, on obtient :

$$S_p(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ix}}{2^{2p}} \times \frac{(2+e^{-ix})(2^{2p}-e^{2ipx})}{(2+\cos x)^2+\sin^2 x}\right) = \frac{2\cos x + 1 - 2^{-2p}\cos(2px) - 2^{1-2p}\cos\big((2p+1)x\big)}{5+4\cos x}$$

et en faisant tendre p vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p(x) = \dfrac{1+2\cos x}{5+4\cos x}$.

2.3 C'est une équation polynomiale de degré $2n-1$ dont 1 n'est pas solution. On écrit donc pour un complexe $z \neq 1$, $(1+z)^{2n} = (1-z)^{2n} \iff \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![0;2n-1]\!] \setminus \{n\}$ car $k = n \iff 1+z = z-1$ (NON). On obtient donc $\frac{1+z_k}{1-z_k} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) \iff z_k = i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Les solutions sont donc 0 et les $\pm i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1;n-1]\!]$.

2.4 Si $z \neq 0$ et $z \neq 1$, on a z, z^2 et z^5 sont alignés $\iff \frac{z^5-z^2}{z^2-z} \in \mathbb{R} \iff z(z^2+z+1) \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a : z, z^2 et z^5 soient alignés $\iff z(z^2+z+1) = \bar{z}(\bar{z}^2+\bar{z}+1) \iff (z-\bar{z})(z^2+z\bar{z}+\bar{z}^2+z+\bar{z}+1) = 0$. On trouve donc la droite réelle et l'ellipse d'équation cartésienne $3x^2-y^2+2x+1=0$.

2.5 **a.** Évident si $b = 0$. Sinon : $\prod_{k=0}^{n-1}\left(a+\omega^k b\right) = (-b)^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{a}{b}-\omega^k\right)$. Or $\left\{\omega^0, \cdots, \omega^{n-1}\right\} = \mathbb{U}_n$ donc $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\omega^k\right)$. Ainsi $\prod_{k=0}^{n-1}\left(a+\omega^k b\right) = (-b)^n\left(\left(-\frac{a}{b}\right)^n - 1\right) = a^n - (-b)^n$.

b. $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1 = (X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$ d'où $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{2k}-2\omega^k\cos(\theta)+1\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\theta}-\omega^k\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{-i\theta}-\omega^k\right)$ donc $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{2k}-2\omega^k\cos(\theta)+1\right) = \left(e^{in\theta}-1\right)\left(e^{-in\theta}-1\right) = 1 - e^{in\theta} - e^{-in\theta} + 1 = 2\big(1-\cos(n\theta)\big)$.

2.6 **a.** C'est $1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{-i\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$ car $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

b. On cherche z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in [-\pi;\pi[$. (E) : $2\rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ ($\rho_0 \geqslant 0$, $\theta_0 \in [-\pi;\pi[$). z solution de $(E) \iff \left(2\rho\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \rho_0 \text{ et } \frac{\theta}{2} \equiv \theta_0\,[2\pi]\right)$.

Trois cas si z solution : **A** si $\theta_0 = -\pi$, alors $\rho_0 = 0$ et $z \in \mathbb{R}_-$ quelconque. **B** si $\theta_0 \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, impossible à cause des signes. **C** si $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\theta = 2\theta_0$ (grâce aux intervalles) et $\rho = \frac{\rho_0}{2\cos(\theta_0)}$.

Ainsi, **A** si $z_0 = 0$ il y a une infinité de solutions $z \in \mathbb{R}_-$; **B** si $\mathrm{Re}(z_0) < 0$ ou $\big(\mathrm{Re}(z_0) = 0$ et $z_0 \neq 0\big)$, pas de solution ; **C** si $\mathrm{Re}(z_0) > 0$, il y a une seule solution $z = \frac{\rho_0}{2\cos(\theta_0)}e^{\frac{i\theta_0}{2}}$. Il faut dessiner !

2.7 Posons $z = x + iy$ avec $y > 0$, alors $z + i = x + i(y + 1) \neq 0$ donc $\Phi(z)$ est bien défini. Ensuite, il vient $|\Phi(z)| = \sqrt{\dfrac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2}} < 1$ car $|y - 1| < |y + 1|$. De plus, soit $(z_1, z_2) \in \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0\}^2$, alors $\dfrac{z_1 - i}{z_1 + i} = \dfrac{z_2 - i}{z_2 + i} \Longleftrightarrow 2i(z_1 - z_2) = 0 \Longleftrightarrow z_1 = z_2$ donc Φ est injective. Ensuite soit z' tel que $|z'| < 1$, on a : $\dfrac{z - i}{z + i} = z' \Longleftrightarrow z = i\,\dfrac{1 + z'}{1 - z'}$. Or $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2i} = \dfrac{1 - z'\overline{z'}}{2} > 0$ car $|z'| < 1$; ainsi Φ est aussi surjective.

2.8 **a.** On transforme $|z_2|\,|z_1 - z_3| = |z_2 z_1 - z_2 z_3| = |z_2 z_1 - z_1 z_3 + z_1 z_3 - z_2 z_3|$ ce qui permet d'avoir l'inégalité $|z_2|\,|z_1 - z_3| \leqslant |z_2 z_1 - z_1 z_3| + |z_1 z_3 - z_2 z_3| = |z_1|\,|z_2 - z_3| + |z_3|\,|z_1 - z_2|$.
b. On paramètre $z_1 = b - a$, $z_2 = c - a$ et $z_3 = d - a$ et on a la bonne inégalité en utilisant **a.**.
c. Par translation, symétrie, homothétie, rotation, on peut prendre $(a, b, c, d) \in \mathbb{U}^4$ et $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$, $c = e^{i\gamma}$ et $d = e^{i\delta}$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta < 2\pi$. Alors $AB = |e^{i\alpha} - e^{i\beta}| = 2\sin\left(\dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)$ par exemple et $2\sin\left(\dfrac{\gamma - \alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\delta - \beta}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\beta - \alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\delta - \gamma}{2}\right) + 2\sin\left(\dfrac{\delta - \alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\gamma - \beta}{2}\right)$ ou encore $\cos\left(\dfrac{\beta - \alpha - \delta + \gamma}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{\beta - \alpha + \delta - \gamma}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{\delta - \alpha - \gamma + \beta}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{\delta - \alpha + \gamma - \beta}{2}\right)$ qui vaut finalement $\cos\left(\dfrac{\gamma - \alpha - \delta + \beta}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{\gamma - \alpha + \delta - \beta}{2}\right)$ suffit.

2.2 Dénombrement

2.9 On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \lfloor\sqrt{k}\rfloor = n + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} p$ en distinguant selon les valeurs possibles de $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ qui vaut p ssi $k \in [\![p^2; (p+1)^2 - 1]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \lfloor\sqrt{k}\rfloor = n + \sum_{p=0}^{n-1} p\big(2p + 1\big) = n + \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(4n^2 - 3n + 5)}{6}$.

2.10 $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$ car cet entier est nul pour $k = 0$. On arrive donc, en changeant d'indice, à $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card}(X) = n\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$.
On pouvait aussi écrire $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card}(X) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{x \in X} 1 = \sum_{x \in E} \sum_{X \supset \{x\}} 1 = \sum_{x \in E} 2^{n-1} = n2^{n-1}$.

2.11 Bien sûr que si $A \not\subset B$, il n'y a aucune solution. Si $A \subset B$, les éléments de $E \setminus B$ ne doivent pas être dans X, ceux de $B \setminus A$ doivent y être et on peut choisir $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$ pour avoir $X = (B \setminus A) \cup Y$ solution. Donc en notant $r = \operatorname{card}(A \cap B)$, le nombre de solutions est 2^r.

2.12 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j\binom{n+1}{j}$ en changeant d'indice et on reconnaît un binôme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = -\frac{(1-1)^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

2.13 • Soit f une telle surjection, un élément de $[\![1; n]\!]$ a 2 antécédents : n choix. Choix des antécédents : $\dbinom{n+1}{2}$. Choix des images des $n - 1$ autres éléments (de manière bijective : $(n-1)$)!. Comme ces choix sont (en nombre) indépendants : il y a donc $n\dbinom{n+1}{2}(n-1)! = \dfrac{n(n+1)!}{2}$ telles surjections.

• Celles pour lesquelles deux éléments ont deux antécédents : $\dbinom{n}{2}\dbinom{n+2}{2}\dbinom{n}{2}(n-2)!$. Celles pour lesquelles un élément a trois antécédents : $\dbinom{n}{1}\dbinom{n+2}{3}(n-1)!$. En tout, cela fait $\dfrac{n(n+2)!(3n+1)}{24}$ surjections.

2.14 **a.** Si $n = p$, il est clair que cette somme vaut 1. Sinon, comme $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$, on a $\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-p}{k-p} = \binom{n}{p}(-1)^{n-p}(1-1)^{n-p} = 0$.

b. Sous ces conditions, pour $q \in [\![0;n]\!]$, on a $\sum_{k=0}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}y_k = \sum_{k=0}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x_j$ ainsi on a : $\sum_{k=0}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}y_k = \sum_{j=0}^{q}\Big(\sum_{k=j}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}\binom{k}{j}\Big)x_j = x_q$ d'après **a.**.

c. Parmi les p^n applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$, il y en a $\binom{p}{k}S_{p,k}$ dont l'image est de cardinal k. Alors en posant $y_p = p^n$, $x_q = S_{n,q}$ et $y_0 = 0^n = 0$ et $x_0 = S_{n,0} = 0$ (convention), on a bien les relations $\forall p \in [\![0;n]\!],\ y_p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x_k$ et donc, d'après **b.** : $\forall q \in [\![0;n]\!],\ S_{n,q} = \sum_{k=0}^{q}(-1)^{q-k}\binom{q}{k}k^n$.

2.15 **a.** Il est clair que $b_n = 3^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Pour avoir un $(n+1)$-uplet avec un nombre pair de 1, on peut rajouter 2 ou 3 à la fin d'un n-uplet vérifiant la condition de parité : il y en a donc $2a_n$ de ce type ; mais on peut aussi rajouter 1 à un n-uplet ayant un nombre impair de 1 : il y en a $3^n - a_n$ de cette sorte. D'où : $a_{n+1} = 2a_n + (3^n - a_n) = 3^n + a_n = a_n + b_n$.

c. Comme $a_1 = 2$, la relation de la question **1** est vraie même pour $n = 0$ par convention. Alors, par télescopage et pour un entier $n \in \mathbb{N}$: $a_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n-1}3^k = \frac{3^n - 1}{2}$ donc $a_n = \frac{3^n + 1}{2}$.

2.3 Groupes, anneaux, corps

2.16 Soit l'application $\varphi : H \times K \to HK$ définie par $\varphi(h,k) = hk$. Elle est surjective par définition et on a $\varphi(h,k) = \varphi(h',k') \Longleftrightarrow h'^{-1}h = k'k^{-1}$. Or H et K sont des sous-groupes donc ceci impose $h'^{-1}h = k'k^{-1} = e$ car $H \cap K = \{e\}$ donc $h = h'$ et $k = k'$. Ainsi φ est bijective donc conserve les cardinaux.

2.17 On pose $C(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & y & y \\ 0 & y & y \end{pmatrix}$ et on a $C(x,y) \times C(x',y') = C(x' + 2xy', 2yy')$ donc $C\Big(0, \frac{1}{2}\Big)$ est neutre et la loi $\times$, qui est bien sûr associative, est donc interne dans G (car $2yy' \neq 0$). De plus l'inverse de $C(x,y)$ est $C\big(-\frac{x}{2y}, \frac{1}{4y}\big)$ après calculs ce qui fait de G un groupe.

2.18 Notons x l'inverse de $1 + ab$ de sorte que $(1 + ba)x = x(1 + ab) = 1$ donc $x + xab = 1$ et $x + bax = 1$. Alors $(1 - bxa)(1 + ba) = 1 + ba - bxa - bxaba = 1 + ba - xa - b(1 - x)a = 1$ et, de la même manière $(1 + ba)(1 - bxa) = 1 + ba - bxa - babxa = 1 + ba - bxa - b(1 - x)a = 1$: c'est fini !

2.19 Si $x \in M$, $x^2 = x \Longleftrightarrow x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow (1-x)(1-x-1) = 0 \Longleftrightarrow (1-x)^2 = 1 - x$. On peut donc compter ensemble les 2 éléments x et $1 - x$ à moins que $x = 1 - x$. Si on avait $x = 1 - x$ et $x \in M$, alors on aurait $2x = 1$ avec $2 = 1 + 1$ (dans l'anneau A) et on aurait alors $2^{-2} = 2^{-1}$ donc $2^2 = 2 \Longleftrightarrow 1 = 0$ car 2 inversible et c'est absurde. Ainsi les éléments de M vont bien deux par deux et M est de cardinal pair.

2.20 **a.** On a $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$, $1 \in \mathbb{Z}[i]$ et si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ on a $(z - z', zz') \in \mathbb{Z}[i]^2$ car $z - z' = (a - a') + i(b - b')$ et $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$: $\mathbb{Z}[i]$ est donc un sous-anneau de $\mathbb{C}$ donc un anneau. Si z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$, on a $zz' = 1$ donc $|z|^2|z'|^2 = 1$ avec $|z|^2$ qui est un entier ($|z|^2 = a^2 + b^2$ si $z = a + ib$) donc $|z|^2 = 1 = a^2 + b^2$ ce qui montre que $z \in \mathbb{U}_4$.

b. Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}[i]^2$ avec $y \neq 0$, on prend un entier de Gauss q à une distance de $\frac{x}{y}$ inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (cette distance est la moitié de la diagonale du carré de côté 1 : faire un dessin pour s'en convaincre). Alors $\big|\frac{x}{y} - q\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $|x - qy| \leqslant \frac{|y|}{\sqrt{2}} < |y|$ et il suffit de poser $r = x - qy$ pour avoir le résultat.

2.4 Arithmétique

2.21 On écrit $a-1=bq+r$ avec $r \in [\![0;b-1]\!]$ puis en multipliant par b^n, il vient $ab^n - b^n = b^{n+1}q + rb^n$ donc $ab^n - 1 = b^{n+1}q + b^n - 1 + rb^n$ et il suffit de justifier que $(r+1)b^n - 1 \in [\![0;b^{n+1}-1]\!]$ pour conclure que le quotient cherché est q et le reste $(r+1)b^n - 1$.

2.22 Si (a,b) solution, par exemple a est pair et b impair donc il existe des entiers p et q tels que $a=2p$ et $b=2q+1$ donc $4p^2+4q^2+4q+1=2011$ donc 2010 est divisible par 4 ce qui est faux.

2.23 Il est clair que cet ensemble $E = \left\{ \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est non vide et que c'est une partie de $\mathbb{Q}_+^*$ donc $\mathrm{Inf}(E)$ existe et $\mathrm{Inf}(E) \geqslant 0$. De plus, comme si $n = 10^p - 1$ (pour $p \geqslant 1$), on a $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \frac{1}{9p}$, on peut conclure que $\mathrm{Inf}(E) = 0$ et qu'il n'est pas atteint. Si pour passer de n à $n+1$ on n'a pas besoin de retenue, alors $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \frac{\sigma_n + 1}{\sigma_n} \leqslant 2$. Si pour passer de n à $n+1$ on utilise des retenues sans changer le nombre de chiffres, alors on passe de 9 à 0 sur certains chiffres et on augmente juste de 1 un des chiffres donc $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} < 1$. Si pour passer de n à $n+1$ on utilise des retenues en changeant le nombre de chiffres, alors on passe de 999 à 1000 par exemple et $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} < 1$. Ainsi $\mathrm{Sup}(E) = \mathrm{Max}(E) = 2$ car $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = 2$ pour $n = 1$.

2.5 Groupe symétrique

2.24 C'est le cycle $(\sigma(a_1), \cdots, \sigma(a_k))$.

2.25 Il y a $2n-1+\cdots+n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$ inversions. Ainsi : $\varepsilon(\sigma) = 1 \Longleftrightarrow n \equiv 0$ ou 3 [4].

2.26 $(\,j \quad j+1\,) \circ (\,i \quad j\,) \circ (\,j \quad j+1\,) = (\,i \quad j+1\,)$. Ainsi toutes les transpositions font partie du sous-groupe engendré par $\big((\,i \quad i+1\,)\big)_{i \in [\![1;n-1]\!]}$; et comme elles engendrent $\boldsymbol{\sigma}_n$, le groupe $\boldsymbol{\sigma}_n$ est engendré par $\big((\,i \quad i+1\,)\big)_{i \in [\![1;n-1]\!]}$. Si on enlève la transposition $(\,i \quad i+1\,)$ avec $i \neq 1$, les permutations engendrées par la famille restante fixeront l'intervalle d'entiers $[\![1;i]\!]$ et la famille ne sera donc plus génératrice.

2.27 $(\,1 \quad j\,) \circ (\,1 \quad i\,) \circ (\,1 \quad j\,) = (\,i,j\,)$. Ainsi toutes les transpositions font partie du sous-groupe engendré par $\big((\,1 \quad i\,)\big)_{i \in [\![2;n]\!]}$; et comme elles l'engendrent, le groupe $\boldsymbol{\sigma}_n$ est engendré par $\big((\,1 \quad i\,)\big)_{i \in [\![2;n]\!]}$. Si on enlève la transposition $(\,1 \quad i\,)$ avec $i \neq 1$, les permutations engendrées par la famille restante fixeront l'entier i et la famille ne sera donc plus génératrice.

2.28 On compte $n-1+\cdots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ inversions. Ainsi : $\varepsilon(\sigma) = 1 \Longleftrightarrow n \equiv 0$ ou 1 [4].

2.29 Soit f un morphisme de $\boldsymbol{\sigma}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ et τ une transposition, comme $\tau^2 = \mathrm{id}$: $f(\tau)^2 = f(\mathrm{id}) = 1$ donc $f(\tau) = \pm 1$. Par exemple, si i, j, k, l sont distincts deux à deux (c'est plus simple s'ils ne le sont pas), en notant σ la permutation qui échangent i et k d'une part et j et l d'autre part (c'est la composée de deux transpositions), alors $(\,i \quad j\,) = \sigma(\,k \quad l\,)\sigma^{-1}$ donc, comme f est un morphisme : $f(\,i \quad j\,) = f(\,k \quad l\,)$ donc toutes les transpositions ont la même image : 1 ou -1. Comme les transpositions engendrent $\boldsymbol{\sigma}_n$, si cette image est 1 : $f = u$; si cette image est -1 (la signature d'une transposition est justement -1) : on a $f = \varepsilon$.

2.6 Polynômes et fractions rationnelles

2.30 On écrira la division et on évaluera en i et en $-i$ pour conclure $R = \sin(n\alpha)X + \cos(n\alpha)$.

2.31 On vérifie que 1 est bien racine double de $(X-1)(X^{pq}-1)$ comme il l'est dans $(X^p-1)(X^q-1)$. Ensuite il faut constater que les racines de $(X^p-1)(X^q-1)$ à part 1 sont toutes simples et qu'elles sont aussi racine de $(X-1)(X^{pq}-1)$ pour conclure.

2.32 Les racines de $(X^2+X+1)^2$ sont doubles et ce sont j et j^2. Il suffit donc de vérifier que j et j^2 vérifient $P_n(j) = P_n(j^2) = P_n'(j) = P_n'(j^2) = 0$ pour factoriser P_n par $(X^2+X+1)^2$.

2.33 Comme $X^p - 1 = (X-1)(X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1)$, les racines de P sont les racines p-ièmes de l'unité à part 1 : comme P est unitaire, on a $P = \prod_{k=1}^{p-1}(X - \omega^k)$ et on évalue en 1 pour conclure.

2.34 On commence en écrivant que $X^8 + X^4 + 1 = (X^4+1) - X^4$ et par identité remarquable, on obtient la relation $X^8 + X^4 + 1 = (X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1)$ et on continue de la même manière pour avoir la factorisation finale : $X^8 + X^4 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

2.35 Si $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^*)^3$ vérifie le système, on a $\sigma_1 = 1 = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_3}$ et $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a \Longrightarrow \sigma_2 = \dfrac{1-a}{2}$ d'après l'énoncé donc x, y et z sont les racines de $P = X^3 - X^2 + \dfrac{1-a}{2}X - \dfrac{1-a}{2} = (X-1)\Big(X^2 + \dfrac{1-a}{2}\Big)$. Mais comme x, y et z sont réels, on a $\dfrac{1-a}{2} \leqslant 0$ donc $a \geqslant 1$. Réciproquement, si $a \geqslant 1$, on remonte les calculs et les trois racines $x = 1$, $y = \sqrt{\dfrac{a-1}{2}}$, $z = -y$ (par exemple), vérifient bien les conditions de l'énoncé.

2.36 On sait que cette décomposition en éléments simples, car elle est sous forme irréductible et de degré $-3 < 0$, est $F = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{cX+d}{X^2+1}$. La fraction $X^2F(X)$ évaluée en 0 donne : $b = 3$; $(X^2+1)F(X)$ évaluée en i donne : $ci + d = -2i - 3 \Longrightarrow c = -2$ et $d = -3$ car $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$; $\lim_{x \to +\infty} xF(x) = a + c = 0$ donne $a = 2$.

2.37 **a.** Si on avait $\deg(Q) \geqslant 1$ alors on aurait une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de Q et alors, par récurrence simple, on aurait : $\forall n \in \mathbb{N},\ Q(\alpha - n) = 0$ donc Q aurait une infinité de racines : NON.
b. Si P convient, on a $P(1) = P(-1) = 0$ directement, puis $P(0) = 0$. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = X(X^2-1)Q$ et en remplaçant dans l'équation : $(X-2)X(X-1)(X+1)Q(X) = (X+1)(X-1)(X-2)XQ(X-1)$ ce qui donne $Q(X) = Q(X-1)$ donc Q constant. Les solutions sont donc les $P = a(X^3 - X)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

2.38 Si $P \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$, on a $P(\alpha^2) = 0^2 = 0$ donc si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \notin \mathbb{U}$, la suite $(\alpha^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ contient une infinité de termes qui sont racines de P, c'est impossible. Si $e^{i\theta}$ racine de P avec $\theta \in]-\pi;\pi] \setminus \{0\}$, alors $e^{i\theta/2}$ est aussi racine de P et cela fait encore une infinité de racines : non ! Alors il ne peut y avoir que 0 ou 1 comme racine de P donc, comme P est clairement unitaire : $P = X^r(X-1)^s$ et si on prend P sous cette forme dans l'équation de départ : $s = 0$. Les solutions sont donc les polynômes $P = 0$ ou $P = X^r$ avec $r \in \mathbb{N}$.

2.39 Supposons P solution, on évalue en 0 : $P(0) = 0$; puis en -1 : $P(-1) = 0$, etc... on arrive à $P(-9) = 0$. Ainsi : $P = Q\prod_{k=0}^{9}(X+k)$. En remplaçant dans l'équation d'origine et en simplifiant ($\mathbb{R}[X]$ est intègre), on obtient $Q(X+1) = Q(X)$.Si Q n'était pas constant, il aurait une racine α, $\alpha - 1$, etc... ce qui fait une infinité de racines : absurde ! Ainsi $P = \lambda X(X+1)\cdots(X+9)$ et ces polynômes sont bien solutions.

2.40 **b.** On a $X^nQ(1/X)=P(X)$ donc $\forall z\in\mathbb{U},\ \overline{z}^nQ(z)=P(\overline{z})=\overline{P(z)}$ donc $P(z)Q(z)=z^n$ par hypothèse. Comme $\mathbb{U}$ est infini : $PQ=X^n$. Mais P est de degré n, on a $\deg(PQ)=2n=n$ donc $n=0$ d'où $P=1$.

c. Si $P\in\mathcal{E}$ et si P n'a pas que 0 comme racine, il s'écrit $P=X^rU$ avec U de degré $d\geqslant 1$ qui appartient encore à $\mathcal{E}$ (clair) et on a donc $U=1$ d'après **b.** ce qui est absurde. Ainsi, les polynômes de $\mathcal{E}$ n'ont que 0 comme racine et on a bien le résultat.

2.41 On sait que $P=a_n\prod\limits_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$. Comme $Q=\dfrac{P+\overline{P}}{2}$, si on suppose que α de partie imaginaire strictement positive est racine de Q : $a_n\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha-\alpha_k)=-\overline{a_n}\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha-\overline{\alpha_k})$. Donc, au niveau des modules, on obtient : $\prod\limits_{k=1}^{n}|\alpha-\alpha_k|=\prod\limits_{k=1}^{n}|\alpha-\overline{\alpha_k}|$ impossible car la quantité de droite est strictement inférieure à celle de gauche.

2.42 • Le fait que P est à coefficients réels ici ne sert pas. Si on note $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ les racines de P avec les multiplicités $m_1,\cdots,m_r$, alors en posant $n=\deg(P)$, on a $n=\sum\limits_{k=1}^{r}m_k$ et on sait que α_k est racine de multiplicité m_k-1 dans P' donc les racines de P sont racines de P' mais cela n'en fait que $\sum\limits_{k=1}^{r}(m_k-1)=n-r$ donc si $r\geqslant 2$ il en manque qui ne sont pas racines de P (car P' est scindé dans $\mathbb{C}[X]$).

• On pouvait aussi dire, en notant $\deg(P)=n$, que puisque P' divise P, il est de degré $n-1$ et $\mathrm{cd}(P')=n\mathrm{cd}(P)$ donc il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $P=\dfrac{(X-\alpha)}{n}P'$. Puis $P=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$ donc $P'=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{kP^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-1}$ par Taylor ; $P=\dfrac{(X-\alpha)}{n}P'$ implique, en identifiant (dans la base $(X-\alpha)^k$) : $\forall k\in[\![0;n-1]\!],\ P^{(k)}(\alpha)=0$.

• Avec le même départ, on dérive une fois $P=\dfrac{(X-\alpha)}{n}P'$ pour avoir, en remplaçant : $P=\dfrac{(X-\alpha)^2}{n(n-1)}P''$, etc... et on parvient à $P=\dfrac{(X-\alpha)^n}{n!}P^{(n)}$ mais $P^{(n)}=n!\mathrm{cd}(P)=n!\lambda$.

2.43 Comme $X^n-1=(X-1)P$, on a $P=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}})$. On évalue ensuite ceci en 1, ce qui donne : $n=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}})=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-2i)e^{\frac{ik\pi}{n}}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)=(-1)^{n-1}2^{n-1}e^{\frac{i(n-1)n\pi}{2n}}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$. Ainsi, en simplifiant, il ne reste que $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

2.44 Identité de Lagrange : $(A^2+B^2)(C^2+D^2)=(AD-BC)^2+(AC+BD)^2$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on décompose $P=\lambda\prod\limits_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{m_k}\prod\limits_{k=1}^{s}(X^2+a_kX+b_k)^{n_k}$ et comme $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\geqslant 0$, on a $\lambda\geqslant 0$ et $\forall k\in[\![1;r]\!],\ m_k$ pair. Comme $(X-\alpha_k)^{m_k}=\Big((X-\alpha_k)^{m_k/2}\Big)^2+0^2$ et $X^2+a_kX+b_k=\Big(X+\dfrac{a_k}{2}\Big)^2+\dfrac{4b_k-a_k^2}{4}$, le tour est joué !

2.45 D'abord P est de degré $2n$ avec $2i(2n+1)$ pour coefficient dominant. Si $z\neq i$ est racine de P, alors $\dfrac{z+i}{z-i}=e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ avec $k\in[\![0;2n]\!]$; mais $k\neq 0$ car $z+i=z-i$ est impossible. Avec les techniques usuelles, on trouve $z=\mathrm{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$. Comme cotan est π-périodique, impaire et que $\forall k\in[\![n+1;2n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1}=\pi-\dfrac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}$, on a la factorisation : $P=2i(2n+1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(X^2-\mathrm{cotan}^2\Big(\dfrac{k\pi}{2n+1}\Big)\right)$. Il suffit ensuite d'évaluer en $2i$ pour avoir après simplifications : $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(4+\mathrm{cotan}^2\Big(\dfrac{k\pi}{2n+1}\Big)\right)=\dfrac{3^{2n+1}-1}{2(2n+1)}$.

2.46 **a.** L'égalité $Q(na) = nQ(a)$ est vraie par hypothèse pour $n = 0$ et $n = 1$. Si elle est vraie pour n et $n-1$ pour un $n \geqslant 1$ alors $Q((n+1)a) = 2Q(na) - Q((n-1)a)$ par hypothèse donc $Q((n+1)a) = (n+1)Q(a)$. Ainsi $Q(X) - \dfrac{Q(a)}{a}X$ s'annule en tous (une infinité car $a \neq 0$) les na (pour $n \in \mathbb{N}$) donc il est nul.

b. Posons $U = Q(X) - Q(0)$, alors U vérifie les hypothèses de la question **a.** et est donc linéaire, donc Q est affine. Les solutions Q de cette question sont donc les $Q = \alpha X + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

2.7 Applications linéaires

2.47 **a.** L'inclusion $\mathrm{Im}\,(u+v) \subset \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ est claire car $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$ si $x \in E$ (attention l'égalité est fausse en général) : $\mathrm{rang}\,(u+v) = \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(u) - \dim(\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)) \leqslant \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v)$ d'après Grassmann. On écrit $u = u + v - v$ donc $\mathrm{rang}\,(u) \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v) + \mathrm{rang}\,(-v) = \mathrm{rang}\,(u+v) + \mathrm{rang}\,(v)$ d'après ce qui précède et $v = u + v - u$ montre qu'on a aussi $\mathrm{rang}\,(v) \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v) + \mathrm{rang}\,(u)$: tout ceci conduit à $|\mathrm{rang}\,(u) - \mathrm{rang}\,(v)| \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v)$.

b. Soit $\tilde{v} : \mathrm{Ker}(u+v) \to \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$ définie par $\forall x \in \mathrm{Ker}(u+v),\ \tilde{v}(x) = v(x) = -u(x) \in \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$. On a $\mathrm{Im}\,(\tilde{v}) \subset \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$ et $x \in \mathrm{Ker}(\tilde{v}) \iff \big(x \in \mathrm{Ker}(u+v) \text{ et } v(x) = 0_F\big) \iff x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. En appliquant la formule du rang à $\tilde{v}$, on a donc $\dim \mathrm{Ker}\,(u+v) = \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) + \dim(\mathrm{Im}\,\tilde{v})$ donc $\dim \mathrm{Ker}\,(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) + \dim(\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v)$.

2.48 On a $(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ car p et q commutent : ainsi $p \circ q$ est un projecteur. Les inclusions $\mathrm{Im}\,(p \circ q) = \mathrm{Im}\,(q \circ p) \subset \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$ et $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(q \circ p)$ sont claires. Soit maintenant $x \in \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)$, on a $p(x) = q(x) = x$ car $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$ donc $p \circ q(x) = x$ et $x \in \mathrm{Im}\,(p \circ q)$. De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(p \circ q)$, on a $x = x - p(x) + p(x)$ avec $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(x) \in \mathrm{Ker}(q)$ ce qui prouvent les deux dernières inclusions donc les égalités.

2.49 L'implication $\Longleftarrow$ est claire car $(p+q)^2 = p + q + p \circ q + q \circ p$. Réciproquement, si $p+q$ est un projecteur, on a $p \circ q = -q \circ p$, et en composant par p à gauche, on a $p \circ q = -p \circ q \circ p = +(q \circ p) \circ p = q \circ p$ donc $p \circ q = q \circ p = 0$. Les inclusions $\mathrm{Im}\,(p+q) \subset \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Im}\,q$ et $\mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$ sont faciles. Si $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$, on a $p(x) = -q(x)$ donc $p^2(x) = -p \circ q(x) = 0_E = p(x) = -q(x)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$; et si $x \in \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$, on a $x = y + z$ avec $p(y) = y$ et $q(z) = z$ car $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$ par exemple donc $(p+q)(x) = p(y) + q(z) + p \circ q(z) + q \circ p(y) = y + z = x$ donc $x \in \mathrm{Im}\,(p+q)$ ce qui donne les deux dernières inclusions et finalement les deux égalités.

2.50 **a.** L'inclusion $\mathrm{Im}\,(u+v) \subset \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ est claire car $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$ si $x \in E$ (attention l'égalité est fausse en général) : $\mathrm{rang}\,(u+v) = \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(u) - \dim(\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)) \leqslant \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v)$ d'après Grassmann. On écrit $u = u + v - v$ donc $\mathrm{rang}\,(u) \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v) + \mathrm{rang}\,(-v) = \mathrm{rang}\,(u+v) + \mathrm{rang}\,(v)$ d'après ce qui précède et $v = u + v - u$ montre qu'on a aussi $\mathrm{rang}\,(v) \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v) + \mathrm{rang}\,(u)$: tout ceci conduit à $|\mathrm{rang}\,(u) - \mathrm{rang}\,(v)| \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v)$.

b. Soit $\tilde{v} : \mathrm{Ker}(u+v) \to \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$ définie par $\forall x \in \mathrm{Ker}(u+v),\ \tilde{v}(x) = v(x) = -u(x) \in \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$. On a $\mathrm{Im}\,(\tilde{v}) \subset \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$ et $x \in \mathrm{Ker}(\tilde{v}) \iff \big(x \in \mathrm{Ker}(u+v) \text{ et } v(x) = 0_F\big) \iff x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. En appliquant la formule du rang à $\tilde{v}$, on a donc $\dim \mathrm{Ker}\,(u+v) = \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) + \dim(\mathrm{Im}\,\tilde{v})$ donc $\dim \mathrm{Ker}\,(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v) + \dim(\mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Im}\,v)$.

2.51 On sait que $\mathrm{Im}\,(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\,(u)$ donc $2 = \mathrm{rang}\,(u \circ v) \leqslant \mathrm{rang}\,(u) \leqslant 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ ce qui permet de conclure que $\mathrm{rang}\,(u) = 2$ et $\mathrm{Im}\,(u \circ v) = \mathrm{Im}\,(u)$. De même, $2 = \mathrm{rang}\,(u \circ v) \leqslant \mathrm{rang}\,(v) \leqslant 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc $\mathrm{rang}\,(v) = 2$. On en conclut que u est injective et v surjective donc $u \circ v \circ u \circ v = u \circ v \Longrightarrow v \circ u \circ v = v$ car u est injective et $v \circ u \circ v = v \Longrightarrow v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ car v est surjective.

2.52 **a.** Soit p un projecteur qui vérifie $f = p \circ f - f \circ p$, on compose à gauche par p : $p \circ f \circ p = 0$.

Et à droite : $f \circ p = -f \circ p \Longrightarrow f \circ p = 0$. Alors $f = p \circ f \Longrightarrow f \circ f = f \circ p \circ f = 0$.

b. Si $f^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathsf{Ker}(f)$, on cherche d'après la question **a.** un projecteur p tel que $f \circ p = 0$ ce qui impose $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathsf{Ker}(f)$ et tel que $f = p \circ f \Longleftrightarrow (\mathrm{id}_E - p) \circ f = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathsf{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}\,(p)$. Soit alors F un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathrm{Im}\,(f) \subset F \subset \mathsf{Ker}(f)$ et G un supplémentaire de F dans E et posons p la projection sur F parallèlement à G ; on a $f = p \circ f$ et $0 = f \circ p$: $f = p \circ f - f \circ p$.

c. $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathsf{Ker}(f) = \mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $f^2 = 0$; on a $G = X^n\,\mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathsf{Vect}(X^n, \cdots, X^{2n-1})$ qui est un supplémentaire de $F = \mathsf{Ker}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. La projection p sur F parallèlement à G est définie par $p(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ ou encore par $p(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par X^n.

2.53 **a.** Il est classique que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathsf{Ker}(f^k) \subset \mathsf{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}\,(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}\,(f^k)$; la suite $\big(\dim(\mathsf{Ker}(f^k))\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par n donc il existe forcément un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{Ker}(f^p) = \mathsf{Ker}(f^{p+1})$. Alors, s'il existe $k \geqslant p$ tel que $\mathsf{Ker}(f^k) = \mathsf{Ker}(f^{k+1})$, on a $\mathsf{Ker}(f^{k+1}) \subset \mathsf{Ker}(f^{k+2})$ et si $x \in \mathsf{Ker}(f^{k+2})$, il vient $f^{k+1}(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathsf{Ker}(f^{k+1}) = \mathsf{Ker}(f^k)$ donc $f^{k+1}(x) = 0_E$ et $x \in \mathsf{Ker}(f^{k+1})$. On vient de montrer par récurrence que : $\forall k \geqslant p,\ \mathsf{Ker}(f^p) = \mathsf{Ker}(f^k)$. Par la formule du rang appliquée à toutes les f^k pour $k \geqslant p$ et grâce aux inclusions entre les images, on a aussi : $\forall k \geqslant p,\ \mathrm{Im}\,(f^{k+1}) = \mathrm{Im}\,(f^k)$. Alors, il est clair que $F = \mathsf{Ker}(f^p)$ et $G = \mathrm{Im}\,(f^p)$.

b. (i) : Si $x \in F$, $f^p(x) = 0_E$ donc $f(x) = f^{p+1}(x) = 0_E \Longrightarrow f(x) \in F$. de même, si $x \in G$, il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$ donc $f(x) = f^{p+1}(y) \in \mathrm{Im}\,(f^{p+1}) = \mathrm{Im}\,(f^p) = G$: ceci justifie que F et G sont stables par f.

(ii) : il est clair que f_F est nilpotente car $\forall x \in F,\ f_F^p(x) = f^p(x) = 0_E$. De plus f_G est un automorphisme de G car G est de dimension finie et si $x \in \mathsf{Ker}(f_G)$, on a $f(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Im}\,(f^p)$ donc il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$ donc $f(x) = f^{p+1}(y) = 0_E$ donc $y \in \mathsf{Ker}(f^{p+1}) = \mathsf{Ker}(f^p)$ d'où $f^p(y) = x = 0_E$ et f_G injective.

(iii) : d'après la formule du rang, il suffit de montrer qu'ils sont en somme directe ; or si $x \in F \cap G$, il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$ et $f^p(x) = 0_E$ donc $f^{2p}(y) = 0_E$ d'où $y \in \mathsf{Ker}(f^{2p}) = \mathsf{Ker}(f^p)$ donc $x = f^p(y) = 0_E$.

c. Si (F', G') vérifie ces hypothèses (i), (ii) et (iii), alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $f_{F'}^{\prime q} = 0$ donc $F' \subset \mathsf{Ker}(f^q) \subset F$. De plus, comme $f(G') = G'$ car $f_{G'}$ est un automorphisme de G', on a par une récurrence immédiate : $\forall k \geqslant 1,\ f^k(G') = G'$ donc $G' \subset \mathrm{Im}\,(f^k)$ et en prenant l'intersection : $G' \subset G$. Comme par hypothèse on a $\dim(F') + \dim(G') = \dim(E) = \dim' F) + \dim(G)$ on ne peut avoir (raisonner par l'absurde) d'après les inclusions ci-dessus : $\dim(F') = \dim(F)$ et $\dim(G') = \dim(G)$ donc $F = F'$ et $G = G'$.

2.54 **a.** On a l'inclusion évidente $\mathsf{Ker}\,u \subset \mathsf{Ker}(v \circ u)$. De plus, si $x \in \mathsf{Ker}(v \circ u)$, alors $v \circ u(x) = 0_E$ donc, en prenant l'image par u : $u \circ v \circ u(x) = (x) = 0_E$ donc $x \in \mathsf{Ker}(u)$ d'où l'inclusion $\mathsf{Ker}(v \circ u) \subset \mathsf{Ker}(u)$ et finalement l'égalité. De même $\mathrm{Im}\,(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\,(v)$ et si on prend $x \in \mathrm{Im}\,(v)$, par définition il existe $y \in F$ tel que $x = v(y) = v \circ u \circ v(y) = (v \circ u)(v(y)) \in \mathrm{Im}\,(v \circ u)$ et on a la seconde inclusion. Si $x \in \mathsf{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$, on a $u(x) = 0_E$ et il existe $y \in F$ tel que $x = v(y)$ donc $u \circ v(y) = u(x) = 0_E$ ce qui donne $v \circ u \circ v(y) = 0_E = v(y)$ donc $x = 0_E$ ce qui garantit que la somme est directe. De plus, on a pour $x \in E$: $x = x - v \circ u(x) + v \circ u(x)$ avec $x - v \circ u(x) \in \mathsf{Ker}(u)$ et $v \circ u(x) \in \mathrm{Im}\,(v)$ donc, au final : $E = \mathsf{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}\,(v)$.

b. (1) C'est le théorème du rang qui garantit que w est un isomorphisme.

(2) Par construction $\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Im}\,(w^{-1}) = E_1$ car w est un isomorphisme donc surjectif.

Si $y \in F$, on écrit $y = a + b$ ($a \in \mathrm{Im}\,(u)$, $b \in F_1$) : $v(y) = 0_E \Longleftrightarrow w^{-1}(a) = 0_E \Longleftrightarrow a = 0_F \Longleftrightarrow y = b \in F_1$ (car w^{-1} injectif) d'où l'on déduit que $\mathsf{Ker}(v) = F_1$.

Si $y \in F$, il existe $x \in E_1$ et $z \in F_1$ tel que $y = u(x) + z$ (en utilisant les deux décompositions de E et de F) et on a donc $v \circ u \circ v(y) = v \circ u(v(u(x))) = v \circ u(w^{-1}(w(x)) = v(u(x)) = v(y)$ donc $v \circ u \circ v = v$.

Si $x \in E$, on a $x = a + b$ ($a \in E_1$, $b \in \mathsf{Ker}(u)$) d'où $u \circ v \circ u(x) = u(w^{-1}(w(a))) = u(a) = u(x)$: $u \circ v \circ u = u$.

(3) Soit $y \in F_1$, les hypothèses montrent que $v(y) = v'(y) = 0_E$. Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}\,(u)$, alors y peut s'écrire $y = u(a)$ avec $a \in E_1$ mais $E_1 = \mathrm{Im}\,(v')$ donc il existe $b \in \mathrm{Im}\,(u)$ (car $\mathsf{Ker}(v') = F_1$) tel que $a = v'(b)$ et il existe donc $c \in F$ tel que $b = u(c)$. Alors $v'(y) = v' \circ u \circ v' \circ u(c) = v' \circ u(c) = a$ par hypothèse ; or $v(y) = v \circ u(a) = w^{-1} \circ w(a) = a$ et on bien $v'(y) = v(y)$. Comme $F = F_1 \oplus \mathrm{Im}\,(u)$: $v' = v$ (unicité).

2.55 X^p annule M donc 0 est la seule valeur propre de M : $\chi_M = X^n$ donc $M^n = 0$ par CAYLEY-HAMILTON.

Si l'indice p de nilpotence de M vérifie $n \leqslant 2p-2$ et si X est une matrice telle que $X^2 = M$, alors $X^{2p} = M^p = 0$ donc X est aussi nilpotente alors $X^n = 0$ d'après ce qui précède. Or $M^{p-1} \neq 0$ donc $X^{2p-2} \neq 0$: c'est impossible ! Il suffit de calculer $(I_n - M)\sum\limits_{k=0}^{n-1} M^k$ pour avoir la réponse.

2.56 Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$, alors $f(x) = 0_E$ et $\exists y \in E,\ x = f(y)$ donc $f^2(y) = 0_E$. Comme $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$, on a donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $f(y) = x = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe donc supplémentaires par la formule du rang. Il suffit de considérer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (y,0)$.

2.57 On utilise le déterminant pour montrer que n est pair.

On revient à la définition de la liberté en composant la relation par f.
Plus généralement, on peut montrer l'existence d'une base de E de la forme $(e_1, f(e_1), \ldots, e_r, f(e_r))$ où $n = 2r$.

2.8 Polynômes d'endomorphismes

2.58 Pour l'implication $\Longrightarrow$: si $u \in \mathrm{Vect}\Big(u^k \mid k \geqslant 2\Big)$ c'est qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $P = X^2Q$ tels qu'on ait les égalités $u = P(u) = u^2 \circ Q(u) = Q(u) \circ u^2$. Ainsi $u \circ (\mathrm{id}_E - u \circ Q(u)) = 0$; alors pour $x \in E$, on a $x = x - u \circ Q(u)(x) + u \circ Q(u)(x)$ avec $x - u \circ Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}(u)$ et $u \circ Q(u)(x) \in \mathrm{Im}\,(u)$ ce qui justifie qu'on a bien $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}\,(u)$ et on conclut $\mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u = E$ avec la formule du rang.
Pour $\Longleftarrow$: si $\mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u = E$, on considère la corestriction $v = u_{\mathrm{Im}\,u}$ qui est donc un endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(u)$. On sait que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$ (classique) donc v est injectif et c'est donc un automorphisme de $\mathrm{Im}\,(u)$. Soit P le polynôme minimal de v (il existe puisqu'on est en dimension finie), comme v est un automorphisme $P(0) \neq 0$, on peut même imposer $P(0) = 1$. En posant $P = 1 - XQ$: $\mathrm{id}_E - v \circ Q(v) = 0$ et donc $\forall x \in E,\ u(x) - (v \circ Q(v))(u(x)) = 0_E = (u - u^2 \circ Q(u))(x)$ donc $u = u^2 \circ Q(u)$ comme attendu.

2.59 Si $p = 0$, pour $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $Q(p) = Q(0)\mathrm{id}_E$ est une homothétie donc $Q(p)$ est un projecteur si et seulement si $Q(0) = 0$ ou 1 d'où $Q(p) = 0$ (endomorphisme nul) ou $Q(p) = \mathrm{id}_E$.
Si $p = \mathrm{id}_E$, pour $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $Q(p) = Q(1)\mathrm{id}_E$ est aussi une homothétie donc $Q(p)$ est un projecteur si et seulement si $Q(0) = 0$ ou 1 d'où $Q(p) = 0$ (endomorphisme nul) ou $Q(p) = \mathrm{id}_E$.
Sinon, $Q(p)$ est un projecteur si et seulement si $Q(p)^2 = Q(p) \Longleftrightarrow (Q^2)(p) = Q(p) \Longleftrightarrow (Q^2 - Q)(p) = 0$; or dans ce cas $X^2 - X$ est le polynôme minimal de p et $Q^2 - Q$ en est un donc, par structure : $Q(p)$ est un projecteur si et seulement si $X^2 - X$ divise $Q^2 - Q$. Comme $X^2 - X = (X-1)X$ a pour racines 0 et 1, on a : $Q(p)$ projecteur $\Longleftrightarrow \big(Q(0) = 0$ ou 1 et $Q(1) = 0$ ou $1\big)$ (en remplaçant X par 0 puis par 1). On a donc 4 cas :
- si $Q(0) = 0$ et $Q(1) = 0$ alors $Q = X(X-1)P$ et on a $Q(p) = \pi_p(p) \circ P(p) = 0$.
- si $Q(0) = 0$ et $Q(1) = 1$ alors $Q = X(X-1)P + X$ (division euclidienne) et on a $Q(p) = \pi_p(p) \circ P(p) + p = p$.
- si $Q(0) = 1$ et $Q(1) = 0$ alors $Q = X(X-1)P + 1 - X$ et on a $Q(p) = \pi_p(p) \circ P(p) + \mathrm{id}_E - p = \mathrm{id}_E - p$.
- si $Q(0) = 1$ et $Q(1) = 1$ alors $Q = X(X-1)P + 1$ et on a $Q(p) = \pi_p(p) \circ P(p) + \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$.

2.60 On sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$. En introduisant les coefficients de P, la relation $g = f \circ P(f)$ donne $g = f + a_1f^2 + \cdots + a_{p-2}f^{p-1}$. On en déduit $g^2 = f^2 + a_{3,2}f^3 + \cdots + a_{p-1,2}f^{p-1}$, ... jusqu'à $g^{p-2} = f^{p-2} + a_{p-1,p-2}f^{p-1}$ et $g^{p-1} = f^{p-1}$. En inversant ces équations, on obtient $f^{p-1} = g^{p-1}$, $f^{p-2} = g^{p-2} + b_{p-1,p-2}f^{p-1}$,... $f^2 = g^2 + b_{3,2}g^3 + \cdots + b_{p-1,2}g^{p-1}$ et enfin $f = g + b_{2,1}g^2 + \cdots + b_{p-1,1}g^{p-1}$ ce qui détermine un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $Q(0) = 1$ et $f = g \circ Q(g)$.

2.61 **a.** Posons $h = -f^{-1} \circ g \circ f$, alors $h^p = 0$ donc $\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - h^p = (\mathrm{id}_E - h) \circ (\mathrm{id}_E + h + h^2 + \cdots + h^{p-1})$.
On en déduit que $\mathrm{id}_E - h$ est inversible.
b. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$, alors $P = aX + bX^2 + \cdots$ donc $P(g) = ag + bg^2 + \cdots$ d'où l'on déduit $P(g)^p = a^pg^p + b'g^{p+1} + \cdots = 0$. Comme précédemment, on prouve que $\mathrm{id}_E + P(g)$ est inversible donc $H \subset GL(E)$ et l'inverse d'un élément de H est encore dans H. On vérifie que H est non vide et stable par produit ce qui prouve que H est un sous-groupe de $GL(E)$. Les polynômes en un endomorphisme commutent entre eux donc H est commutatif.

2.9 Matrices

2.62 **a.** On effectue sur M les opérations de GAUSS suivantes : $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $C_{n+j} \leftarrow C_{n+j} - C_j$ pour voir que M est équivalente à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B-A \end{pmatrix}$. On réitère : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $L_{n+i} \leftarrow L_{n+i} - L_i$ et M est aussi équivalente à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$. Ceci peut aussi se traduire par $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$.
On conserve le rang des matrices par opérations de GAUSS ou on conserve le rang par composition par des isomorphismes, ainsi $\text{rang}\,(M) = \text{rang}\,(A) + \text{rang}\,(B-A)$ (on peut encore voir que cette dernière matrice est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ où $r = \text{rang}\,(A)$ et $s = \text{rang}\,(B-A)$).
b. $M \in GL_{2n}(\mathbb{C}) \iff \text{rang}\,(M) = 2n \iff \text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(B-A) = n \iff (A, B-A) \in GL_n(\mathbb{C})^2$.
c. Ainsi $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B = A + D$ avec $D \in GL_n(\mathbb{C})$. On résout $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, on trouve $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}+D^{-1} & -D^{-1} \\ -D^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+(B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}$.

2.63 **a.** Il faut d'abord constater que $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit l'hyperplan $H = \text{Ker}(\varphi)$, $f(x) = x \iff \varphi(x) = 0$ car $u \neq 0_E$ donc $E_1(f) = H$. Si $\lambda \neq 1$, $f(x) = \lambda x \implies (\lambda - 1)x = \varphi(x)u$ donc x et u colinéaires or $f(u) = u$ donc ceci impose $x = 0_E$. Ainsi 1 est la seule valeur propre et $E_1(f) \neq E$ donc f n'est pas diagonalisable.
On calcule et $(f - \text{id}_E)^2 = 0$.
b. Soit e_1 tel que $\varphi(e_1) \neq 0$, on pose $e_2 = \varphi(e_1)u$ alors $f(e_1) = e_1 + e_2$. On complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ avec des vecteurs de H et on obtient ce que l'on souhaite.
c. Soit $f_2 \neq 0_E$ tel que $\text{Im}\,(g - \text{id}_E) = \text{Vect}(f_2)$ et f_1 tel que $f_2 = (g - \text{id}_E)(f_1)$ de sorte que $g(f_1) = f_1 + f_2$. Alors $f_2 \in \text{Ker}(g - \text{id}_E) = H'$ car $(g - \text{id}_E)^2 = 0$. H' est un hyperplan et $f_1 \notin H'$ donc on a une base $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ de E avec $(f_2, \cdots, f_n)$ base de H'. Soit $(f_1^*, \cdots, f_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}'$.
$\forall x \in E$, $g(x) = x + f_1^*(x)f_2$ car cette égalité (linéaire) est satisfaite pour tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$.
d. On sait qu'alors il existe un vecteur non nul $w \in E$ tel que $\varphi(x) = (x|w)$. Par hypothèse $(u|w) = 0$; et en résolvant $y = f(x) = x + (x|w)u$, on a $(x|w) = (y|w)$ d'où $x = y - (y|w)u = f^{-1}(y)$.

2.64 **a.** Comme la première colonne de C vaut l'opposé de la troisième et que les deux premières sont indépendantes, on a $\text{rang}\,(h) = \text{rang}\,(C) = 2$. De part la taille des matrices A et B, on a $\text{rang}\,(f) \leqslant 2$ et $\text{rang}\,(g) \leqslant 2$. Il est de plus très classique que $\text{rang}\,(h) = \text{rang}\,(f \circ g) \leqslant \text{Min}\,(\text{rang}\,(f), \text{rang}\,(g)) \leqslant 2$. La seule possibilité est donc que $\text{rang}\,(f) = \text{rang}\,(g) = 2$. Ainsi f est injective (son rang est égal à la dimension de son espace de départ) et g est surjective (son rang est égal à a dimension de son espace d'arrivée).

b. Par un calcul simple, $C^2 = C$ donc h est un projecteur. De plus, ${}^tC = C$ donc h est une projection orthogonale (voir plus loin dans l'année). Toujours est-il qu'en résolvant les systèmes $CX = X$ et $CX = 0$, on trouve que $\text{Im}\,(h) = \text{Ker}(h - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (0, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, -1)$ et $\text{Ker}(h) = \text{Vect}(v_3)$ où $v_3 = (1, 0, 1)$: on retrouve le fait que h est une projection orthogonale car $\text{Im}\,(h) \perp \text{Ker}(h)$.

Puisque $h^2 = h$, $f \circ g \circ f \circ g = f \circ g$ donc $f \circ (g \circ f - \text{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ g = 0$. Mais g est surjective donc simplifiable à droite d'où $f \circ (g \circ f - \text{id}_{\mathbb{R}^2}) = 0$ et f injective donc simplifiable à gauche et $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$: alors $BA = I_2$.

Autrement, on pouvait aussi voir que $\text{rang}\,(BA) \geqslant \text{rang}\,(A(BA)B) = \text{rang}\,(AB) = 2$ donc $\text{rang}\,(BA) = 2$ et BA est inversible. Ainsi, $(AB)^2 = AB \implies BABABA = BABA \implies BA(BA - I_2)BA = 0 \implies BA = I_2$.
c. Idem, car si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$: $\text{rang}\,(f \circ g) \leqslant \text{Min}\,(\text{rang}\,(f), \text{rang}\,(g)) = \text{Min}\,(\dim(E), \dim(F)) = p$.

d. $f \circ g \circ f \circ g = f \circ (g \circ f) \circ g = f \circ g$ donc $f \circ g$ est un projecteur. On sait qu'alors $\text{rang}\,(f \circ g) = \text{Tr}\,(f \circ g)$.

Mais on sait aussi que $\mathrm{Tr}\ (f\circ g)=\mathrm{Tr}\ (g\circ f)=\mathrm{Tr}\ (\mathrm{id}_E)=p$ ce qui montre que $\mathrm{rang}\,(f\circ g)=p$. De plus, $\mathrm{Im}\,(f\circ g)\subset\mathrm{Im}\,(f)$ avec $p=\dim\big(\mathrm{Im}\,(f\circ g)\big)\leqslant\dim\big(\mathrm{Im}\,(f)\big)\leqslant p$ donc $\mathrm{Im}\,(f\circ g)=\mathrm{Im}\,(f)$ par inclusion et égalité des dimensions. De même, on a toujours $\mathrm{Ker}(g)\subset\mathrm{Ker}(f\circ g)$ donc, par le théorème du rang, $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big)=q-\dim\big(\mathrm{Im}\,(g)\big)\geqslant q-p=\dim\big(\mathrm{Ker}(f\circ g)\big)$ ce qui prouve de même l'égalité $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Ker}(f\circ g)$.

2.65 u et v sont des symétries et $\mathrm{Tr}\ (v)=\mathrm{Tr}\ (v\circ u\circ u)=\mathrm{Tr}\ (u\circ v\circ u)=\mathrm{Tr}\ (-v\circ u\circ u)=\mathrm{Tr}\ (-v)$ donc $\mathrm{Tr}\ (v)=0$ et de même $\mathrm{Tr}\ (u)=0$ donc u et v sont des symétries par rapport à F parallèlement à G avec $\dim(F)=\dim(G)$: d'où $\dim(E)=\dim(F)+\dim(G)$ est pair si u et v existent.

Si $n=2p$, il existe une base de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_p\end{pmatrix}$, alors comme $u\circ v=-v\circ u$, la matrice de v dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & P\\ Q & 0\end{pmatrix}$; et comme $v^2=\mathrm{id}_E$, on a $PQ=QP=I_p$ donc P et Q sont inversibles.

Si $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_p,e_{p+1},\cdots,e_n)$, on montre que $(v(e_1),\cdots,v(e_p))$ est une autre base de $\mathrm{Vect}(e_{p+1},\cdots,e_n)$ donc la matrice de v dans $\mathcal{B}'=(e_1,\cdots,e_p,v(e_1),\cdots,v(e_p))$ est $\begin{pmatrix} 0 & I_p\\ I_p & 0\end{pmatrix}$.

Réciproquement, s'il existe une base de E de dimension paire telle que u et v ont respectivement (dans cette base) les matrices $\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_p\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_p\\ I_p & 0\end{pmatrix}$, alors le couple (u,v) est solution du problème.

2.66 Comme $C(A+B)=(A+B)C=I_n$, on a $BCA=\big((A+B)-A\big)C\big((A+B)-B\big)=A+B-B-A+ACB=ACB$.

2.67 On sait que A est équivalente à $J_r=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0_r\end{pmatrix}$ écrite en blocs. Il faut justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qu'il est isomorphe au sous-espace G des matrices C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $J_rCJ_r=0$ et un calcul par blocs montre que ces matrices sont de la forme $C=\begin{pmatrix} 0 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}$ donc $\dim(F)=n^2-r^2$.

2.68 Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à A et B, soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $\mathrm{Ker}(f\circ g-g\circ f)=\mathrm{Vect}(e_2,\cdots,e_n)$ (par hypothèse et la formule du rang), ensuite la matrice C de $f\circ g-g\circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ a une première colonne avec un 0 en haut car $\mathrm{Tr}\ (f\circ g-g\circ f)=0$. Ainsi, en effectuant le calcul, on a $C^2=0$.

2.69 Comparer l'inversibilité de $f+g$ et celle de $\mathrm{id}_E+g\circ f^{-1}$; puis le rang de $g\circ f^{-1}$ et celui de g et trouver une base dans laquelle la matrice de $g\circ f^{-1}$ soit très simple pour conclure.

2.70 Analyse : si X solution, on prend la trace et on trouve $\mathrm{Tr}\ (X)\big(1+\mathrm{Tr}\ (A)\big)=\mathrm{Tr}\ (B)$.

Synthèse : si $\mathrm{Tr}\ (A)=-1$ et $\mathrm{Tr}\ (B)\neq 0$, pas de solution.

Si $\mathrm{Tr}\ (A)=-1$ et $\mathrm{Tr}\ (B)=0$ les solutions sont $X=B+\lambda A$.

Si $\mathrm{Tr}\ (A)\neq -1$, la solution est unique et vaut $X=B-\dfrac{\mathrm{Tr}\ (B)}{1+\mathrm{Tr}\ (A)}A$.

2.71 La linéarité est claire. On prend la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices élémentaires $E_{i,j}$. On a $f(E_{i_0,j_0})=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}E_{i,j}E_{i_0,j_0}+\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}E_{i_0,j_0}E_{i,j}$ donc il vient avec la formule bien connue du cours : $f(E_{i_0,j_0})=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i_0}E_{i,j_0}+\sum\limits_{j=1}^{n} a_{j_0,j}E_{i_0,j}=(a_{i_0,i_0}+a_{j_0,j_0})E_{i_0,j_0}+\cdots$ donc la composante de $f(E_{i_0,j_0})$ selon E_{i_0,j_0} est $a_{i_0,i_0}+a_{j_0,j_0}$ et par définition de la trace : $\mathrm{Tr}\ (f)=\sum\limits_{1\leqslant i_0,j_0\leqslant n} a_{i_0,i_0}+a_{j_0,j_0}=2n\mathrm{Tr}\ (A)$.

2.72 En notant $\mathrm{r} = \mathrm{rang}\,(\mathrm{A})$ et $\mathrm{s} = \mathrm{rang}\,(\mathrm{B})$, les matrices A et B sont respectivement équivalentes à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et à $J_s = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors il existe $(P_1, Q_1) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ et $(P_2, Q_2) \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $P_1 A Q_1^{-1} = J_r$ et $P_2 B Q_2^{-1} = J_s$. Ainsi $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_s \end{pmatrix}$. Or multiplier par des matrices inversibles ne change pas le rang : $\mathrm{rang}\,(M) = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_s \end{pmatrix} = r + s = \mathrm{rang}\,(A) + \mathrm{rang}\,(B)$.

2.73 Si on pose $M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \in GL_{p+q}(\mathbb{R})$, alors on calcule $MM' = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$ d'où l'on déduit $\mathrm{rang}\,(MM') = \mathrm{rang}\,(M)$. Des opérations de Gauss sur les colonnes de MM' montrent alors que l'on a $\mathrm{rang}\,(MM') = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = p + \mathrm{rang}\,(C) = \mathrm{rg}(M)$. Ceci traduit $(MM') \times \begin{pmatrix} I_p & -B \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

2.74 Par définition, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1} \iff AP = PB$. On décompose $P = P_1 + iP_2$ avec P_1 et P_2 des matrices réelles et on a donc $AP_1 - BP_1 + i(AP_2 - BP_2) = 0$ donc $AP_1 - BP_1 = AP_2 - BP_2 = 0$ en séparant partie réelle et imaginaire. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{C},\ A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$. Mais la fonction $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ est polynomiale en x donc continue et elle ne s'annule pas en i par hypothèse donc elle n'est pas identiquement nulle. Ainsi, il existe un réel x tel que $\det(P_1 + xP_2) \neq 0$ et en posant $Q = P_1 + xP_2$, on a $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et $AQ = QB$.

2.75 **a.** ($\Longleftarrow$) Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A et $r = \mathrm{rang}\,(f) = \mathrm{rang}\,(A)$. On considère une base $(e_{r+1}, \cdots, e_p)$ de $\mathrm{Ker}(f)$ qu'on complète en $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_p)$ base de $\mathbb{K}^p$. Posons $S = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_r)$, on sait que S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$. Le théorème du rang nous dit alors que f induit un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}\,(f)$. On complète la famille libre $\big(f(e_1), \cdots, f(e_r)\big)$ de $\mathbb{R}^n$ en une base $\mathcal{B}_2 = \big(f(e_1), \cdots, f(e_r), v_{r+1}, \cdots, v_n\big)$ de $\mathbb{K}^n$. Par construction, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est la matrice $J_{n,p,r}$. Soit P (resp. Q) la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. $\mathbb{K}^n$) et $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$), par formule de changement de base : $A = QJ_{n,p,r}P^{-1}$ donc A et $J_{n,p,r}$ sont équivalentes.

($\Longrightarrow$) On ne modifie pas le rang des applications linéaires en composant par des isomorphismes donc on ne modifie pas le rang des matrices en multipliant par des matrices inversibles. Or il est clair que la matrice $J_{n,p,r}$ est de rang r donc si A et $J_{n,p,r}$ sont équivalentes, il existe des matrices inversibles P et Q (de bonnes tailles) telles que $A = QJ_{n,p,r}P^{-1}$ et ce qui précède montre que $\mathrm{rang}\,(A) = r$.

b. Si $r = \mathrm{rang}\,(A)$ alors, comme avant, on a $A = QJ_{n,p,r}P^{-1}$ donc, en transposant : ${}^tA = {}^t(P^{-1})J_{p,n,r}{}^tQ$ donc ${}^tA$ et $J_{p,n,r}$ sont semblables et on conclut avec la question précédente que $\mathrm{rang}\,({}^tA) = r = \mathrm{rang}\,(A)$.

2.76 Plusieurs solutions :

- Si A inversible on vérifie par calculs que $C = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est l'inverse de B. Si A ne l'est pas, les lignes de A sont liées donc les n premières lignes de B aussi et B non inversible.
- $\det(B) = \det \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \det(A)$ avec les déterminants par blocs et un calcul simple (pour la matrice de droite) en développant successivement).
- Si A n'est pas inversible, il existe un vecteur colonne X non nul tel que $AX = 0$ ("A n'est pas injective"), donc $B \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = 0$ et B n'est pas inversible car $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$ est non nul aussi.
- Si $\mathrm{rang}\,(A) = r$, alors A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'après le cours donc il existe P et Q deux matrices inversibles d'ordre n telles que $A = PJ_rQ^{-1}$ et en cherchant un peu (beaucoup), on trouve la relation matricielle $\begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ donc B est équivalente à J_{n+r} donc $\mathrm{rang}\,(B) = n + r = n + \mathrm{rang}\,(A)$ donc A inversible $\iff \mathrm{rang}\,(A) = n \iff \mathrm{rang}\,(B) = 2n \iff B$ inversible.

C'est une simple récurrence qui prouve que $\forall p \in \mathbb{N},\ B^{2p} = \begin{pmatrix} 0 & A^p \\ A^p & 0 \end{pmatrix}$ et $B^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & A^{p+1} \\ A^p & 0 \end{pmatrix}$.

2.77 Analyse : soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tX + X = \mathrm{Tr}\,(X)\,A$, on la décompose sous la forme $X = U + V$ où $U = \dfrac{X + {}^tX}{2}$ est symétrique et $V = \dfrac{X - {}^tX}{2}$ est antisymétrique. Comme $\mathrm{Tr}\,(V) = 0$, par linéarité de la fonction Tr , on a ${}^tX + X = \mathrm{Tr}\,(X)\,A \iff 2U = \mathrm{Tr}\,(U)A$. Cette condition matricielle $2U = \mathrm{Tr}\,(U)A$ implique la relation $2\mathrm{Tr}\,(U) = \mathrm{Tr}\,(U)\mathrm{Tr}\,(A)$. Ceci nous conduit à considérer deux cas :

- Si $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 2$, comme $(2 - \mathrm{Tr}\,(A))\mathrm{Tr}\,(U) = 0$, $\mathrm{Tr}\,(U) = 0$ donc $2U = \mathrm{Tr}\,(U)A = 0$ et $X = V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$, en posant $\lambda = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(U)}{2}$, on a $U = \lambda A$ et on traite à nouveau deux cas :
  - Si A est symétrique, on a donc $X = \lambda A + V$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
  - Si A n'est pas symétrique, $U = \lambda A$ symétrique implique $\lambda = 0$ donc $X = V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Synthèse : on traite maintenant trois cas :

- Si $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 2$ et $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a bien $\mathrm{Tr}\,(X) = 0$ et $X + {}^tX = 0$ donc ${}^tX + X = \mathrm{Tr}\,(X)\,A$.
- Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$, $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, à nouveau $\mathrm{Tr}\,(X) = 0$ et $X + {}^tX = 0$ donc ${}^tX + X = \mathrm{Tr}\,(X)\,A$.
- Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$, A symétrique et $X = \lambda A + V$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Tr}\,(X) = \lambda \mathrm{Tr}\,(A) = 2\lambda$ donc $X + {}^tX = \lambda A + \lambda {}^tA = 2\lambda A = \mathrm{Tr}\,(X)\,A$.

En conclusion, en posant l'équation $(E)\ :\ {}^tX + X = \mathrm{Tr}\,(X)\,A$, on a, dans chacun des trois cas suivants :

- Si $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 2$: les solutions de (E) sont les matrices antisymétriques.
- Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$ et $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: les solutions de (E) sont les matrices antisymétriques.
- Si $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: les solutions de (E) sont les matrices $X = \lambda A + V$ avec $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

2.10 Déterminants

2.78 Par linéarité du déterminant par rapport à la colonne n : $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$. On développe la seconde selon la colonne n et on soustrait à toutes les colonnes C_k (k entre 1 et $n-1$) la colonne 1 pour la première et on obtient $D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$ (matrice triangulaire supérieure pour la première). On pose alors $u_n = \dfrac{D_n}{n!}$ et on obtient $u_n = \dfrac{1}{n} + u_{n-1}$ avec $u_1 = D_1 = 2$ donc par une récurrence simple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + H_n$ donc $D_n = n!(1 + H_n)$.

2.79 On écrit $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de sorte que $p_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$. En écrivant $P^2 = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a donc par définition du produit matriciel : $b_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{i,k}p_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{(k-1)(j-1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega^{(i+j-2)(k-1)}$. On considère alors deux cas :

- si $i + j - 2 \equiv 0\ [n]$, alors $\omega^{i+j-2} = 1$ donc $b_{i,j} = n$.
- si $i + j - 2 \not\equiv 0\ [n]$, alors $\omega^{i+j-2} \neq 1$ donc $b_{i,j} = \dfrac{1 - \omega^{n(i+j-2)}}{1 - \omega^{i+j-2}} = 0$ car $\omega^n = 1$.

Ainsi $P^2 = nD$ où D est la matrice $D = (d_{i,j})$ avec $d_{i,j} = 0$ si $i + j \not\equiv 2[n]$ et $d_{i,j} = n$ si $i + j \equiv 2[n]$.

En notant $P\overline{P} = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{-(k-1)(j-1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega^{(i-j)(k-1)}$ donc $P\overline{P} = nI_n$.

Même si ce n'est pas demandé, on a $\det(P) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\omega^{j-1} - \omega^{i-1})$ d'après VANDERMONDE mais ce n'est pas très pratique ici. On a aussi $\det(P^2) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n$ après calculs en développant successivement par rapport aux dernières colonnes et $\det(P)\overline{\det(P)} = n^n$.

Je garde la matrice de la version papier et pas ce que j'ai fait au tableau : $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = a_{i+j-1}$ où l'indice $i+j-1$ est compris modulo n et dans l'intervalle $[\![1;n]\!]$ (par exemple $a_{n,2} = a_1$). Posons $PA = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)} a_{j+k-1}$. On pose $m = j+k-1$ dans cette somme (toujours modulo n et entre 1 et n) et on trouve que la ligne i de la matrice PA est $\sum_{m=1}^{n} \omega^{(i-1)(m-1)} a_m$ fois la ligne i de la matrice $\overline{P}$. Ainsi par multilinéarité du déterminant par rapport à chacune de ses lignes : $\det(PA) = \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{m=1}^{n} \omega^{(i-1)(m-1)} a_m \Big) \overline{\det(P)} = \det(P)\det(A)$. On multiplie par $\overline{\det(P)} = \det(\overline{P})$ ce qui montre que $\det(A) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \Big(\sum_{m=1}^{n} \omega^{(i-1)(m-1)} a_m \Big)$ car $\det(P^2) = \overline{\det(P^2)} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n \in \mathbb{R}$.

2.80 Effecteur les opérations de GAUSS $C_1 \leftarrow C_1 + C_n$ et $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ et on trouve en développant selon la première ligne et la première colonne que $D_n = D_{n-2}$. Comme $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, on trouve donc que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

2.81 Si $n = 1$ c'est clair. Si $n \geqslant 2$, avec $X = A$, on a $\det(A) = 0$ donc en interprétant $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$ où $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille de vecteurs R^n et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, si $A \neq 0$, il existe un vecteur non nul v_k qu'on peut compléter en une base $\mathcal{B}' = (w_1, \cdots, w_n)$ avec $w_k = -v_k$. Mais alors, il vient la relation suivante $\det(A) + \det(B) = \det(B) = \det_{\mathcal{B}}(w_1, \cdots, w_n) \neq 0$ car $\mathcal{B}'$ est une base or on a aussi $\det(A+B) = \det_{\mathcal{B}}(v_1 + w_1, \cdots, v_n + w_n) = 0$ car $w_k + v_k = 0$. Par conséquent $A = 0$.

2.82 Soit le polynôme P défini par sa fonction polynomiale : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \det(A + xB)$; alors P est de degré inférieur ou égal à n et comme $A + kB \in GL_n(\mathbb{Z})$ pour $k \in [\![0;2n]\!]$, on a $P(k) = \pm 1$ pour $k \in [\![0;2n]\!]$. Donc le polynôme $Q = P^2 - 1$ possède $2n+1$ racines distinctes et il est de degré inférieur ou égal à $2n$ ce qui fait que $Q = 0$. Alors $\det(A) = P(0) = \pm 1$ et $\det(B) = \lim_{x\to+\infty} \det\Big(B + \frac{1}{x}A\Big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x^n} = 0 = \det(B)$ en exploitant la continuité du déterminant par rapport aux coefficients de la matrice grâce à la formule avec $n!$ termes.

2.83 On écrit $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de sorte que $p_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$. En écrivant $P^2 = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a donc par définition : $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}p_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i+j-2)(k-1)}$. On considère deux cas :

- si $i+j-2 \equiv 0\ [n]$, alors $\omega^{i+j-2} = 1$ donc $b_{i,j} = n$.
- si $i+j-2 \not\equiv 0\ [n]$, alors $\omega^{i+j-2} \neq 1$ donc $b_{i,j} = \dfrac{1-\omega^{n(i+j-2)}}{1-\omega^{i+j-2}} = 0$ car $\omega^n = 1$.

Ainsi $P^2 = nD$ où D est la matrice $D = (d_{i,j})$ avec $d_{i,j} = 0$ si $i+j \not\equiv 2[n]$ et $d_{i,j} = n$ si $i+j \equiv 2[n]$.
En notant $P\overline{P} = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{-(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-j)(k-1)}$ donc $P\overline{P} = nI_n$.
$\det(P) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\omega^{j-1} - \omega^{i-1})$ d'après VANDERMONDE mais ce n'est pas très pratique ici. On a aussi $\det(P^2) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n$ après calculs en développant successivement et $\det(P)\overline{\det(P)} = n^n$.

Je garde la matrice de la version papier et pas ce que j'ai fait au tableau : $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = a_{i+j-1}$ où l'indice $i+j-1$ est compris modulo n et dans l'intervalle $[\![1;n]\!]$ (par exemple $a_{n,2} = a_1$). Posons $PA = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(i-1)(k-1)} a_{j+k-1}$. On pose $m = j+k-1$ dans cette somme (toujours modulo n et entre 1 et n) et on trouve que la ligne i de la matrice PA est $\sum_{m=1}^{n}\omega^{(i-1)(m-1)}a_m$ fois la ligne i de la matrice $\overline{P}$. Ainsi par multilinéarité du déterminant par rapport à chacune de ses lignes : $\det(PA)=\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{m=1}^{n}\omega^{(i-1)(m-1)}a_m\Big)\overline{\det(P)}=\det(P)\det(A)$. On multiplie par $\overline{\det(P)}=\det(\overline{P})$ ce qui montre que $\det(A)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{m=1}^{n}\omega^{(i-1)(m-1)}a_m\Big)$ car $\det(P^2)=\overline{\det(P^2)}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^n\in\mathbb{R}$.

2.84 **a.** ($\Longrightarrow$) Si α est une racine commune de P et Q, il existe P_1 et Q_1 dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ (même exactement de degré $n-1$) tels que $P=(X-\alpha)P_1$ et $Q=(X-\alpha)Q_1$ et on a $Q_1P-P_1Q=0$: $(U,V)=(Q_1,-P_1)$ convient.
($\Longleftarrow$) Si un tel couple (U,V) existe, comme $UP=-VQ$, alors $U\neq 0$ et $V\neq 0$ (car $P\neq 0$ et $Q\neq 0$). Si on suppose que les racines de P ne sont pas des racines de Q, comme $P|VQ$, toutes les racines α de P sont aussi racines de V avec une multiplicité supérieure. Ainsi V possède au moins n racines <u>comptées avec leur ordre de multiplicité</u> et, comme $\deg(V)\leqslant n-1$, on en déduit que $V=0$: absurde.

Par double implication, on a l'équivalence souhaitée :

centerline$\big(P$ et Q ont au moins une racine commune$\big)\Longleftrightarrow\big(\exists(U,V)\in\mathbb{C}_{n-1}[X]^2\setminus\{(0,0)\},\ UP+VQ=0\big)$.

b. φ est linéaire, donc d'après la question **a.** et comme $\dim\big(\mathbb{C}_{n-1}[X]^2\big)=\dim\big(\mathbb{C}_{2n-1}[X]\big)=2n$, on a :

$\big(P$ et Q ont une racine commune$\big)\Longleftrightarrow\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\neq\{(0,0)\}\big)\Longleftrightarrow\big(\varphi$ n'est pas un isomorphisme$\big)$.

c. La base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]^2$ est $\mathcal{B}=\big((1,0),(X,0),\cdots,(X^{n-1},0),(0,1),(0,X),\cdots,(0,X^{n-1})\big)$ et celle de $\mathbb{C}_{2n-1}[X]$ est $\mathcal{B}'=(1,X,\cdots,X^{2n-1})$. Alors en posant $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2n}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, $P=\sum_{k=0}^{n}p_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n}q_kX^k$, on a : $\forall j\in[\![1;n]\!]$, $a_{i,j}=p_{i-j}$ si $i\in[\![j;n+j]\!]$ et $a_{i,j}=0$ sinon et $\forall j\in[\![n+1;2n]\!]$, $a_{i,j}=q_{j-i-n}$ si $i\in[\![j-n;j]\!]$ et $a_{i,j}=0$ sinon (c'est une matrice de SYLVESTER).

d. Dans cette question, comme $n=2$ et $P=X^2+X+a$ et $Q=X^2+bX+1$: $A=\begin{pmatrix}a&0&1&0\\1&a&b&1\\1&1&1&b\\0&1&0&1\end{pmatrix}$.

D'après **b.** et **c** : $\big(P$ et Q ont une racine commune$\big)\Longleftrightarrow\det(A)=0$ (déterminant de SYLVESTER).

Après calculs, on obtient la condition : $\big(P$ et Q ont une racine commune$\big)\Longleftrightarrow a^2+ab^2-2a-ab+2-b=0$.

2.85 Si $x=2015$ (la méthode ne dépend pas de cette valeur) et $a_{i,j}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}i^k(j+x)^{p-k}=\sum_{k=0}^{p}b_{i,k}c_{k,j}$ par le binôme de NEWTON en posant $b_{i,k}=i^k$ et $c_{k,j}=\binom{p}{k}(j+x)^{p-k}$.

En posant $B=(i^j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{R})$ et $C=\left(\binom{p}{i}(j+x)^{p-i}\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathcal{M}_{p+1,n}(\mathbb{R})$, on a $A=BC$.

Mais on sait que $\mathrm{rang}\,(A)=\mathrm{rang}\,(BC)\leqslant \mathrm{Max}(\mathrm{rang}\,(B),\mathrm{rang}\,(C))$ donc $\mathrm{rang}\,(A)\leqslant p+1$ car le rang d'une matrice est à la fois inférieur au nombre de ses lignes et de ses colonnes.

Pour conclure que le rang de A vaut bien $p+1$, il suffit de montrer que les $p+1$ premières colonnes de A sont indépendantes et cela peut se faire en montrant que le déterminant de la matrice A' obtenue en ne gardant dans A que les $p+1$ premières lignes et les $p+1$ premières colonnes est non nul. En recommençant la même décomposition, $A'=B'C'$ avec B' et C' les matrices carrées suivantes : $B'=(i^j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p+1\\0\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ et $C'=\left(\binom{p}{i}(j+x)^{p-i}\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant p+1}}\in\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$. La matrice B' est une matrice de VANDERMONDE associée aux réels $1,\cdots,p+1$ tous distincts donc elle est inversible et $\det(B')=\prod_{1\leqslant a<b\leqslant p+1}(b-a)=\prod_{k=1}^{p}k!\neq 0$.

La matrice C' est elle aussi quasiment une matrice de VANDERMONDE (chaque ligne est multipliée par $\binom{p}{i}$) associée aux réels $1+x, \cdots, p+1+x$ tous distincts donc elle est inversible et son déterminant vaut $\det(C') = \prod_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant p+1} (b-a) = \prod_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \prod_{k=1}^{p} k! \neq 0$. Par produit, A' est inversible : $\operatorname{rang}(A) = p+1$.

2.86 Par linéarité du déterminant par rapport à la colonne n : $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$. On développe la seconde selon la colonne n et on soustrait à toutes les colonnes C_k (k entre 1 et $n-1$) la colonne 1 pour la première et on obtient $D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$ (matrice triangulaire supérieure pour la première). On pose alors $u_n = \dfrac{D_n}{n!}$ et on obtient $u_n = \dfrac{1}{n} + u_{n-1}$ avec $u_1 = D_1 = 2$ donc par une récurrence simple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + H_n$ donc $D_n = n!(1+H_n)$.

2.87 En développant selon la première colonne, puis la première ligne, on obtient une nouvelle relation : $D_n = (-n) \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ n-2 & 0 & 4 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. On recommence jusqu'à arriver à une matrice d'ordre 3 (si n est pair) ou 2 (si n est impair). Or $\begin{vmatrix} 0 & n-1 & 0 \\ 2 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 0 & n \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -n = (-n) \times 1$ donc $D_n = 0$ si n est pair et si n est impair on l'écrit $n = 2p+1$ et les relations précédentes montrent que l'on a : $D_n = \prod_{k=0}^{p} (-(2p-2k+1)) \times (2k+1) = (-1)^{p+1}\big(1 \times 3 \times \cdots \times (2p+1)\big)^2 = \dfrac{(-1)^{p+1}(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!^2}$.

2.88 On ajoute toutes les colonnes dans la première et on factorise par $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dans la première colonne. Ensuite on effectue les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour j allant de 2 à n amène directement une matrice triangulaire inférieure dont le déterminant est le produit des termes diagonaux : $D_n = (-1)^{n+1} \dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

- On pouvait aussi effectuer les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i allant de n à 2 et obtenir une nouvelle expression $D_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & n-1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & n-1 & -1 \end{vmatrix}$; on développe ensuite selon la première colonne et ça devient classique (on retranche à toutes les lignes la première ligne et on développe selon la dernière colonne pour avoir une matrice diagonale et retrouver le même résultat).

2.11 Systèmes linéaires

2.89 **a.** En effectuant les opérations de GAUSS (dans l'ordre) : $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, \cdots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on se ramène à $B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & d_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{n-1} \end{pmatrix}$ (de même rang que A) avec $\forall k \in [\![1; n-1]\!],\ d_k = a_k - b_k$. Ainsi : $D = \det(B) = \prod_{k=1}^{n-1}(a_k - b_k)$. De plus : $r = \text{rang}\,(A) = 1 + \text{card}\left(\left\{b_k - a_k \mid k \in [\![1; n-1]\!]\right\}\right)$.

b. On effectue les mêmes opérations : (S) compatible $\iff \forall k \in [\![1; n-1]\!],\ a_k = b_k \implies c_{k+1} = c_k$. Si $D \neq 0$, on a $\forall k \in [\![2; n]\!],\ x_k = \dfrac{c_{k+1} - c_k}{a_k - b_k}$ et $x_1 = -b_1 x_2 - \cdots - b_{n-1} x_n$.

2.90 Comme (a, b, c) sont distincts deux à deux, le système est de CRAMER car son déterminant vaut d'après le cours $(c-a)(c-b)(b-a) \neq 0$. Il existe une solution (x, y, z) unique et $x = \dfrac{1}{(c-a)(c-b)(b-a)} \begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix}$ donc par linéarité dans chaque ligne $x = \dfrac{abc}{(c-a)(c-b)(b-a)} \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix}$ et par VANDERMONDE (en faisant tourner les colonnes) : $x = abc$ après simplification. Même chose pour y et z.
On pouvait aussi introduire le polynôme $P = X^3 - (x + yX + zX^2)$ et (x, y, z) solution du système si et seulement si $P(a) = P(b) = P(c) = 0$; comme P est de degré 3 et unitaire, cela signifie que $P = (X-a)(X-b)(X-c)$ donc $P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$ d'où $x = abc$, $y = -(ab+ac+bc)$ et $z = a+b+c$.

2.12 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

2.91 Comme E est de dimension finie n, $\mathcal{L}(E)$ est aussi de dimension finie n^2. Ainsi, la famille $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n^2})$ admettant $n^2 + 1$ endomorphismes, elle est forcément liée donc il existe $(q_0, \cdots, q_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ telle que $(q_0, \cdots, q_{n^2}) \neq (0, \cdots, 0)$ et $\sum_{k=0}^{n^2} q_k f^k = 0$. Le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n^2} q_k X^k$ est donc annulateur de f. Quitte à diviser par le coefficient dominant de Q, on peut supposer Q unitaire.
On décompose Q en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ (ceux de degré 1 et ceux de degré 2 avec un discriminant strictement négatif) : $Q = \prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)^{m_k} \times \prod_{k=1}^{s}(X^2 - a_k X + b_k)^{n_k}$ avec $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![1; r]\!],\ \alpha_k \in \mathbb{R}$ et $m_k \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1; s]\!],\ (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ et $a_k^2 - 4b_k < 0$ et $n_k \in \mathbb{N}^*$.
Comme $Q(f) = 0$, on a $\prod_{k=1}^{r}(f - \alpha_k \mathrm{id}_E)^{m_k} \circ \prod_{k=1}^{s}(f^2 + a_k f + b_k \mathrm{id}_E)^{n_k} = 0$ (où les produits signifient ici des composées). Les $f - \alpha_k \mathrm{id}_E$ $(k \in [\![1; r]\!])$ et les $(f^2 + a_k f + b_k \mathrm{id}_E)$ $(k \in [\![1; s]\!])$ ne peuvent pas tous être des automorphismes car une composée d'automorphismes en est encore un et que l'endomorphisme nul n'est pas dans $GL(E)$ (qui est un groupe). Ainsi, on peut considérer deux cas (qui ne s'excluent pas l'un l'autre) :

- soit $r \geqslant 1$ et $\exists k \in [\![1; r]\!],\ f - \alpha_k \mathrm{id}_E \notin GL(E)$. Alors $\mathrm{Ker}(f - \alpha_k \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$ et il existe donc un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \alpha_k x$. La droite $D = \mathrm{Vect}(x)$ est alors clairement stable par f.
- soit $s \geqslant 1$ et $\exists k \in [\![1; s]\!],\ f^2 + a_k f + b_k \mathrm{id}_E \notin GL(E)$. Alors $\mathrm{Ker}(f^2 + a_k f + b_k \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$ et il existe donc un vecteur x non nul tel que $f^2(x) + a_k f(x) + b_k x = 0$. Posons $P = \mathrm{Vect}(x, f(x))$. Si on avait $f(x)$ et

x colinéaires, on aurait $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ d'où $f^2(x) = \lambda^2 x$ puis $(\lambda^2 + a_k\lambda + b_k)x = 0_E$ qui donnerait $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ car $x \neq 0_E$. Ceci est incompatible avec $a_k^2 - 4b_k < 0$ puisque λ est réel. Ainsi P est bien un plan vectoriel. De plus, si $y = \alpha x + \beta f(x)$ est un vecteur quelconque de P, son image par f vérifie $f(y) = \alpha f^2(x) + \beta f(x) = -b_k\alpha x + (\beta - a_k\alpha)f(x) \in P$ donc le plan P est stable par f.

Si E un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe au moins une droite ou un plan de E stable par f.

2.92 Si les $a_1, \cdots, a_n$ ne sont pas distincts deux à deux, il y a deux fois la même ligne dans M : $\det(M) = 0$. On supposera dans la suite qu'ils sont distincts deux à deux.
En notant $D(x)$ ce déterminant, on constate en développant selon la dernière ligne que D est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$, comme $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\big(i \neq k$ et $x = a_k\big) \Longrightarrow \big(P_i = 0$ et $P_k = \prod\limits_{i\neq k}(a_k - a_i)\big)$, en développant encore selon la dernière ligne, on a $D(a_k) = (-1)^{k+n}V_{n-1}(a_1, \cdots, a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n)\prod\limits_{i\neq k}(a_k - a_i)$.
Ainsi d'après le cours, $D(a_k) = (-1)^{k+n}\prod\limits_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ i\neq k, j\neq k}}(a_j - a_i)\prod\limits_{1\leqslant i<k}(a_k - a_i)(-1)^{n-k}\prod\limits_{k<i\leqslant n}(a_i - a_k)$ ce qui donne après simplifications $D(a_k) = V_n(a_1, \cdots, a_n)$.
Comme D coïncide en n valeurs distinctes avec un polynôme constant, on a : $\forall x \in \mathbb{C},\ D(x) = V_n(a_1, \cdots, a_n)$.

2.93 ($\supset$) Soit A un sous-espace de $\mathrm{Ker}(p)$ et B un sous-espace de $\mathrm{Im}\,(p)$. Posons $F = A + B$, alors F est un sous-espace vectoriel de E en tant que somme de deux sous-espaces de E. De plus, si $z \in F$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $z = a + b$ et $p(z) = p(a) + p(b) = 0_E + b \in B \subset A + B = F$ car $p(a) = 0_E$ puisque $a \in \mathrm{Ker}(p)$ et $p(b) = b$ car $b \in \mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$. Ainsi, F est bien stable par p.

($\subset$) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par p, posons $A = F \cap \mathrm{Ker}(p)$ et $B = F \cap \mathrm{Im}\,(p)$. Alors A est un sous-espace vectoriel de E en tant qu'intersection de sous-espaces de E et $A \subset \mathrm{Ker}(p)$ par construction. De même, B est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}\,(p)$. Soit $x \in F$, posons $y = x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $z = p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$ alors on a clairement $x = y + z$. Comme F est stable par p, on a $z = p(x) \in F$ donc $z \in B = F \cap \mathrm{Im}\,(p)$. De plus, $y = x - p(x) \in F$ car $(x, p(x)) \in F^2$ donc $y \in F \cap \mathrm{Ker}(p) = A$. Par conséquent, $x = y + z \in A + B$ et on vient de prouver que $F \subset A + B$. Comme l'inclusion $A + B \subset F$ est claire, par double inclusion, $F = A + B$.

Par double implication, on a montré que les sous-espaces vectoriels F de E stables par p sont exactement ceux de la forme $F = A + B$ où A est un sous-espace de $\mathrm{Ker}(p)$ et B un sous-espace de $\mathrm{Im}\,(p)$.

De plus, soit $F = A + B$ un sous-espace de cette forme, comme $A \cap B \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}\,(p) = \{0_E\}$, on a $A \cap B = \{0_E\}$ et la somme $A + B$ est bien directe ce qui prouve que $F = A + B = A \oplus B$.

2.94 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. Comme $A^3 = 0$, on a aussi $f^3 = 0$. En l'écrivant $f^2 \circ f = f \circ f^2 = 0$ on a donc classiquement $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
On va faire une disjonction des cas selon l'indice de nilpotence de f :

- <u>si $f^2 \neq 0$</u>, c'est-à-dire si l'indice de nilpotence de f vaut 3, il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Classiquement, $\mathcal{B} = (f^2(x), f(x), x)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, si (R) : $af^2(x) + bf(x) + cx = 0$, on applique f^2 à (R) et il reste $cf^2(x) = 0$ (car $f^3 = 0$) donc $c = 0$ car $f^2(x) \neq 0$; on applique ensuite f à (R) et $bf^2(x) = 0 \Longrightarrow b = 0$ et il reste $af^2(x) = 0$ donc $a = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre et comme elle comporte $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, la matrice de f dans $\mathcal{B}$

est bien $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $f^3(x) = 0$ et A est donc semblable à $N_1 = E_{1,2} + E_{2,3}$ si $f^2 \neq 0$ car $A = PN_1P^{-1}$ en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.

• si $f^2 = 0$, c'est-à-dire si l'indice de nilpotence de f vaut 2, on a $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ donc, par la formule du rang, $\mathrm{rang}\,(f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - \mathrm{rang}\,(f)$ donc $\mathrm{rang}\,(f) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Soit u_3 un vecteur non nul de $E \setminus \mathrm{Ker}(f)$, on pose alors $u_2 = f(u_3) \in \mathrm{Im}\,(f)$ de sorte que $u_2 \neq 0$ car $u_3 \notin \mathrm{Ker}(f)$. La famille (u_2) est une famille libre dans $\mathrm{Ker}(f)$ qu'on peut donc compléter par en une base (u_1, u_2) de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $u_3 \notin \mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Ker}(f)$, la famille libre à trois vecteurs $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$. Par construction, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A est semblable à $N_2 = E_{2,3}$ car $A = PN_2P^{-1}$ en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.

Ainsi, toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $A \neq 0$ et $A^3 = 0$ est semblable à N_1 ou N_2.

2.95 Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k f_k + \beta_k g_k) = 0$.

Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = -\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k g_k$ est une fonction à la fois paire et impaire, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k g_k = 0$ (1).
En effet, si f est à la fois paire et impaire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x) = -f(x)$ donc $2f(x) = 0$ d'où $f(x) = 0$.

On va montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre par une des méthodes qui suit. Ensuite, $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k g_k = 0$ se dérive en $\sum\limits_{k=1}^{n} k\beta_k f_k = 0$ et on en déduira que $\beta_1 = 2\beta_2 = \cdots = n\beta_n = 0$ donc que $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. Comme $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ par liberté de $(f_1, \cdots, f_n)$, on aura la liberté de la famille $(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$.

Méthode 1 : Les polynômes T_k de Tchebychev vérifient $\forall t \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0$ s'écrit aussi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k T_k(\cos t) = 0$. Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k T_k$ est nul car ce polynôme possède une infinité de racines (car $\cos$ est surjectif de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$). Comme les polynômes de Tchebychev sont de degrés échelonnés, ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ et on a la liberté de $(f_1, \cdots, f_n)$.

Méthode 2 : Pour l'endomorphisme $D \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ défini par $D(f) = f''$, les fonctions f_k sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $-k^2$ car $D(f_k) = -k^2 f_k$ et $f_k \neq 0$. Comme ces valeurs propres sont distinctes deux à deux, on saura bientôt que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ des vecteurs propres est libre.

Méthode 3 : Pour le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ sur l'espace $C^0([0;2\pi], \mathbb{R})$, $(f_1, \cdots, f_n)$ est directement une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul : elle est donc libre ! On le prouve avec la formule de trigonométrie $2\cos(b)\cos(a) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$. En effet, si $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $(f_i|f_j) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(it)\cos(jt)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos((i-j)t) + \cos((i+j)t))dt = 0$.

Méthode 4 : On dérive $2(n-1)$ fois la relation (1) (en ne gardant que les dérivées d'ordre pair) et on a $\forall p \in [\![0;n-1]\!]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^p k^{2p} \alpha_k \cos(kt) = 0$. En évaluant en $t = 0$, $\forall p \in [\![0;n-1]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{2p} \alpha_k = 0$. Ce système est de Cramer car la matrice $A = (j^{2(i-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de ce système est une matrice de Vandermonde inversible puisque les scalaires $1, 4, \cdots, n^2$ sont distincts. Ainsi, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.

Méthode 5 : (f_1) est libre car $f_1 \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k f_k = 0$ (A). On dérive deux fois et on a $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 \alpha_k f_k = 0$ (B). En effectuant (B) $-(n+1)^2$(A), $\sum\limits_{k=1}^{n} ((n+1)^2 - k^2)\alpha_k f_k = 0$ donc $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $((n+1)^2 - k^2)\alpha_k = 0$ par hypothèse de récurrence donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ d'où $\alpha_{n+1} = 0$ car $f_{n+1} \neq 0$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.

2.96 **a.** On sait que A est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ (un endomorphisme en dimension finie est injectif si et seulement s'il est bijectif). Par l'absurde, supposons qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$. Soit un entier $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $|x_i| = ||X||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k| > 0$. Dans la i-ième ligne de $AX = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \iff a_{i,i}x_i = -\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}x_j$. Par inégalité triangulaire, $|a_{i,i}||x_i| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}||x_j| \leqslant \Big(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\Big)|x_i|$ qui devient, après division par $|x_i| > 0$, $|a_{i,i}| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ contredisant l'hypothèse de l'énoncé. On en déduit donc le seul vecteur colonne tel que $AX = 0$ est $X = 0$ d'où l'inversibilité de A.

b. L'idée est que si les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs et A à diagonale strictement dominante, $A + xI_n$ l'est aussi $x \geqslant 0$ car $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $|a_{i,i} + x| = a_{i,i} + x \geqslant a_{i,i} > \sum\limits_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $P(x) = \det(xI_n + A) = \chi_{-A}(x)$.

On verra plus tard dans l'année que P est une fonction polynomiale, unitaire et de degré n.

Pour $x \geqslant 0$, comme $A + xI_n$ vérifie les hypothèses de **a.**, $A + xI_n$ est inversible donc $P(x) = \det(A + xI_n) \neq 0$. Puisque P est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, P garde un signe constant sur $\mathbb{R}_+$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ce signe ne peut donc être que strictement positif car P est unitaire et de degré $n \geqslant 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$. Par conséquent, comme $0 \in \mathbb{R}_+$, on a $P(0) = \det(A) > 0$.

2.97 Déjà, si $n = 1$, il, est clair que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A + X) = a + x = \det(A) + \det(X)$ en posant $A = (a)$ et $X = (x)$; ainsi l'énoncé est faux dans le cas où $n = 1$.

On suppose dorénavant que $n \geqslant 2$, alors si on suppose que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$, en prenant $X = A$, on obtient $\det(2A) = 2^n \det(A) = 2\det(A)$ donc $\det(A) = 0$ car $2^n \neq 2$.

Méthode 1 : notons maintenant $r = \mathrm{rang}(A)$, alors on sait (même si c'est hors programme) que A est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; il existe donc des matrices P et Q de $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = QJ_rP^{-1}$.

La condition s'écrit alors $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(QJ_rP^{-1} + X) = \det(X)$ ou encore, en notant $Y = Q^{-1}XP$: $\det(QJ_rP^{-1} + QYP^{-1}) = \det(QYP^{-1}) \iff \det(Q)\det(J_r + Y)\det(P^{-1}) = \det(Q)\det(Y)\det(P^{-1})$. Mais comme $\det(Q) \neq 0$ et $\det(P^{-1}) \neq 0$ et que $f : X \mapsto Q^{-1}XP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la condition imposée à A devient : $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(J_r + Y) = \det(Y)$.

Si on avait $r \neq 0$, on pourrait prendre $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ et on aurait $\det(J_r + Y) = \det(I_n) = 1 = \det(Y) = 0$ qui est l'absurdité même ! On en déduit donc que $r = 0$ et donc que $A = 0$ (seule matrice de rang 0).

Méthode 2 : en interprétant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$ où $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille de vecteurs de R^n et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, si on avait $A \neq 0$, il existerait $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $v_k \neq 0$ et, en notant $w_k = -v_k$, on pourrait compléter (w_k) pour avoir une nouvelle base $\mathcal{B}' = (w_1, \cdots, w_n)$. On aurait donc, en notant $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w_1, \cdots, w_n)$, $\det(A) + \det(B) = \det(B) = \det_{\mathcal{B}}(w_1, \cdots, w_n) \neq 0$ car $\mathcal{B}'$ est une base or $\det(A + B) = \det_{\mathcal{B}}(v_1 + w_1, \cdots, v_n + w_n) = 0$ car $w_k + v_k = 0$. Encore une fois, c'est absurde, ainsi $A = 0$.

2.98 ($\Longleftarrow$) Si p et q sont deux projecteurs de même image et $u = p - q$, alors $u^2 = p + q - p \circ q - q \circ p$

Or si $x \in E$, $p(x) \in \text{Im}\,(p)$ donc $p(x) \in \text{Im}\,(q)$ et $q(p(x)) = p(x)$ car $\text{Im}\,(q) = \text{Ker}(\text{id}_E - q)$ ce qui prouve que $q \circ p = p$. De même $p \circ q = q$ et on a bien $u^2 = p + q - p - q = 0$.

($\Longrightarrow$) Si $u^2 = 0$, on a $\text{Im}\,(u) \subset \text{Ker}(u)$ d'après le cours. Soit S un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E, u induit un isomorphisme v entre S et $\text{Im}\,(u)$ par le théorème du rang. Notons $r = \text{rang}\,(u)$. Prenons donc une base $(e_1, \cdots, e_r)$ de S, alors en posant $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $e_{n-r+k} = f(e_k) \in \text{Im}\,(u)$, la famille $(e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ est une base de $\text{Im}\,(u)$ (image d'une base par l'isomorphisme v). On complète cette famille libre $(e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ de vecteurs de $\text{Ker}(u)$ en une base $(e_{r+1}, \cdots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ de $\text{Ker}(u)$ par le théorème de la base incomplète. Enfin, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = S \oplus \text{Ker}(u)$.

La matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ s'écrit par blocs $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_r & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car les vecteurs $e_{r+1}, \cdots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \cdots, e_n$ sont dans $\text{Ker}(u)$ et $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $e_{n-r+k} = f(e_k)$. Par exemple, en posant les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_r & 0 & I_r \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $A = P - Q$ donc, en passant aux endomorphismes canoniquement associés, $u = p - q$ avec p et q deux projecteurs tels que $\text{Im}\,(p) = \text{Im}\,(q) = \text{Im}\,(u)$.

Cela revient à définir p et q par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$: $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $p(e_k) = e_{n-r+k}$ et $q(e_k) = 0$, $\forall k \in [\![r+1; n-r]\!]$, $p(e_k) = 0$ et $q(e_k) = 0$ et $\forall k \in [\![n-r+1; n]\!]$, $p(e_k) = e_k$ et $q(e_k) = e_k$ et on vérifie bien sur les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ que $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $u = p - q$ et $\text{Im}\,(p) = \text{Im}\,(q) = \text{Im}\,(u)$.

2.99 **a.** Soit $x \in N_k$, $f(x) \in N_k$ car $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc N_k est stable par f.

Soit $y \in I_k$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^k(x)$ et $f(y) = f(f^k(x)) = f^k(f(x)) \in I_k$ donc I_k est stable par f.
Si $i \in \mathbb{N}$ et $x \in N_i$, alors $f^i(x) = 0_E$ donc $f^{i+1}(x) = f(f^i(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $x \in N_{i+1}$ donc $N_i \subset N_{i+1}$.
Si $i \in \mathbb{N}$ et $y \in I_{i+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^i(x)$ et $f(y) = f(f^i(x)) = f^i(f(x)) \in I_i$ donc $I_{i+1} \subset I_i$.
Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$, supposons $N_k = N_{k+1}$. Alors on sait déjà que $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Soit $x \in N_{k+2}$, alors $f^{k+2}(x) = 0_E = f^{k+1}(f(x))$ donc $f(x) \in N_{k+1} = N_k$ donc $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = 0_E$ donc $x \in N_{k+1}$. On a donc $N_{k+2} = N_{k+1}$. On recommence et on parvient à $N_k = N_{k+1} = \cdots = N_{n-1} = N_n$ ce qui est absurde car $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. Les inclusions $N_0 \subset \cdots \subset N_n$ sont donc toutes strictes.

C'était la démonstration dans le cas général, mais on a trouvé mieux dans ce cas particulier : si $k \in [\![0; n-1]\!]$ et qu'on suppose $N_k = N_{k+1}$, alors $f^{k+1} \circ f^{n-k-1} = f^n = 0$ donc $\forall x \in E$, $f^{n-k-1}(x) \in N_{k+1} = N_k$ donc $f^k \circ f^{n-k-1}(x) = 0_E$ donc $f^{n-1} = 0$ ce qui est absurde.

b. On a la suite d'inclusions strictes $N_0 \subset \cdots \subset N_n$, $\dim(N_0) = 0$ car $f^0 = \text{id}_E$ et $\text{Ker}(\text{id}_E) = \{0_E\}$, et qu'on augmente au moins de une unité la dimension des sous-espaces à chaque étape, on a $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\dim(N_k) \geqslant k$. Mais comme $f^n = 0$, $\text{Ker}(f^n) = E$ donc $\dim(N_n) = n$ et les inégalités précédentes doivent être des égalités (on augmente exactement de 1 la dimension à chaque étape) : $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\dim(N_k) = k$.

Par le théorème du rang : $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\dim(I_k) = \dim(\text{Im}\,(f^k)) = n - \dim(N_k) = n - k$.

Pour $k \in [\![0;n]\!]$, comme $f^n = f^k \circ f^{n-k} = 0$ on a $I_{n-k} \subset N_k$ or $\dim(I_{n-k}) = k = \dim(N_k)$ donc $I_{n-k} = N_k$.
c. Si F est un sous-espace stable de dimension k. Supposons que $f^k \neq 0$, alors il existe un vecteur $x \in F$ tel que $f^k(x) \neq 0_E$. Notons $p \in [\![k;n-1]\!]$ le plus grand entier tel que $f^p(x) \neq 0_E$. Considérons alors la famille $\mathcal{F} = (x, f(x), \cdots, f^k(x))$. On montre classiquement que cette famille est libre :
Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^{k+1}$ tel que $\lambda_0 x + \cdots + \lambda_k f^k(x) = 0_E$, on applique f^{p-1} et on obtient : $\lambda_0 f^p(x) = 0_E$ donc $\lambda_0 = 0$. On recommence pour avoir : $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0$ ce qui fait une famille libre $\mathcal{F}$ de $k+1$ vecteurs dans un espace de dimension k : absurde. Ainsi $f^k = 0$ donc $F \subset N_k$ et comme $\dim(N_k) = k$: $F = N_k$.
Les sous-espaces stables par f sont donc les $n+1$ sous-espaces $N_0 = \{0_E\}$, N_1, ..., $N_n = E$.
d. On a $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \dim(N_k) = k$ et $\forall k \geqslant n,\ N_k = E$ donc les couples $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $N_i = N_j$ sont les couples (i,i) avec $i \in \mathbb{N}$ (c'est clair) et les couples (i,j) tels que $i \geqslant n$ et $j \geqslant n$.

2.100 **a.** L'application $(M,N) \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^tMN)$ est symétrique car $(M|N) = \mathrm{Tr}\,({}^tMN) = \mathrm{Tr}\,({}^tNM) = (N|M)$ en passant à la transposée, bilinéaire par linéarité de la transposée et de la trace, définie positive car on a la relation classique $(M|M) = \mathrm{Tr}\,({}^tMM) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2$. C'est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b. Si une matrice A convient, en prenant $M = E_{i,j}$, on trouve que $\varphi(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}\,(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.
Réciproquement, si $A = \Big(\varphi(E_{j,i})\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a par linéarité de φ : $\varphi(M) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}\varphi(E_{i,j}) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}m_{i,j} = \mathrm{Tr}\,(AM)$.
On peut aussi invoquer le théorème de représentation (des formes linéaires dans un espace euclidien) qui dit qu'il existe une unique $B = {}^tA$, telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = (B|M) = \mathrm{Tr}\,({}^t({}^tA)M) = \mathrm{Tr}\,(AM)$.
On a donc montré l'existence et l'unicité d'une telle matrice A telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(AM)$.
c. Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, comme $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,i}E_{i,j}) = \varphi(E_{i,j}E_{i,i}) = 0$, on a $a_{j,i} = 0$. Ainsi, A est diagonale. De plus : $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{i,j}E_{j,i}) = \varphi(E_{j,i}E_{i,j}) = \varphi(E_{j,j})$ donc $a_{i,i} = a_{j,j}$. On en déduit que $A = a_{1,1}I_n$ est scalaire (matrice d'homothétie) donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(R),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(\lambda I_n M) = \lambda \mathrm{Tr}\,(M)$ donc $\varphi = \lambda \mathrm{Tr}$. De plus, puisque $\mathrm{Tr}\,(I_n) = n \neq 0$, ce scalaire λ est unique.
d. Posons $\varphi : u \mapsto \mathrm{Tr}\,(\Psi(u))$. Alors φ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ par linéarité de Ψ et de la trace. De plus, par l'hypothèse faite sur Ψ, on a pour $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$:
$\varphi(u \circ v) = \mathrm{Tr}\,(\Psi(u \circ v)) = \mathrm{Tr}\,(\Psi(u) \circ \Psi(v)) = \mathrm{Tr}\,(\Psi(v) \circ \Psi(u)) = \mathrm{Tr}\,(\Psi(v \circ u)) = \varphi(v \circ u)$
car on sait que $\mathrm{Tr}\,(f \circ g) = \mathrm{Tr}\,(g \circ f)$. D'après ce qui précède (en version matricielle), il existe λ tel que $\varphi = \lambda \mathrm{Tr}$ mais comme $\varphi(\mathrm{id}_E) = n$ par hypothèse, on a $\lambda = 1$ donc $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \mathrm{Tr}\,(\Psi(u)) = \mathrm{Tr}\,(u)$.
Ψ conserve la trace ! Des applications Ψ vérifiant cette propriété sont les $\Psi : u \mapsto g^{-1} \circ u \circ g$ avec $g \in GL(E)$.

2.101 Tout d'abord si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une solution de (S), $u \circ f = v$ donc $\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Im}\,(u \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(u)$.

- Par conséquent, si $\mathrm{Im}\,(v) \not\subset \mathrm{Im}\,(u)$, il n'y a aucune solution à cette équation.
- Par contre, si $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Im}\,(u)$, soit S un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(u)$, on sait d'après le théorème du rang que u induit un isomorphisme, noté w, de S dans $\mathrm{Im}\,(u)$. Soit $f_0 : E \to E$ défini par $\forall x \in E,\ f_0(x) = w^{-1} \circ v(x)$. f_0 est bien défini car w^{-1} est défini sur $\mathrm{Im}\,(u)$ donc sur $\mathrm{Im}\,(v)$ par inclusion et f_0 est linéaire car w^{-1} et v le sont : ainsi $f_0 \in \mathcal{L}(E)$. Vérifions que f_0 est une solution particulière de l'équation. Soit $x \in E$:
$u \circ f_0(x) = u \circ (w^{-1} \circ v)(x) = u(w^{-1}(v(x))) = w((w^{-1}(v(x)))$ car $w^{-1}(v(x)) \in S$. Comme $w \circ w^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,(u)}$ et que $v(x) \in \mathrm{Im}\,(u)$, on en déduit que $u \circ f_0(x) = v(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a donc $u \circ f_0 = v$.
Cherchons toutes les solutions de cette équation en se ramenant à une équation homogène. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \circ f = v \iff \big(u \circ f = v = u \circ f_0\big) \iff u \circ (f - f_0) = 0 \iff \mathrm{Im}\,(f - f_0) \subset \mathrm{Ker}(u) \iff f - f_0 \in \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}(u))\Big)$.

Les solutions de l'équation sont donc les endomorphismes de la forme $f = f_0 + g$ avec $g \in \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}(u))$. L'ensemble des solutions est donc un sous-espace affine de dimension $\dim(E) \times \dim(\mathrm{Ker}(u))$.

On pouvait aussi raisonner matriciellement par blocs. Soit une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = S \oplus \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathcal{B}'$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\,(u) \oplus S'$ et $\mathcal{B}''$ une base quelconque de E, alors on note $F = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$, $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $u \circ f = v \iff UF = V \iff AC = B \iff C = A^{-1}B$ avec D quelconque. Matriciellement, les solutions de $UF = V$ sont les matrices $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ avec $C = A^{-1}B$ fixée et $D \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où $p = \dim(\mathrm{Ker}(u))$ et $n = \dim(E)$. À nouveau, on en déduit que les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} A^{-1}B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}$ avec $D \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec la même structure de sous-espace affine de dimension $np = \dim(E) \times \dim(\mathrm{Ker}(u))$.

2.102 Comme (I_3, A) est libre et que $A^2 = 0$, on a facilement $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_3, A)$ donc $\dim(\mathbb{R}[A]) = 2$.

En notant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ et $\mathrm{rang}\,(f) = 1$ car $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit (v_1) une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ qu'on complète en une base (v_1, v_2) de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $v_1 \in \mathrm{Im}\,(f)$, on a l'existence de v_3 tel que $v_1 = f(v_3)$. Comme $v_3 \notin \mathrm{Ker}(f)$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice N de f dans cette base est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on a $A = PDP^{-1}$ si P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, si on note $M' = P^{-1}MP$, alors $AM = MA \iff NM' = M'N$. En effectuant le calcul $NM' = M'N$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
Par conséquent : $\dim(C(N)) = 5$ mais l'application $\varphi : M \to PMP^{-1}$ est un isomorphisme de $C(A)$ sur $C(N)$ par l'équivalence ci-dessus. On en déduit que $\dim(C(A)) = 5$.

2.103 **a.** Pour $n \geqslant 3$, en développant par rapport à la première ligne puis le second déterminant obtenu par rapport à la première colonne (puisque $n \geqslant 3$, la plus petite matrice est bien une "vraie" matrice car $n - 2 \geqslant 1$), on obtient classiquement $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ (R). Pour simplifier les calculs à suivre, comme $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$, la relation de récurrence (R) marche pour $n = 2$ si on convient $P_0(x) = 1$.
b. Pour $x \in]-2; 2[$, on pose $\alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in]0; \pi[$ et on a bien $x = 2\cos(\alpha)$.
<u>Initialisation</u> : on a bien $P_0(x) = 1 = \dfrac{\sin((0+1)x)}{\sin(x)}$ et $P_1(x) = x = 2\cos(\alpha) = \dfrac{\sin((1+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.
<u>Hérédité</u> : si on suppose, pour un entier $n \geqslant 2$, que l'on a $P_{n-2}(x) = \dfrac{\sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$ et $P_{n-1}(x) = \dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$ alors $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) = 2\cos(\alpha)\dfrac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} - \dfrac{\sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{2\cos(\alpha)\sin(n\alpha) - \sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$ donc $P_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\alpha) + \sin((n-1)\alpha - \sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.
On conclut par principe de récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$. On pouvait aussi commencer la récurrence aux rangs 1 et 2 (sans convenir que $P_0(x) = 1$) mais il fallait alors montrer, par des formules de trigonométrie, que $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha) - 1\big)$ pour initialiser.

c. Comme $\sin((n+1)\alpha) = 0 \iff (n+1)\alpha \equiv 0\ [\pi]$, on est conduit à considérer $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$ avec $x_k = 2\cos(\alpha_k)$. Alors comme $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \pi$ et que la fonction $\cos$ est injective sur $[0;\pi]$, les $x_1, \cdots, x_n$ sont deux à deux distincts et on a $P_n(x_k) = 0$. De plus, on montre par une récurrence simple ou en constatant que P_n est le polynôme caractéristique de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que P_n est un polynôme unitaire de degré n dont on connaît n racines distinctes. Ainsi, $\forall n \geqslant 1,\ P_n = \prod_{k=1}^{n}\Big(X - 2\cos(\alpha_k)\Big)$.

Comme $P_n = \chi_{A_n}$ est scindé à racines simples, la matrice A_n est diagonalisable.

2.104 **a.** On a par définition $f^0 = \mathrm{id}_E = 0.f + 1.\mathrm{id}_E$ et $f^1 = f = 1.f + 0.\mathrm{id}_E$. Si on suppose l'existence, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, de deux réels a_n et b_n tels que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E$, comme $f^{n+1} = f^n \circ f$, on a la relation $f^{n+1} = f^n \circ f = (a_n f + b_n \mathrm{id}_E) \circ f = a_n f^2 + b_n f = \frac{a_n}{2}\Big(f + \mathrm{id}_E\Big) + b_n f = a_{n+1} f + b_{n+1} \mathrm{id}_E$ si $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$. Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E$.

b. Si on a $f^n = a_n f + b_n \mathrm{id}_E = c_n f + d_n \mathrm{id}_E$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{R}^4$, alors, en soustrayant, on obtient $(a_n - c_n) f + (b_n - d_n)\mathrm{id}_E = 0$ et, comme la famille (f, id_E) est libre car f n'est pas une homothétie, on a $a_n = c_n$ et $b_n = d_n$ donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question **a.** sont uniques.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}$. L'équation caractéristique associée à cette récurrence linéaire double est $2z^2 - z - 1 = 0$ qui admet pour solutions évidentes 1 et $-\frac{1}{2}$. On sait qu'alors, il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha + \beta\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n$. Mais les conditions $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ imposent $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = -\frac{2}{3}$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2}{3}\Big(1 - \big(-\frac{1}{2}\big)^n\Big)$. Comme $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{3}\Big(1 + 2\big(-\frac{1}{2}\big)^n\Big)$ (même si $n = 0$). Par conséquent $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3} = b$.

c. Posons $p = \frac{1}{3}\Big(2f + \mathrm{id}_E\Big)$. On calcule $p \circ p = \frac{1}{9}(4f^2 + 4f + \mathrm{id}_E) = \frac{1}{9}(2f + 2\mathrm{id}_E + 4f + \mathrm{id}_E) = p$ donc p est un projecteur. $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ car $p - \mathrm{id}_E = \frac{2}{3}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}\Big(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}_E\Big)$ donc p est la projection sur $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\Big(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}_E\Big)$. C'est normal en factorisant le polynôme annulateur de f, $f^2 - \frac{1}{2}\Big(f + \mathrm{id}_E\Big) = 0 = (f - \mathrm{id}_E) \circ \Big(f + \frac{1}{2}\mathrm{id}_E\Big) = 0$ (voir plus tard les projecteurs spectraux).

2.105 **a.** Comme $f^3 - \mathrm{id}_E = (f^2 + f + \mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E) = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$ d'après le cours.

b. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, il vient $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ d'après **a.**. Ainsi, $f(x) = x$ et $f^2(x) + f(x) + x = 0$ or $f^2(x) = f(x) = x$ donc $3x = 0_E$ et $x = 0_E$. On en déduit que $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe mais comme, par la formule du rang, on a $n = \dim(\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E))$, on en déduit que $E = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

c. À nouveau (même en dimension infinie) $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$ donc, avec la même méthode que précédemment, $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

Soit $x \in E$ quelconque, on raisonne par analyse / synthèse :

- Si $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $b \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)$, alors $f(a) = a$ et $f^2(b) + f(b) + b = 0_E$. Donc $x = a + b$, $f(x) = a + f(b)$ et $f^2(x) = a + f^2(b)$. On somme : $a = \frac{1}{3}\Big(f^2(x) + f(x) + x\Big)$ et $b = x - a = \frac{1}{3}\Big(2x - f(x) - f^2(x)\Big)$.
- Réciproquement, si $a = \frac{1}{3}\Big(f^2(x) + f(x) + x\Big)$ et $b = \frac{1}{3}\Big(2x - f(x) - f^2(x)\Big)$, $f(a) = a$ (simple calcul car $f^3 = \mathrm{id}_E$)

donc $a \in \mathsf{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et comme $2 - X - X^2 = (X-1)(-2-X)$: $b = (f - \mathrm{id}_E)\Big(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}f(x)\Big) \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)$.

Comme on a clairement $x = a + b$, on conclut que $E = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)) + \mathsf{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

Par conséquent, $E = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ est encore vrai en dimension quelconque si $f^3 = \mathrm{id}_E$.

d. Premièrement, on a vu à la question **b.** que $\mathsf{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E) \cap \mathsf{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$. De plus, comme $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E) \subset \mathsf{Ker}(f^2+f+\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)+\mathsf{Ker}(f-\mathrm{id}_E) = E$, on a aussi $E \subset \mathsf{Ker}(f^2+f+\mathrm{id}_E)+\mathsf{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$ donc $E = \mathsf{Ker}(f^2+f+\mathrm{id}_E) \oplus \mathsf{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. Comme f et $f^2+f+\mathrm{id}_E$ commutent car ce sont tous les deux des polynômes en f, on sait qu'alors $F = \mathsf{Ker}(f^2+f+\mathrm{id}_E)$ est stable par f donc u induit par f sur $\mathsf{Ker}(f^2+f+\mathrm{id}_E)$ est bien défini. Par construction, on a $u^2+u+\mathrm{id}_F = 0$ car $\forall x \in F,\ (u^2+u+\mathrm{id}_F)(x) = f^2(x)+f(x)+x = 0_E$. Ainsi, $u^2 + u + \mathrm{id}_F = \Big(u + \frac{\mathrm{id}_F}{2}\Big)^2 + \frac{3\mathrm{id}_F}{4} = 0$ donc $\Big(u + \frac{\mathrm{id}_F}{2}\Big)^2 = -\frac{3\mathrm{id}_F}{4}$ et $\det\Big(\big(u + \frac{\mathrm{id}_F}{2}\big)^2\Big) = \Big(-\frac{3}{4}\Big)^r$ où $r = \dim(F)$. Comme $\det\Big(\big(u + \frac{\mathrm{id}_F}{2}\big)^2\Big) = \det\Big(u + \frac{\mathrm{id}_F}{2}\Big)^2 \geqslant 0$, $r = \dim(F) = \mathrm{rang}\,(f - \mathrm{id}_E)$ est pair.

2.106 ($\Longrightarrow$) Supposons $\mathrm{rang}\,(AB) = \mathrm{rang}\,(B)$. On a $n - \dim(\mathrm{Ker}\,(AB)) = n - \dim(\mathsf{Ker}(B))$ d'après la formule du rang, donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(AB)) = \dim(\mathsf{Ker}(B))$ alors qu'on sait que $\mathsf{Ker}(B) \subset \mathsf{Ker}(AB)$. On en déduit que $\mathsf{Ker}(B) = \mathsf{Ker}(AB)$. Soit $X \in \mathsf{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}\,(B)$, alors $AX = 0$ et il existe $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = BY$. Ainsi $ABY = 0$, donc $Y \in \mathsf{Ker}(AB) = \mathsf{Ker}(B)$ d'où $BY = X = 0$ et on conclut bien que $\mathsf{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}\,(B) = \{0\}$.
($\Longleftarrow$) Supposons $\mathsf{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}\,(B) = \{0\}$. On sait que $\mathsf{Ker}(B) \subset \mathsf{Ker}(AB)$. Réciproquement, si $Y \in \mathrm{Ker}\,(AB)$, on a $ABY = 0$ ainsi, en posant $X = BY$, on a $X \in \mathsf{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}\,(B) = \{0\}$ donc $X = 0$ et $Y \in \mathrm{Ker}\,(B)$. Ainsi $\mathsf{Ker}(AB) \subset \mathsf{Ker}(B)$ puis $\mathsf{Ker}(AB) = \mathsf{Ker}(B)$ puis $\mathrm{rang}\,(AB) = \mathrm{rang}\,(B)$ par la formule du rang.

2.107 **a.** Comme $f^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathsf{Ker}(f)$ donc $\mathrm{rang}\,(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim(\mathsf{Ker}(f))$. Mais $f \neq 0$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq \{0\}$ d'où $\mathrm{rang}\,(f) \geqslant 1$. D'après la formule du rang, $3 = \mathrm{rang}\,(f) + \dim(\mathsf{Ker}(f))$ donc forcément $\mathrm{rang}\,(f) = 1$ et $\dim(\mathsf{Ker}(f)) = 2$. Soit e_1 un vecteur directeur non nul de $\mathrm{Im}\,(f)$ qui est une droite. Par définition de l'image, il existe un vecteur e_3 tel que $e_1 = f(e_3)$. Comme $e_1 \neq 0_E$, forcément, $e_3 \neq 0_E$. Comme $e_1 \in \mathsf{Ker}(f)$ car $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathsf{Ker}(f)$ et que $\mathsf{Ker}(f)$ est un plan, on peut compléter la famille libre (e_1) de $\mathsf{Ker}(f)$ en une base (e_1, e_2) de $\mathsf{Ker}(f)$ par le théorème de la base incomplète. Comme $f(e_3) = e_1 \neq 0_E$, $e_3 \notin \mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Vect}(e_1, e_2)$ donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est aussi une famille libre de cardinal 3 donc c'est une base de E qui est de dimension 3. Par construction, $f(e_1) = f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = e_1$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. ($\Longleftarrow$) S'il existe $(g, h) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f = h \circ g$ et $g \circ h = 0$. Alors $f^2 = (h \circ g) \circ (h \circ g) = h \circ (g \circ h) \circ g = 0$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $f^2 = 0$. Alors $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathsf{Ker}(f)$. Si g et h vérifient les conditions $f = h \circ g$ et $g \circ h = 0$, on doit avoir $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(h \circ g) \subset \mathrm{Im}\,(h)$, puis $\mathrm{Im}\,(h) \subset \mathsf{Ker}(g)$ car $h \circ g = 0$ et enfin $\mathsf{Ker}(g) \subset \mathsf{Ker}(h \circ g) = \mathsf{Ker}(f)$. C'est-à-dire $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(h) \subset \mathsf{Ker}(g) \subset \mathsf{Ker}(f)$. Soit S un supplémentaire de $\mathsf{Ker}(f)$.
Méthode 1 : quitte à choisir, parce que g et h ne sont pas uniques, on va imposer $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(h)$ et $\mathsf{Ker}(g) = \mathsf{Ker}(f)$. Par exemple posons $h = f$ et g projection sur S parallèlement à $\mathsf{Ker}(f)$.

- Si $x \in S$, $g(x) = x$ donc $h(g(x)) = h(x) = f(x)$ et $g(h(x)) = 0$ car $h(x) \in \mathrm{Im}\,(h) \subset \mathsf{Ker}(g)$.
- Si $x \in \mathsf{Ker}(f)$, $g(x) = 0_E$ donc $h(g(x)) = h(0_E) = 0_E = f(x)$ et $g(h(x)) = 0$ car $h(x) = f(x) \in \mathrm{Im}\,(h) \subset \mathsf{Ker}(g)$.

Comme f et $h \circ g$ (resp. $g \circ h$ et 0) coïncident sur S et $\mathsf{Ker}(f)$ et que $E = S \oplus \mathsf{Ker}(f)$, on a $f = h \circ g$ et $g \circ h = 0$.
Méthode 2 : comme f induit un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}\,(f)$ par le théorème du rang, si on prend une base

$(e_1, \cdots, e_r)$ de S, alors $(f(e_1), \cdots, f(e_r))$ en est une de $\mathrm{Im}\,(f)$. On peut ensuite compléter cette dernière famille libre de $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ en une base $(f(e_1), \cdots, f(e_r), v_1, \cdots, v_p)$ de $\mathrm{Ker}(f)$ de sorte que, comme $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus S$, la famille $\mathcal{B} = (f(e_1), \cdots, f(e_r), v_1, \cdots, v_p, e_1, \cdots, e_r)$ est une base de E (dite adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus S' \oplus S$ en posant $S' = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$). Par construction de cette base, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ s'écrit par blocs $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_r & 0_{r,p} & I_r \\ 0_{p,r} & 0_p & 0_{p,r} \\ 0_r & 0_{r,p} & 0_r \end{pmatrix}$ qui ressemble fortement (mais par blocs), à la matrice $E_{1,3}$ de la question **a.**. On peut donc chercher g et h sous forme matricielle. Mais comme $E_{1,3} = E_{1,3}E_{3,3}$ et $E_{3,3}E_{1,3} = 0$, par analogie, si h et g sont les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0_r & 0_{r,p} & 0_r \\ 0_{p,r} & 0_p & 0_{p,r} \\ 0_r & 0_{r,p} & I_r \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 0_r & 0_{r,p} & I_r \\ 0_{p,r} & 0_p & 0_{p,r} \\ 0_r & 0_{r,p} & 0_r \end{pmatrix}$, on a bien, par produit par blocs, $f = h \circ g$ et $g \circ h = 0$ ... et le choix effectué redonne $h = f$ et g la projection sur S parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

2.108 **a.** Il y a deux cas :

- si $\varphi = 0$ alors $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n^2$ car $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- si $\varphi \neq 0$, comme φ est une forme linéaire non nulle, φ est surjective et on sait d'après le cours que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n^2 - 1$.

b. <u>Méthode 1</u> : soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $\varphi(M) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}\varphi(E_{i,j})$ par linéarité de φ. Si on définit $N = \big(\varphi(E_{i,j})\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \big(n_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $\mathrm{Tr}\,(N^T M) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} n_{i,j}m_{i,j} = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}\varphi(E_{i,j}) = \varphi(M)$. Si $N' = \big(n'_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ convenait aussi, on aurait $n_{i,j} = \varphi(E_{i,j}) = \mathrm{Tr}\,(N'^T E_{i,j}) = n'_{i,j}$ donc $N = N'$. On a bien existence et unicité de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(N^T M)$ et $N = \big(\varphi(E_{i,j})\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

<u>Méthode 2</u> : comme $(M|N) = \mathrm{Tr}\,(N^T M)$ définit classiquement un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que φ est une forme linéaire, il existe, par le théorème de représentation, un unique vecteur $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = (N|M) = \mathrm{Tr}\,(N^T M)$ (voir formes linéaires dans espaces euclidiens). C'est plus rapide mais ça ne donne pas N en fonction de φ.

c. Si A et B sont semblables, il existe par définition $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors, par propriété de la trace, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,((PB)P^{-1}) = \mathrm{Tr}\,(P^{-1}(PB)) = \mathrm{Tr}\,((P^{-1}P)B) = \mathrm{Tr}\,(B)$.

d. <u>Méthode 1</u> : l'indication de l'énoncé nous amène à montrer que N commute avec toutes les matrices inversibles. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors l'hypothèse de l'énoncé donne $\varphi(P^{-1}MP) = \varphi(M)$ donc par $\mathrm{Tr}\,(N^T P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}\,((PN^T P^{-1})M) = \mathrm{Tr}\,(N^T M)$. Avec la notation produit scalaire, cela donne la relation $(P^T N(P^{-1})^T|M) = (N|M)$. Comme ceci est vrai pour toute matrice M, on en déduit que $U = P^T N(P^T)^{-1}) - N$ est orthogonal à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cette matrice U est donc nulle donc $U = P^T N(P^T)^{-1}) - N = 0$ et on a donc $P^T N = NP^T$ pour toute matrice inversible P. Alors $NQ = QN$ pour toute matrice inversible Q (toute matrice inversible Q est la transposée d'une autre matrice inversible, en effet, $Q = (Q^T)^T$ et Q^T est inversible si Q l'est). D'après l'énoncé, N est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $N = \lambda I_n$, et on conclut que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(\lambda I_n M) = \lambda \mathrm{Tr}\,(M)$ donc $\varphi = \lambda \mathrm{Tr}$.

<u>Méthode 2</u> : soit $i \in [\![2; n]\!]$ et $P = I_{1,i}$ (matrice d'interversion), alors $E_{1,1} = PE_{i,i}P^{-1}$ donc, $\varphi(E_{1,1}) = \varphi(E_{i,i})$ par hypothèse. Soit donc $\lambda = \varphi(E_{1,1})$ de sorte que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ \varphi(E_{k,k}) = \lambda$. Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j$,

alors $E_{i,j} = D_i(-1)(-E_{i,j})D_i(-1)^{-1}$ donc $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(-E_{i,j})$ ce qui prouve que $n_{i,j} = \varphi(E_{i,j}) = 0$.

Par conséquent, $N = \lambda I_n$ et on a alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \text{Tr}\,(\lambda M) = \lambda \text{Tr}\,(M)$ donc $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

e. Soit M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toutes les matrices inversibles. Alors, pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]$:

- si $i \neq j$, $T_{i,j}(1) = I_n + E_{i,j}$ est une matrice de transvection inversible donc, par hypothèse, on a $MT_{i,j}(1) = M + E_{i,j}M = E_{i,j}M + M = T_{i,j}(1)M$ ce qui se simplifie en $E_{i,j}M = ME_{i,j}$.
- si $i = j$, $D_i(2) = I_n + E_{i,i}$ est une matrice de dilatation inversible donc, par hypothèse, il vient $MD_i(2) = M + E_{i,i}M = E_{i,i}M + M = D_i(2)M$ donc $E_{i,i}M = ME_{i,i}$.

Ainsi M commute donc avec toutes les matrices $E_{i,j}$ donc avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par linéarité.

• Pour $i = j$, en écrivant les produits $E_{i,i}M$ et $ME_{i,i}$, on constate que sur la ligne i et la colonne i, le seul terme éventuellement non nul est $m_{i,i}$. La matrice M est donc diagonale.

• Pour $i \neq j$, en écrivant $E_{i,j}M$ et $ME_{i,j}$, on constate que $m_{i,i} = m_{j,j}$. Les termes de la diagonale sont égaux. Enfin, M est bien une matrice scalaire puisqu'elle vaut $M = m_{1,1}I_n$.

2.109 **a.** Il est clair que si $(a_0, \ldots, a_n)$ ne sont pas deux à deux distincts, alors la famille A contient deux fois le même vecteur, elle ne peut pas être libre. Réciproquement, si $(a_0, \ldots, a_n)$ sont deux à deux distincts, considérons $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X - a_k)^n = 0$. Alors en inversant les sommes doubles avec le binôme de Newton, on a $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Big(\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} a_k^m X^{n-m} \Big) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \Big(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^m \Big) X^{n-m} = 0$. On obtient donc un système linéaire à $n+1$ équations $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k = \cdots = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^n$ et à $n+1$ inconnues $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ sans second membre dont la matrice associée est $M = \big(a_j^i\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. On reconnaît une matrice de Vandermonde dont le déterminant vaut $\det(M) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \neq 0$ donc le système est de Cramer et ne possède comme unique solution que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

La famille A est donc libre et, comme elle contient $n+1$ vecteurs et que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, A est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On a bien l'équivalence : A est une base de $\mathbb{K}_n[X] \iff (a_0, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts.

b. En reprenant cet argument, le rang r de A est le nombre de termes distincts de la famille $(a_0, \ldots, a_n)$ car en supposant (quitte à renuméroter) que les termes distincts sont $a_0, \ldots, a_{r-1}$, on peut ne conserver que les équations $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k a_k^m$ pour $m \in [\![0; r-1]\!]$ et on conclut encore que $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k (X - a_k)^n = 0$ implique $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{r-1} = 0$ donc la famille $(A_0, \ldots, A_{r-1})$ est libre et les polynômes $A_r, \ldots, A_n$ en font déjà partie.

2.110 Avec $\sin(x+a) = \cos(a)\sin(x) + \sin(a)\cos(x)$, on a $(f_1, f_2, f_3) \in (\text{Vect}(\sin, \cos))^3$ donc rang $(f_1, f_2, f_3) \leqslant 2$. Comme $\sin$ et $\cos$ sont non colinéaires, $(\sin, \cos)$ est une base du plan $\text{Vect}(\sin, \cos)$. La matrice de (f_1, f_2) dans cette base est $\begin{pmatrix} \cos(a_1) & \cos(a_2) \\ \sin(a_1) & \sin(a_2) \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut $\sin(a_2 - a_1)$.

Ainsi, rang $(f_1, f_2) = 2 \iff \sin(a_2 - a_1) \neq 0 \iff a_2 \not\equiv a_1\ [\pi]$.

Comme les fonctions f_1, f_2, f_3 ne sont pas nulles, on a $1 \leqslant$ rang $(f_1, f_2, f_3) \leqslant 2$.

Conclusion : rang $(f_1, f_2, f_3) = 1 \iff a_1 \equiv a_2 \equiv a_3\ [\pi]$ et rang $(f_1, f_2, f_3) = 2$ dans tous les autres cas.

2.111 Par le binôme de Newton, il vient $M = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_i^k b_j^{n-k} \Big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et on reconnaît un produit matriciel $M = AB$ avec $A = \big(a_i^k\big)_{0 \leqslant i,k \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B = \Big(\binom{n}{k} b_j^{n-k} \Big)_{0 \leqslant k,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. La matrice A est une matrice de VANDERMONDE et on a donc $\det(A) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$ d'après le cours. Par multilinéarité par rapport aux lignes de B, on a $\det(B) = \Big(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big)\det(C)$ où $C = \big(b_j^{n-k}\big)_{0\leqslant k,j\leqslant n}$. Or la matrice C est quasiment une matrice de VANDERMONDE, il suffit de mettre les lignes dans le bon ordre : cela se fait en intervertissant les lignes L_1 et L_{n+1}, L_2 et L_n, etc... Il faut donc $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2}\right\rfloor$ interversions de lignes pour transformer C en une vraie matrice de VANDERMONDE : $\det(B) = (-1)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\Big(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big)\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(b_j - b_i)$.

Par propriété du déterminant, $\det(M) = \det(A)\det(B) = (-1)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\Big(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big)\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(b_j - b_i)(a_j - a_i)$.

2.112 L'ensemble $E_{n,m}$ n'est pas vide car il contient le polynôme nul. De plus, si $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ et $(P,Q)\in E_{n,m}^2$, alors $\forall k\in[\![0;m]\!]$, $(\alpha P+\beta Q)(a_k) = \alpha P(a_k)+\beta Q(a_k) = \alpha.0+\beta.0 = 0$ donc $\alpha P+\beta Q\in E_{n,m}$. Ainsi, $E_{n,m}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ donc c'est un espace vectoriel.

On constate d'abord que puisque les $a_0,\cdots,a_m$ sont distincts, si $P\in\mathbb{K}_n[X]$ on peut traduire d'après le cours $P\in E_{n,m}$ par $R = \prod_{k=0}^{m}(X-a_k)\mid P$ (R divise P). Il convient donc de considérer deux cas :

• Si $m\geqslant n$ et $P\in E_{n,m}$, $\deg(P)\leqslant n$ alors que P a au moins $m+1\geqslant n+1$ racines distinctes, $a_0,\cdots,a_m$, donc $P=0$. Ainsi $E_{n,m}=\{0\}$.

• Si $m<n$ et si $P\in E_{n,m}$, alors R divise P. Comme R est de degré $m+1$, il existe $U\in\mathbb{K}_{n-m-1}[X]$ tel que $P=UR$. Mais en écrivant $U=\sum_{k=0}^{n-m-1}u_kX^k$, on a $P=\sum_{k=0}^{n-m-1}u_kX^kR$ et $P\in\mathrm{Vect}(R,XR,\cdots,X^{n-m+1}R)$. Ceci prouve que la famille $(X^kR)_{0\leqslant k\leqslant n-m-1}$ est génératrice de $E_{n,m}$. Comme c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés, elle est aussi libre. Par conséquent $\mathcal{B}$ est une base de $E_{n,m}$ et $\dim(E_{n,m}) = n-m$.

2.113 **a.** Comme $\sigma^2 = -\mathrm{id}_E$ et $\dim(E)=n$, $\det(\sigma)^2 = \det(\sigma^2) = \det(-\mathrm{id}_E) = (-1)^n\geqslant 0$ donc n est pair.

b. Supposons que $p\geqslant 1$, alors :

• il existe $v_1\neq 0_E$, soit $(a_1,b_1)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a_1v_1+b_1\sigma(v_1)=0_E$ (1), alors on compose par σ et il,vient $a_1\sigma(v_1)-b_1v_1=0_E$ (2). On effectue $a_1(1)-b_1(2)$: $(a_1^2+b_1^2)v_1=0_E$ donc $a_1^2+b_1^2=0\Longrightarrow a_1=b_1=0$. Ainsi $(v_1,\sigma(v_1))$ est libre. Si $p=1$ alors $(v_1,\sigma(v_1))$ est une base de E sinon...

• il existe $v_2\notin\mathrm{Vect}(v_1,\sigma(v_1))$, soit $(a_1,a_2,b_1,b_2)\in\mathbb{R}^4$ tel que $a_1v_1+a_2v_2+b_1\sigma(v_1)+b_2\sigma(v_2)=0_E$ (1), alors on compose par σ et $a_1\sigma(v_1)+a_2\sigma(v_2)-b_1v_1-b_2v_2=0_E(2)$. On effectue $a_2(1)-b_2(2)$ et il vient $(a_1a_2+b_1b_2)v_1+(a_2^2+b_2^2)v_2+(a_2b_1-a_1b_2)\sigma(v_1)=0_E$. Or la famille $(v_1,v_2,\sigma(v_1))$ est libre par construction donc $a_2^2+b_2^2=0\Longrightarrow a_2=b_2=0$ et on obtient $a_1v_1+b_1\sigma(v_1)=0_E\Longrightarrow a_1=b_1=0$ car $(v_1,\sigma(v_1))$ est libre. Ainsi $(v_1,,v_2,\sigma(v_1),\sigma(v_2))$ est libre. Si $p=2$ alors $(v_1,v_2,\sigma(v_1),\sigma(v_2))$ est une base de E sinon...

Par récurrence, on construit pour tout $k\in[\![1;p]\!]$ une famille libre $(v_1,\cdots,v_k,\sigma(v_1),\cdots,\sigma(v_k))$. Pour $k=p$, la famille $\mathcal{B}=(v_1,\cdots,v_p,\sigma(v_1),\cdots,\sigma(v_p))$ est libre et admet $2p$ vecteurs alors que $\dim(E)=2p$, ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E. Par construction, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0\end{pmatrix}$.

2.114 On effectue d'abord l'opération de GAUSS $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2 + C_3 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n$ de sorte que l'on a
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & a_2+a_3 & \cdots & a_n+a_1 \\ 0 & a_2^2+a_3^2 & \cdots & a_n^2+a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n+a_3^n & \cdots & a_n^n+a_1^n \end{vmatrix} = 0 \text{ si } n \text{ est pair, } \Delta_n = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & \cdots & a_n+a_1 \\ 2a_1^2 & a_2^2+a_3^2 & \cdots & a_n^2+a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_1^n & a_2^n+a_3^n & \cdots & a_n^n+a_1^n \end{vmatrix} \text{ si } n \text{ est impair.}$$
Si n est impair, on factorise ensuite le 2 et on effectue dans l'ordre $C_n \longleftarrow C_n - C_1$, $C_{n-1} \longleftarrow C_{n-1} - C_n$, jusqu'à $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3$ pour obtenir $\Delta_n = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 2a_1\cdots a_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.
On reconnaît enfin un déterminant de VANDERMONDE et on conclut que $\Delta_n = 2\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\Big)$.

2.115 **a.** L'application nulle 0 vérifie $F \subset \text{Ker}(0) = E$ et $\{0_{E'}\} = \text{Im}(0) \subset F'$ donc $0 \in A$ qui est donc non vide.

Si u et v sont dans A et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, comme $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u+\lambda v)$, on a $F \subset \text{Ker}(u+\lambda v)$ car $F = F \cap F \subset \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$ par hypothèse. De plus, comme $\text{Im}(u+\lambda v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$, on a aussi $\text{Im}(u+\lambda v) \subset F'$ car $\text{Im}(u)+\text{Im}(v) \subset F'+F' = F'$ par hypothèse. Ainsi, A est stable par combinaison linéaire. Enfin, A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,E')$ donc a fortiori un espace vectoriel.

b. On sait que si E et E' sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,E')$ aussi avec $\dim(\mathcal{L}(E,E')) = \dim(E) \times \dim(E')$. Comme A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,E')$, il est lui-même de dimension finie.

Notons $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $m = \dim(E')$ et $q = \dim(F')$. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p,e_{p+1},\ldots,e_n)$ de E telle que $F = \text{Vect}(e_1,\cdots,e_p)$. Il existe aussi une base $\mathcal{B}' = (e'_1,\ldots,e'_q,e'_{q+1},\ldots,e'_m)$ de E' telle que $F' = \text{Vect}(e'_1,\ldots,e'_q)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,E')$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$. Alors $u \in A$ si et seulement si les p premières colonnes de A sont nulles (qui traduit $F \subset \text{Ker}(u)$) et si les $m-q$ dernières lignes de M sont nulles (qui traduit $\text{Im}(u) \subset F'$). Par conséquent $u \in A \iff M$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K})$. Ceci construit un isomorphisme φ entre A et $\mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(u) = N$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $\dim(A) = q(n-p) = \dim(F)(\dim(E') - \dim(F))$. Montrons-le rigoureusement !

- Si $(u,v) \in A^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u+\lambda v \in A$ et, d'après ce qui précède, il existe $(N,N') \in \mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K})^2$ telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 0 & N' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u+\lambda v) = \begin{pmatrix} 0 & N+\lambda N' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\varphi(u+\lambda v) = N + \lambda N' = \varphi(u) + \lambda\varphi(v)$. Ceci établit la linéarité de φ.
- De plus, si $u \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $u \in A$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $u = 0$. Ainsi, φ est injective.
- Enfin, soit $N \in \mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K})$ quelconque, soit u l'unique application linéaire de E dans E' telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les trois blocs de 0 montrent que $F \subset \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u) \subset F'$ donc $u \in A$, qui est donc un antécédent de N par φ : φ est surjective. φ est bien un isomorphisme donc il conserve les dimensions et on conclut bien que $\dim(A) = \dim(\mathcal{M}_{q,n-p}(\mathbb{K})) = q(n-p) = \dim(F)(\dim(E') - \dim(F'))$.

2.116 **a.** D'abord, u est clairement linéaire et $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = \dim(\mathbb{C}^{n+1}) = n+1$. Soit $P \in \text{Ker}(u)$, il vient alors $\forall k \in [\![0;n]\!],\ P(\omega^k) = 0$ donc P possède $n+1$ racines (les $n+1$ éléments de $\mathbb{U}_{n+1}$) alors que $\deg(P) \leqslant n$. On en déduit que $P = 0$. Ainsi u est injective donc u est un isomorphisme avec l'égalité des dimensions.

b. La matrice de u dans les bases canoniques $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$ et $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ est par construction la matrice de VANDERMONDE $M = V(1, \omega, \dots, \omega^n)$ définie par $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $m_{i,j} = \omega^{ij}$. On retrouve le fait que u est un isomorphisme car $\det(M) = \prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (\omega^j - \omega^i) \neq 0$ car les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité forment $n+1$ complexes distincts.

c. Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $k \in [\![0; n]\!]$. Ainsi, $\sum\limits_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km} = \sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \omega^{mi}\omega^{-km} = \sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \omega^{m(i-k)}$.

On peut inverser cette somme double et avoir $\sum\limits_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km} = \sum\limits_{i=0}^{n}\Big(\sum\limits_{m=0}^{n} \omega^{m(i-k)}\Big)a_i = (n+1)a_k$.

En effet, si $i \neq k$, on a $\omega^{i-k} \neq 1$ donc $\sum\limits_{m=0}^{n} \omega^{m(i-k)} = \dfrac{1 - \omega^{(i-k)(n+1)}}{1 - \omega^{i-k}} = 0$ car $\omega^{n+1} = 1$ et, si $i = k$, comme $\forall m \in [\![0; n]\!]$, $\omega^{m(i-k)} = \omega^0 = 1$, on a $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \omega^{m(i-k)} = n+1$. Pour $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in E$, on a donc $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{m=0}^{n} P(\omega^m)\omega^{-km}\Big)X^k = u^{-1}(u(P)) = u^{-1}(P(1), P(\omega), \cdots, P(\omega^n))$. Ainsi, pour une famille $(z_0, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, par surjectivité de u, on a $u^{-1}(z_0, \cdots, z_n) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{m=0}^{n} z_m \omega^{-km}\Big)X^k$ ce qui se traduit par le fait que la matrice de u^{-1} dans les bases canoniques est $M^{-1} = \dfrac{1}{n+1}(\omega^{-ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2.117 • $\dbinom{2n}{n}$ est le coefficient en X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n}$ par le binôme de NEWTON.

Mais comme $(1+X)^{2n} = (1+X)^n \times (1+X)^n = \Big(\sum\limits_{i=0}^{n}\dbinom{n}{i}X^i\Big) \times \Big(\sum\limits_{j=0}^{n}\dbinom{n}{j}X^j\Big)$, le terme en X^n vaut aussi $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=n}} \dbinom{n}{i}\dbinom{n}{j} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\dbinom{n}{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^2$. En identifiant, on a bien $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^2 = \dbinom{2n}{n}$.

• On peut aussi considérer une classe avec n filles et n garçons et compter combien il y a de groupes de n étudiants dans cette classe. Il y en a bien sûr $\dbinom{2n}{n}$. Mais si on distingue selon le nombre k de filles (donc $n-k$ garçons), il y en a aussi $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\dbinom{n}{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^2$ et on retrouve la formule.

Pour $n \geqslant 1$, on a $\dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. Ceci nous permet d'effectuer une récurrence.

Pour $n = 1$, on a bien $\dbinom{2n}{n} = 2 \geqslant 2 = \dfrac{2^{2n}}{n+1}$. Soit $n \geqslant 1$ pour lequel on a $\dbinom{2n}{n} \geqslant \dfrac{2^{2n}}{n+1}$, alors

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2(2n+1)}{n+1} \times \frac{2^{2n}}{n+1} > \frac{2^{2n+2}}{n+2}$$

car $\dfrac{2(2n+1)}{(n+1)^2} > \dfrac{4}{n+2}$ puisque $2(2n+1)(n+2) = 4n^2 + 10n + 4 > 4n^2 + 8n + 4 = 4(n+1)^2$. On conclut par principe de récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $\dbinom{2n}{n} \geqslant \dfrac{2^{2n}}{n+1}$ avec inégalité stricte dès que $n \geqslant 2$. Ainsi il n'y a égalité que pour $n = 1$ comme vu lors de l'initialisation. Grâce à STIRLING, $\dbinom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}\,2^{2n} n^{2n} e^{2n}}{(2\pi n) n^{2n} e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}\,2^{2n}$.

2.118 **a.** Si u est injectif, alors $u \in GL(E)$ car E est de dimension finie donc u^m est aussi un automorphisme de E. Comme u^m est à fois injectif et surjectif, on a donc $K_m = \text{Ker}(u^m) = \{0_E\}$ et $I_m = \text{Im}\,(u^m) = E$.

b. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $x \in K_m$, alors $u^m(x) = 0_E$ donc $u^{m+1}(x) = u(u^m(x)) = u(0_E) = 0_E$. Ainsi, $K_m \subset K_{m+1}$.

Si $y \in I_{m+1}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{m+1}(x)$ donc $y = u(u^m(x)) \in I_m$. Alors, $I_{m+1} \subset I_m$.

c. Si la suite $(K_m)_{0 \leqslant p \leqslant n+1}$ était strictement croissante, on aurait $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \dim(K_{m+1}) \geqslant \dim(K_m) + 1$ ce qui impliquerait $\dim(K_{n+1}) = \dim(K_0) + \sum\limits_{m=0}^{n} \big(\dim(K_{m+1}) - \dim(K_m)\big) \geqslant n+1$ ce qui est impossible car $K_{n+1} \subset E$ et que $\dim(E) = n$. Par l'absurde, il existe donc un entier $p \in [\![0;n]\!]$ tel que $K_p = K_{p+1}$. Par la formule du rang, on a $\dim(I_{p+1}) = n - \dim(K_{p+1}) = n - \dim(K_p) = \dim(I_p)$ alors que $I_{p+1} \subset I_p$. On en conclut, par inclusion et égalité des dimensions, que $I_{p+1} = I_p$.

L'égalité $K_p = K_{p+q}$ est vraie pour $q = 0$ et $q = 1$. Soit $q \geqslant 1$ tel que $K_{p+q} = K_p$, alors on sait déjà que $K_p = K_{p+q} \subset K_{p+q+1}$. Réciproquement, si $x \in K_{p+q+1}$, on a $u^{p+q+1}(x) = 0_E = u^{p+1}(u^q(x))$ donc $u^q(x) \in K_{p+1} = K_p$ donc $u^p(u^q(x)) = 0_E$ et $x \in K_{p+q} = K_p$. Par double inclusion, on a donc $K_p = K_{p+q+1}$. On conclut par principe de récurrence que $\forall q \in \mathbb{N},\ K_p = K_{p+q}$.

Comme à la question précédente, on déduit de la formule du rang que $\forall q \in \mathbb{N},\ I_{p+q} = I_p$.

Soit $x \in K_p \oplus I_p$. Alors $u^p(x) = 0_E$ et $\exists a \in E,\ x = u^p(a)$ donc $u^{2p}(a) = 0_E$. Mais comme $K_{2p} = K_p$, il vient $u^p(a) = x = 0_E$ donc K_p et I_p sont en somme directe.

Par la formule du rang, on a $\dim(K_p) + \dim(I_p) = \dim(E)$, et on en conclut que $K_p \oplus I_p = E$.

2.119 Avec les opérations de Gauss (dans cet ordre) $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2$, $C_2 \longleftarrow C_2 - C_3, \cdots, C_{n-1} \longleftarrow C_{n-1} - C_n$, on obtient

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & & & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 2n-1 \\ n+1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2n-1 & 2n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2n-4 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2n-1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2n \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on effectue $L_n \longleftarrow L_n - L_{n-1}$, $L_{n-1} \longleftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \cdots, L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ pour avoir $\det(A)$ comme le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure et $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{n-1} (-(2k-1)) = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^n\, n!}$.

2.120 **a.** Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos((2n+1)t) = \mathrm{Re}\left((\cos t + i \sin t)^{2n+1}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\cos t)^{2n+1-k} (i \sin t)^k\right)$ grâce à la relation de de Moivre. Pour la partie réelle, on ne garde que les k pairs et on obtient la relation $\cos((2n+1)t) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} (\cos t)^{2n+1-2k} (\sin t)^{2k}$ car $i^{2k} = (-1)^k$. Comme $\cos^{2n+1} t > 0$, on peut diviser et avoir $\dfrac{\cos((2n+1)t)}{\cos^{2n+1} t} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} \dfrac{\sin^{2k} t}{\cos^{2k} t} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} (\tan^2 t)^k$. Il suffit donc de poser $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} X^k$ et on a bien la relation voulue. Si un autre polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ Q_n(\tan^2 t) = \dfrac{\cos((2n+1)t)}{\cos^{2n+1} t}$, alors on a $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ P_n(\tan^2 t) = Q_n(\tan^2 t)$ donc P_n et Q_n coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est infini donc ces deux polynômes sont formellement égaux.

D'où l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ P_n(\tan^2 t) = \dfrac{\cos((2n+1)t)}{\cos^{2n+1} t}$ et on a $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} X^k$ de degré n et de coefficient dominant $a_n = (-1)^n (2n+1)$.

b. Pour $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $P_n(\tan^2 t) = 0 \Longleftrightarrow \cos((2n+1)t) = 0 \Longleftrightarrow (2n+1)t \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow t \equiv \dfrac{\pi}{2(2n+1)} \left[\dfrac{\pi}{2n+1}\right]$.

Ainsi, en notant $t_k = \dfrac{\pi}{2(2n+1)} + \dfrac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a $0 < t_0 < \cdots < t_{n-1} < \frac{\pi}{2}$ et les réels $\tan^2(t_k)$ sont des racines de P_n. D'après le cours, la somme des racines de P_n vaut $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ donc, après simplification : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \tan^2(t_k) = -\dfrac{(-1)^{n-1}\dbinom{2n+1}{2n-2}}{(-1)^n(2n+1)} = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

c. Comme on sait que $\tan(\frac{\pi}{2} - t) = \dfrac{1}{\tan(t)}$, la double inégalité de l'énoncé est équivalente à la suivante : $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\tan^2 t} < \dfrac{1}{t^2} < 1 + \dfrac{1}{\tan^2 t} = \dfrac{1}{\sin^2 t}$. Comme t, $\tan(t)$ et $\sin(t)$ sont positifs sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, il suffit de démontrer que $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(t) < t < \tan(t)$ ce qui est évident par deux petites études de fonctions ou par le théorème des accroissements finis appliqué à $\sin$ et $\tan$ entre 0 et $t > 0$.

d. Pour $n \geqslant 1$, remplaçons t par $t_k \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (pour $k \in [\![0;n-1]\!]$) dans l'inégalité précédente et sommons : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \tan^2(t_k) < \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(2n+1)^2}{(n-k)^2\pi^2} < \sum\limits_{k=0}^{n-1} (1 + \tan^2(t_k))$. On pose $j = n - k$ et, grâce à la question **b.** : $\dfrac{n(2n-1)}{3} < \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j^2} < \dfrac{2n(n+1)}{3}$ ce qui revient à $\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} < \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j^2} < \dfrac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ donc, par encadrement : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

2.121 **a.** Procédons par récurrence sur n. Si $n = 1$, $P = X - a_0$ admet exactement une seule racine réelle positive, à savoir a_0. Ainsi P admet au plus une racine sur $\mathbb{R}_+^*$: une exactement si $a_0 > 0$ et aucune si $a_0 = 0$.

Soit $n \geqslant 2$, supposons donc que tout $Q = X^{n-1} - b_{n-2}X^{n-2} - \cdots - b_0$ avec des réels positifs $b_0, \cdots, b_{n-2}$ admet au plus une racine sur $\mathbb{R}_+^*$, plus précisément exactement une racine simple réelle strictement positive si $(b_0, \cdots, b_{n-2}) \neq (0, \cdots, 0)$ et aucune racine strictement positive si $(b_0, \cdots, b_{n-2}) = (0, \cdots, 0)$. Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$ avec $a_0, \cdots, a_{n-1}$ positifs. Alors $P' = n\Big(X^{n-1} - \dfrac{(n-1)a_{n-1}}{n}X^{n-2} - \cdots - \dfrac{a_1}{n}\Big)$.

Traitons deux cas :

- Si $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, alors P' ne s'annule qu'en 0 sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse de récurrence donc y reste positif par le théorème des valeurs intermédiaires car $\lim\limits_{t\to+\infty} P'(t) = +\infty$. Ainsi, P est strictement croissante (car P' ne s'annule qu'en 0) sur $\mathbb{R}_+$ donc injective. Par continuité de P, la fonction P réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-a_0; +\infty[$. Ainsi, P s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en une racine simple r si $a_0 > 0$ (auquel cas $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$ et aucune fois (ne s'annulant qu'en 0 sur $\mathbb{R}_+$) si $a_0 = 0$ donc si $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = (0, 0, \cdots, 0)$.
- Si $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$, alors P' s'annule exactement une fois en une racine simple $s > 0$ de P' sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse de récurrence. On a forcément P' négative sur $[0; s]$ et positive sur $[s; +\infty[$ (sinon on aurait au moins deux racines de P' sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} P'(x) = +\infty$) de sorte qu'on voit avec le tableau de variations de P que P s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel $r > s$ qui est une racine simple de P.

Par principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$ tel que $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont des réels positifs, alors P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ si $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = (0, 0, \cdots, 0)$ et s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$ si $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$.

b. Soit α une racine complexe de Q, $|\alpha^n| = |a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0| \leqslant |a_{n-1}||\alpha|^{n-1} + \cdots + |a_0|$ par inégalité triangulaire. Ainsi $P(|\alpha|) = |\alpha|^n - |a_{n-1}||\alpha|^{n-1} - \cdots - |a_0| \leqslant 0$. Comme $|a_0| > 0$, on est dans le cas où P s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en $\rho > 0$. L'inégalité $P(|\alpha|) \leqslant 0$ conduit alors à $|\alpha| \in [0;\rho]$ donc $|\alpha| \leqslant \rho$.

2.122 **a.** Le polynôme nul est dans $\mathbb{R}_n[X]$ et toute combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ en est encore un donc $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et donc lui-même un espace vectoriel. En effet, si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, alors $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \mathrm{Max}(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant n$ donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Comme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, \cdots, X^n)$, on a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.

b. Comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\Psi\Big(\dfrac{X^k}{k!}\Big) = \dfrac{X^{k-1}}{(k-1)!}$, on prend la base $\mathcal{B} = \Big(\dfrac{X^k}{k!}\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ (de cardinal $n+1$ et libre car les polynômes de $\mathcal{B}$ sont de degrés échelonnés) et, par construction, la matrice de Ψ dans $\mathcal{B}$ vaut $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Psi) = A = (a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

c. Considérons l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P - P'$ (on n'augmente pas les degrés et la linéarité est claire). Alors, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $P = P'$ ce qui impose $P = 0$ car on sait que si P est constant non nul alors $P' = 0$ et si $\deg(P) \geqslant 1$, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$ donc $P \neq P'$. Ainsi φ est injective. Comme on est en dimension finie, φ est donc un automorphisme de E d'où : $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ P - P' = Q$.

On peut même facilement trouver φ^{-1} : si $Q = \varphi(P) = P - P'$, en dérivant successivement, on a même $P' - P'' = Q', \cdots, P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$. Or $P^{(n+1)} = 0$ donc $P = \varphi^{-1}(Q) = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

d. <u>Méthode 1</u> : Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{-x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (P'(x) - P(x))e^{-x} = -Q(x)e^{-x} \leqslant 0$ donc f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées, on a donc f positive sur $\mathbb{R}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

<u>Méthode 2</u> : on constate d'abord que P et Q ont même degré et même coefficient dominant. Si $Q = \lambda \geqslant 0$, alors $P = \lambda$ aussi et le résultat est vérifié. Sinon, $\deg(Q) \geqslant 1$ donc, comme Q reste positif sur $\mathbb{R}$, Q est de degré pair et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty$. Par conséquent, on a aussi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$. S'il existait un réel x_0 tel que $P(x_0) < 0$, alors P admettrait un minimum sur $\mathbb{R}$ (classique). On peut donc définir $m = \mathrm{Min}_{\mathbb{R}}(P) = P(\alpha)$. Comme P est de classe C^∞, on aurait $P'(\alpha) = 0$. Ainsi $Q(\alpha) = P(\alpha) - P'(\alpha) = P(\alpha) \leqslant P(x_0) < 0$: NON !!!

On en déduit encore que P reste positif sur $\mathbb{R}$.

e. Soit $\alpha_1 < \cdots < \alpha_d$ les $d \leqslant n$ racines réelles distinctes de P, les signes de $P'(\alpha_1), \cdots, P'(\alpha_d)$ sont alternés (et ces valeurs sont non nulles) : il suffit de faire un dessin ! Alors $\forall k \in [\![1;d]\!],\ Q(\alpha_k) = -P'(\alpha_k)$ donc les $Q(\alpha_1), \cdots, Q(\alpha_d)$ sont de signes stricts alternés donc, par le TVI, il existe des valeurs $\beta_1, \cdots, \beta_{d-1}$ telles que $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{d-1} < \beta_{d-1} < \alpha_d$ et $Q(\beta_1) = \cdots = Q(\beta_{d-1}) = 0$. Comme $Q = P - P'$, on a $\deg(Q) = \deg(P - P') = \deg(P)$ et que P et Q ont les mêmes coefficients dominants, si par exemple $P'(\alpha_d) > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$ aussi et, comme $Q(\alpha_d) < 0$, il existe $\beta_d > \alpha_d$ tel que $Q(\beta_d) = 0$ ce qui fait bien d racines distinctes de Q et Q est aussi scindé à racines simples.

2.123 Comme $A(B - I_n) = B$, on a $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A(B - I_n)) \subset \mathrm{Im}(A)$ d'après le cours. Ainsi : $\mathrm{rang}(B) \leqslant \mathrm{rang}(A)$. Comme $(A - I_n)B = A$, $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$ donc $n - \mathrm{rang}(B) \leqslant n - \mathrm{rang}(A)$ d'après la formule du rang.

Par double inégalité, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$ donc les égalités $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$.

Autre méthode : on pouvait écrire $AB = A + B \iff (A - I_n)(B - I_n) = I_n$ de sorte que $B - I_n$ est l'inverse de $A - I_n$ (inverse à droite suffit) et alors $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$ qui donne $BA = A + B = AB$ en développant. Alors $A(B - I_n) = B$ implique $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A(B - I_n)) \subset \mathrm{Im}(A)$ donc $\mathrm{rang}(B) \leqslant \mathrm{rang}(A)$ et, de manière symétrique, $B(A - I_n) = A$ implique $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B(A - I_n)) \subset \mathrm{Im}(B)$ donc $\mathrm{rang}(A) \leqslant \mathrm{rang}(B)$.

2.124 Les transvections (même définies par blocs) ne modifient pas le déterminant d'une matrice. On effectue donc $C_1 \leftarrow C_1 + iC_2$ de sorte que $\det(M) = \begin{vmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{vmatrix}$. Si cela ne vous convainc pas, il suffit de constater que $\begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{pmatrix}$. On constate que $B + iA = i(A - iB)$ de sorte qu'en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$ (même chose), on arrive à $\det(M) = \begin{vmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{vmatrix} = \det(A + iB)\det(A - iB)$.

Ceci découle aussi du calcul par blocs : $\begin{pmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -iI_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{pmatrix}$.
Or $A - iB = \overline{A + iB}$ donc, le déterminant étant polynomial à coefficients réels (valant ± 1) en les cases de la matrice, on a $\det(A - iB) = \overline{\det(A + iB)}$. Là encore, si $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$ pour une matrice carrée réelle ne vous paraît pas évident, il suffit de le démontrer par récurrence sur la taille de la matrice.
Au final, on a $\det(M) = |\det(A + iB)|^2 \geqslant 0$.

2.125 • Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(u)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ par linéarité de la trace car $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (v, w) \in (\mathcal{L}(E))^2$, on a $\varphi(u)(\lambda v + w) = \mathrm{Tr}\,(u \circ (\lambda v + w)) = \mathrm{Tr}\,(\lambda u \circ v + u \circ w) = \lambda \mathrm{Tr}\,(u \circ v) + \mathrm{Tr}\,(u \circ w) = \lambda \varphi(u)(v) + \varphi(u)(w)$. Ainsi l'application φ est bien définie de $\mathcal{L}(E)$ dans $(\mathcal{L}(E))^*$.
• De plus φ est linéaire à nouveau par linéarité de la trace. En effet, si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(u, u') \in (\mathcal{L}(E))^2$, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(\alpha u + u')(v) = \mathrm{Tr}\,((\alpha u + u') \circ v) = \mathrm{Tr}\,(\alpha u \circ v + u' \circ v) = \alpha \mathrm{Tr}\,(u \circ v) + \mathrm{Tr}\,(u' \circ v) = \alpha \varphi(u)(v) + \varphi(u')(v)$ donc, comme ceci est vrai pour tout endomorphisme v, on a bien $\varphi(\alpha u + u') = \alpha \varphi(u) + \varphi(u')$.
Comme $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim((\mathcal{L}(E))^*) = (\dim(E))^2$, il suffit de prouver que φ est injective pour établir que φ est un isomorphisme. Or si $u \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Tr}\,(u \circ v) = 0$. En notant $n = \dim(E)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E, ceci se traduit par $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = 0$ avec $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ car $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = AB$.
Méthode 1 : en prenant $B = (ovA)^T = (\overline{a_{j,i}})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on trouve $\mathrm{Tr}\,(A(\overline{A})^T) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2 = 0$ ce qui impose $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$ donc que la matrice A est nulle, ainsi $u = 0$.
Méthode 2 : en prenant $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ et $B = E_{i,j}$, la matrice $AB = AE_{i,j}$ a toutes ses colonnes nulles sauf la j-ièm qui contient la i-ième colonne de A. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,(AB) = 0 = a_{j,i}$. On a bien $A = 0$ donc $u = 0$.
Quelle que soit la méthode, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ donc u est injective et, comme $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim((\mathcal{L}(E))^*)$, φ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $(\mathcal{L}(E))^*$.

2.126 Pour $j \in [\![1; n]\!]$, soit la fonction $f_j : t \mapsto e^{y_j t}$. Soit le sous-espace $F = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_n)$ de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(f) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$. Il est clair que φ est linéaire. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j = 0$. Si on avait $\lambda_n \neq 0$, alors comme $\sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j f_j \underset{+\infty}{=} o(f_n)$, on aurait $\lambda_n f_n = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j f_j \underset{+\infty}{=} o(f_n)$ ce qui est impossible. Ainsi, $\lambda_n = 0$. On continue ainsi de suite et on a

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n)$ est libre, c'est donc une base de F qui est de dimension n. Si on considère la fonction ψ qui est la restriction de φ à F, alors $\psi(f_j) = (e^{x_1 y_j}, \cdots, e^{x_n y_j})$ de sorte que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{can}}(\psi)$. Par conséquent, A est inversible si et seulement si ψ est un isomorphisme.

Cette interprétation de A comme la matrice d'une application linéaire n'est pas essentielle à la résolution de cet exercice, mais l'introduction des fonctions f_j semble inévitable, même si on raisonne sur le fait que les colonnes de la matrice A forment une famille libre, ce qui prouve que A est de rang n donc inversible.

Qu'on parle du noyau de ψ ou de combinaison linéaire des colonnes de A (la j-ième colonne de A est notée C_j) qui donne 0, on est conduit à considérer $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

- $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \in \text{Ker}(\psi)$ si et seulement si f s'annule en $x_1, \cdots, x_n$.
- si $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$, alors $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e^{x_i y_j} = 0 = f(x_i)$ en posant $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$.

Quelle que soit la méthode, il suffit donc de montrer qu'une telle fonction f s'annulant en n valeurs x_i distinctes ne peut être que nulle. On va montrer cette propriété par récurrence sur n. Soit donc $\mathcal{P}(n) =$ "si $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$ s'annule en n valeurs distinctes avec $f_j : t \mapsto e^{z_j t}$ et $z_1, \cdots, z_n$ distinctes, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$".

<u>Initialisation</u> : si $n = 1$, soit $y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $t \mapsto \lambda e^{yt}$ s'annule en au moins un réel x, alors $\lambda e^{xy} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ car $e^{xy} \neq 0$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 1$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit maintenant $y_1 < \cdots < y_{n+1}$ des réels distincts et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $f : t \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{y_k t}$ s'annule en des réels $x_1 < \cdots < x_{n+1}$ distincts. En multipliant $f(t)$ par $e^{-y_{n+1}t}$, la fonction $g : t \mapsto e^{-y_{n+1}t} f(t) = e^{-y_{n+1}t} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{y_k t} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{(y_k - y_{n+1})t}$ s'annule aussi $x_1, \cdots, x_{n+1}$ donc en $n+1$ réels distincts deux à deux. D'après le théorème de ROLLE appliqué à la fonction g sur tous les intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ pour $i \in [\![1;n]\!]$, comme $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$ et que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction $g' : t \mapsto \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - y_{n+1}) \lambda_j e^{(y_j - y_{n+1})t}$ s'annule en n réels m_i distincts vérifiant $x_1 < m_1 < x_2 < m_2 < \cdots < m_n < x_{n+1}$. D'après $\mathcal{P}(n)$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ puisque $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $y_j - y_{n+1} \neq 0$. Il ne reste donc que $f : t \mapsto \lambda_{n+1} e^{y_{n+1}t}$ qui s'annule en $n+1$ valeurs ce qui, d'après $\mathcal{P}(1)$, impose $\lambda_{n+1} = 0$. Ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Si $f \in \text{Ker}(\psi)$, on peut écrire $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$ et f s'annule en $x_1, \cdots, x_n$ distincts deux à deux donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ d'après $\mathcal{P}(n)$. Ceci prouve que $f = 0$ donc ψ est injective. Comme $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$, ψ est un isomorphisme donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

2.127 **a.** <u>Existence</u> : on trouve $X^1 + \dfrac{1}{X^1} = P_1\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big)$ avec $P_1 = X$ qui est unitaire de degré 1.

On a aussi $X^2 + \dfrac{1}{X^2} = \Big(X + \dfrac{1}{X}\Big)^2 - 2 = P_2\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big)$ avec $P_2 = X^2 - 2$ qui est unitaire de degré 2.

On a de plus $X^3 + \dfrac{1}{X^3} = \Big(X + \dfrac{1}{X}\Big)^3 - 3\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big) = P_3\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big)$ avec $P_3 = X^3 - 3X$ qui est unitaire de degré 3.

Soit $n \geqslant 2$, supposons qu'il existe deux polynômes unitaires P_n de degré n et P_{n-1} de degré $n-1$ tels que $P_n\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$ et $P_{n-1}\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big) = X^{n-1} + \dfrac{1}{X^{n-1}}$. En posant $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$, comme on a

$X^{n+1}+\dfrac{1}{X^{n+1}}=\left(X^n+\dfrac{1}{X^n}\right)\left(X+\dfrac{1}{X}\right)-\left(X^{n-1}+\dfrac{1}{X^{n-1}}\right)$ (R) on a trouvé un polynôme unitaire P_{n+1} de degré $n+1$ (assez clair) tel que $P_{n+1}\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=X^{n+1}+\dfrac{1}{X^{n+1}}$. On conclut par principe de récurrence que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme P_n de degré $n\geqslant 1$ et unitaire tel que $P_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=X^n+\dfrac{1}{X^n}$.

<u>Unicité</u> : soit $n\geqslant 1$ et supposons qu'il existe Q_n unitaire de degré n qui vérifie aussi $Q_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=X^n+\dfrac{1}{X^n}$. Par exemple, pour $x>0$, on a $P_n\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=Q_n\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$. Comme l'application $f:t\mapsto t+\dfrac{1}{t}$ est surjective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $[2;+\infty[$ par une petite étude de fonctions, les deux polynômes P_n et Q_n coïncident sur l'intervalle $[2;+\infty[$ donc en une infinité de réels et sont donc formellement égaux : $P_n=Q_n$.

Au final, $\forall n\geqslant 1,\ \exists!P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que P_n est unitaire et de degré n et tel que $P_n\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=X^n+\dfrac{1}{X^n}$.

b. D'après la question précédente, on a $\forall n\geqslant 2,\ P_{n+1}=XP_n-P_{n-1}$. On reconnaît une relation de récurrence type Tchebychev. On remplace X par $e^{i\theta}$ dans la formule (R) pour avoir la relation suivante : $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall n\geqslant 2,\ P_{n+1}(2\cos(\theta))=2\cos(\theta).P_n(2\cos(\theta))-P_{n-1}(2\cos(\theta))$. Une récurrence double permet de montrer, par la formule de trigonométrie $\cos((n+1)\theta)=2\cos\theta\cos(n\theta)-\cos((n-1)\theta)$, que l'on a bien $\forall n\geqslant 2,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ P_n(2\cos\theta)=2\cos(n\theta)$. Comme $\cos(n\theta)=0\iff\theta\equiv\dfrac{\pi}{2n}\left[\dfrac{\pi}{n}\right]$, les réels $2\cos(\theta_k)$ sont des racines de P_n si $\theta_k=\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k\in[\![0;n-1]\!]$. Comme la fonction $\cos$ est injective sur $[0;\pi]$, les réels $(2\cos(\theta_k))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ sont distincts deux à deux car $0<\theta_0<\cdots<\theta_{n-1}<\pi$. Comme P_n est unitaire de degré n, on a donc $P_n=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(X-2\cos(\theta_k))$.

On sait qu'il existe alors des constantes réelles $a_0,\cdots,a_{n-1}$ telles que $F_n=\dfrac{1}{P_n}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{a_k}{X-2\cos(\theta_k)}$ car F_n est une fraction rationnelle irréductible de degré strictement négatif. La théorie (vue seulement en MPSI) nous annonce que $\forall k\in[\![0;n-1]\!],\ a_k=\dfrac{1}{P_n'(2\cos(\theta_k))}$. Or $-2\sin\theta P_n'(\cos(\theta))=-2n\sin(n\theta)$ donc $P_n'(2\cos(\theta_k))=\dfrac{n\sin(n\theta_k)}{\sin(\theta_k)}=\dfrac{(-1)^kn}{\sin(\theta_k)}$. Par conséquent : $\dfrac{1}{P_n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k\sin(\theta_k)}{X-2\cos(\theta_k)}$.

2.128 On pose $S_0(x)=\sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}x^{2k}=\sum\limits_{\substack{p=0\\ p\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{p}x^p$ et $S_1(x)=\sum\limits_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}x^{2k+1}=\sum\limits_{\substack{p=0\\ p\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{p}x^p$ pour $x\in\mathbb{C}$. Alors, d'après la formule du binôme de Newton : $S_0(x)+S_1(x)=\sum\limits_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p=(1+x)^n$ et $S_0(x)-S_1(x)=\sum\limits_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}x^p=(1-x)^n$. Ainsi $S_0(x)=\dfrac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}$. Il suffit de prendre $x=i\sqrt{3}$ de sorte que $x^{2k}=i^{2k}3^k=(-3)^k$ pour avoir $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-3)^k=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n}{2}=\mathrm{Re}\left((1+i\sqrt{3})^n\right)$.
Or $(1+i\sqrt{3})^n=\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n=2^ne^{\frac{n\pi}{3}}$. Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-3)^k=2^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$.

2.129 ($\Longleftarrow$) S'il existe deux automorphismes de E tels que $u\circ v=-v\circ u$, en prenant le déterminant, on a $\det(u\circ v)=\det(u)\det(v)=(-1)^n\det(v)\det(u)=\det(-v\circ u)$ car la dimension de E vaut n. Ainsi, $(-1)^n=1$ car $\det(u)\neq 0$ et $\det(v)\neq 0$ puisque u et v sont des automorphismes ce qui impose que n est pair.

($\Longrightarrow$) Si $n=2p$ est pair, on se souvient des isométries du plan (2 est le plus petit entier pair) et on “constate” que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la symétrie orthogonale (réflexion) d'axe (Ox) de matrice $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ anti-commutent : $A'B' = -B'A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par analogie, on choisit une base $\mathcal{B}$ quelconque de E de dimension $n = 2p$ et on définit u (resp. v) l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ vaut $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$). On vérifie avec des produits par blocs que A et B sont inversibles avec $B^{-1} = B$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix} = -A$ et que $AB = -BA = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi u et v sont bien des automorphismes de E et $u \circ v = -v \circ u$.

2.130 Si on suppose que $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, on effectue les opérations $L_k \longleftarrow L_k - L_{k-1}$ pour k allant de n à 2 (dans cet ordre). On factorise $a_k - a_{k-1}$ dans chaque ligne $k \in [\![2;n]\!]$. Par multilinéarité du déterminant, on obtient $\det(A) = \prod_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) \begin{vmatrix} 0 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1 \\ 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$. On effectue ensuite $C_k \longleftarrow C_k + C_n$ pour k allant de 1 à $n-1$ (dans cet ordre) et $\det(A) = \prod_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) \begin{vmatrix} a_n - a_1 & * & \cdots & * & a_n - a_1 \\ 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Ainsi, $\det(A) = -(-2)^{n-2}(a_n - a_1)\prod_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$ (qui marche aussi si $n = 2$).

Si les $a_1, \cdots, a_n$ sont quelconques, on les classe par ordre croissant : $a_{\sigma(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{\sigma(n)}$ pour une certaine permutation σ du groupe symétrique S_n (bijections de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même). Échanger les lignes L_i et L_j puis les colonnes C_i et C_j ne change rien au déterminant d'une matrice car on multiplie deux fois par -1. Ainsi, en effectuant des échanges de ligne et de colonne, on va parvenir, sans changer le déterminant, à se ramener au déterminant du cas précédent : $\det(A) = -(-2)^{n-2}(a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(1)})\prod_{k=2}^{n}(a_{\sigma(k)} - a_{\sigma(k-1)})$.

2.131 <u>Méthode 1</u> : Le lien entre ces deux matrices est la matrice de $M = \begin{pmatrix} I_q & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

Si on pose $U = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ -B & I_p \end{pmatrix}$, alors $MU = \begin{pmatrix} I_q - AB & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ et $UM = \begin{pmatrix} I_q & A \\ 0 & I_p - BA \end{pmatrix}$ donc, en passant au déterminant, il vient $\det(M)\det(U) = \det(I_q - AB) = \det(I_p - BA) = \det(U)\det(M)$ car UM, MU, U sont triangulaires par blocs. Cette formule est appelé identité de SYLVESTER. Difficile à voir !

<u>Méthode 2</u> : Si on ne voit pas cette relation par blocs, comme A est de rang $r \leqslant \text{Min}(p,q)$, A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs) mais c'est hors-programme. Ainsi, $\exists Q \in GL_q(\mathbb{R})$, $\exists P \in GL_p(\mathbb{R})$, $A = QJ_rP^{-1}$.

Posons alors $C = P^{-1}BQ$ de sorte que $B = PCQ^{-1}$. Alors on peut simplifier et factoriser les deux matrices $I_q - AB = I_q - QJ_rP^{-1}PCQ{-}1 = Q(I_q - J_rC)Q^{-1}$ et $I_p - BA = I_p - PCQ^{-1}QJ_rP^{-1} = P(I_p - CJ_r)P^{-1}$.

Par propriétés du déterminant, on a $\det(I_q - AB) = \det(I_q - J_rC)$ et $\det(I_p - BA) = \det(I_p - CJ_r)$.

Si $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ par blocs avec $C_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, alors après calculs $I_q - J_rC = \begin{pmatrix} I_r - C_1 & -C_2 \\ 0 & I_{q-r} \end{pmatrix}$ et

$I_p - CJ_r = \begin{pmatrix} I_r - C_1 & 0 \\ -C_3 & I_{p-r} \end{pmatrix}$. Comme ces matrices sont triangulaires par blocs, on a finalement l'égalité annoncée, $\det(I_q - AB) = \det(I_q - J_rC) = \det(I_r - C_1) = \det(I_p - CJ_r) = \det(I_p - BA)$.

2.132 Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 1 + z + \cdots + z^{n-1} + z(1 + z + \cdots + z^{n-1}) = (1+z)(1+z+\cdots+z^{n-1})$. Si $z \neq 1$, on a donc $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = \frac{z^n - 1}{z-1}$. Comme 1 n'est visiblement pas solution de (E), les solutions de (E) sont -1 et les racines n-ièmes de l'unité autres que 1. Les solutions de (E) sont donc, d'après le cours sur les racines n-ièmes, les complexes $z = -1$ et $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$.

Si n est impair, les solutions sont toutes simples. Si n est pair, -1 est solution double de cette équation.

2.133 Analyse : soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commute avec toutes les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, comme la matrice $E_{i,j}$ est de rang 1, il vient $ME_{i,j} = E_{i,j}M$. En posant le calcul, $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j-ième qui contient la colonne C_i de la matrice M. De même, $E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i-ième qui contient la ligne L_j de M.

• En identifiant les deux pour $i = j = k$, on déduit que tous les termes de la ligne et de la colonne k sont nuls sauf éventuellement le terme $m_{k,k}$. La matrice M est donc déjà diagonale.

• Prenons maintenant $i \neq j$, alors $ME_{i,j} = E_{i,j}M$ se résume à $m_{i,i}E_{i,j} = m_{j,j}E_{i,j}$ donc à $m_{i,i} = m_{j,j}$ car $E_{i,j} \neq 0$ et la matrice M est même scalaire : $M = \lambda I_n$ avec $\lambda = m_{1,1}$.

Synthèse : réciproquement, une matrice de la forme $M = \lambda I_n$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi, les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont les matrices λI_n avec $\lambda \in \mathbb{C}$ qui sont dites matrices scalaires (elles représentent les homothéties de rapport λ).

2.134 **a.** Par la formule du rang : $\dim(\mathrm{Im}(M)) + \dim(\mathrm{Ker}(M)) = 3$ or $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(M)$ car $M^2 = 0$. Comme $\mathrm{Im}(M) \neq \{0\}$ car $M \neq 0$, on a forcément $\dim(\mathrm{Im}(M)) = \mathrm{rang}(M) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 2$.
b. Soit V_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(M)$. La famille (V_1) est libre dans $\mathrm{Ker}(M)$, on la complète en une base (V_1, V_2) de $\mathrm{Ker}(M)$. Par définition, il existe $V_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $MV_3 = V_1 \neq 0$. Ainsi, comme $V_3 \notin \mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$, la famille $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Par construction, comme $MV_1 = MV_2 = 0$ et $MV_3 = V_1$, en notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a $M = PE_{1,3}P^{-1}$ donc M est semblable à la matrice $E_{1,3}$.

2.135 **a.** ($\Longrightarrow$) Par hypothèse, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ g)$. L'autre inclusion $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ est toujours vraie. Soit x un vecteur de E, posons donc $y = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, il existe donc $y' \in F$ tel que $y = f \circ g(y')$ ce qui fait que $y - y = f(x - g(y')) = 0_F$ donc $x - g(y') \in \mathrm{Ker}(f)$. Il suffit d'écrire $x = g(y') + (x - g(y'))$ pour avoir $E \subset \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)$. L'inclusion $\mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f) \subset E$ étant claire, on a bien $E = \mathrm{Im}(g) + \mathrm{Ker}(f)$.

($\Longleftarrow$) L'inclusion $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$ étant vraie en général, montrons la réciproque. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on décompose $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}(g)$ (donc $a = g(c)$ avec $c \in E$) et $b \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $y = f(a+b) = f(a) + f(b) = f \circ g(c) \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Par double inclusion, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$.

b. ($\Longrightarrow$) Par hypothèse, $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. L'autre inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ est toujours vraie. Soit y un vecteur de $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $g(y) = 0_E$. Ainsi, $g(f(x)) = g \circ f(x) = 0_F$

donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(x) = 0_F$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$ d'où $y = 0_F$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \{0_F\}$. L'inclusion $\{0_F\} \subset \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ étant claire, on a bien $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_F\}$.

($\Longleftarrow$) L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ étant vraie en général, montrons la réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, alors $g(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ d'où $f(x) = 0_F$ puisque $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0_F\}$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et on montré que $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par double inclusion, on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

2.136 **a.** On sait que les diviseurs $d \in \mathbb{N}^*$ de n s'écrivent $d = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}$ avec $\forall i \in [\![1;k]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Par unicité de l'écriture en produit de nombres premiers des entiers, si on note $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$, l'application $\varphi : \prod_{i=1}^{k} [\![0;\alpha_i]\!] \to \mathcal{D}(n)$ définie par $\varphi(\beta_1, \cdots, \beta_k) = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}$ est une bijection donc $\mathrm{card}\,(\mathcal{D}(n)) = \mathrm{card}\left(\prod_{i=1}^{k} [\![0;\alpha_i]\!]\right) = d(n) = \prod_{i=1}^{k} (1+\alpha_i)$.

b. Soit $\varepsilon \in]0;1]$ et p_i diviseur premier de n (donc $\alpha_i \geqslant 1$) tel que $p_i \geqslant 2^{1/\varepsilon}$, alors il vient $p_i^{\varepsilon} \geqslant 2$ donc $p_i^{\varepsilon\alpha_i} \geqslant 2^{\alpha_i} \geqslant 1+\alpha_i$ car on montre par une petite étude de fonction que $\forall x \geqslant 1$, $2^x \geqslant 1+x$. Alors $\dfrac{1+\alpha_i}{p_i^{\varepsilon\alpha_i}} \leqslant 1$.

c. f ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $f(x) = (1+x)e^{-\varepsilon x \ln(2)}$, on a $f'(x) = (1 - \varepsilon \ln(2)(1+x))2^{-\varepsilon x}$. Ainsi, f est croissante sur $[0;x_0]$ et décroissante sur $[x_0;+\infty[$ si $x_0 = \dfrac{1}{\varepsilon \ln(2)} - 1 > 0$ (car $\ln(2) < 1$) et, comme $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées, $\mathrm{Max}_{\mathbb{R}_+} f = f(x_0) = \dfrac{2^{\varepsilon}}{\varepsilon e \ln(2)}$.

d. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on décompose $d(n) = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ p_i \geqslant 2^{1/\varepsilon}}}^{k} (1+\alpha_i)\right) \times \left(\prod_{\substack{i=1 \\ p_i < 2^{1/\varepsilon}}}^{k} (1+\alpha_i)\right)$. Dans le premier produit, on utilise la question **b.** et on a $\prod_{\substack{i=1 \\ p_i \geqslant 2^{1/\varepsilon}}}^{k} (1+\alpha_i) \leqslant \prod_{\substack{i=1 \\ p_i \geqslant 2^{1/\varepsilon}}}^{k} p_i^{\varepsilon\alpha_i}$. Pour le second produit, on utilise la question **c.** et $\prod_{\substack{i=1 \\ p_i < 2^{1/\varepsilon}}}^{k} (1+\alpha_i) \leqslant \prod_{\substack{i=1 \\ p_i < 2^{1/\varepsilon}}}^{k} \dfrac{2^{\varepsilon}}{\varepsilon e \ln(2)}.2^{\varepsilon\alpha_i}$ donc, en notant m_ε le nombre de nombres premiers inférieurs à $2^{1/\varepsilon}$, on a $\prod_{\substack{i=1 \\ p_i < 2^{1/\varepsilon}}}^{k} (1+\alpha_i) \leqslant \left(\dfrac{2^{\varepsilon}}{\varepsilon e \ln(2)}\right)^{m_\varepsilon} \prod_{\substack{i=1 \\ p_i < 2^{1/\varepsilon}}}^{k} 2^{\varepsilon\alpha_i} \leqslant C_\varepsilon \prod_{\substack{i=1 \\ p_i < 2^{1/\varepsilon}}}^{k} p_i^{\varepsilon\alpha_i}$ en posant $C_\varepsilon = \left(\dfrac{2^{\varepsilon}}{\varepsilon e \ln(2)}\right)^{m_\varepsilon} > 0$. Ainsi $d(n) \leqslant C_\varepsilon \prod_{\substack{i=1 \\ p_i \geqslant 2^{1/\varepsilon}}}^{k} p_i^{\varepsilon\alpha_i} \times \prod_{\substack{i=1 \\ p_i < 2^{1/\varepsilon}}}^{k} p_i^{\varepsilon\alpha_i} = C_\varepsilon \prod_{i=1}^{k} p_i^{\varepsilon\alpha_i} = C_\varepsilon n^{\varepsilon}$.

e. La question précédente se traduit donc par $\forall \varepsilon > 0$, $d(n) \underset{+\infty}{=} O(n^{\varepsilon})$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $d(n) \underset{+\infty}{=} O(n^{\varepsilon/2})$ car $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, on a $\dfrac{d(n)}{n^{\varepsilon}} \underset{+\infty}{=} O(n^{-\varepsilon/2}) \underset{+\infty}{=} o(1)$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $d(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{\varepsilon})$.

2.137 **a.** Soit $A \in P$, comme P est stable par produit, on peut définir $f_A : P \to P$ par $f_A(B) = AB$. Comme A est inversible, $f_A(B) = f_A(C) \Longleftrightarrow AB = AC \Longleftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Longleftrightarrow B = C$ donc f_A est injective. Comme l'ensemble P est fini, f_A est donc bijective. Par conséquent $f_A(P) = P$ ce qui montre que $\sum\limits_{M \in f_A(P)} M = \sum\limits_{B \in P} B$. Or $\sum\limits_{M \in f_A(P)} M = \sum\limits_{B \in P} f_A(B) = \sum\limits_{B \in P} AB$ et on a bien $\sum\limits_{B \in P} AB = \sum\limits_{B \in P} B$.

b. Posons $U = \sum\limits_{B \in P} B$, alors $U^2 = \left(\sum\limits_{A \in P} A\right)\left(\sum\limits_{B \in P} B\right) = \sum\limits_{(A,B) \in P^2} AB = \sum\limits_{A \in P}\left(\sum\limits_{B \in P} AB\right) = \sum\limits_{A \in P}\left(\sum\limits_{B \in P} B\right)$ d'après la question précédente donc $U^2 = m \sum\limits_{B \in P} B = mU$ car $\mathrm{card}\,(P) = m$. En posant $V = \dfrac{U}{m}$, V est une matrice de projecteur car $V^2 = \dfrac{U^2}{m^2} = \dfrac{mU}{m^2} = \dfrac{U}{m} = V$ et on sait qu'alors $\mathrm{Tr}\,(V) = \mathrm{rang}\,(V) \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, par linéarité de Tr , $\sum\limits_{B\in P} \mathrm{Tr}\,(B) = \mathrm{Tr}\,(U) = \mathrm{Tr}\,(mV) = m\mathrm{Tr}\,(V)$ est un multiple de m.

c. Si $\sum\limits_{B\in P} \mathrm{Tr}\,(B) = 0$, alors $\mathrm{Tr}\,(U) = 0$ donc $\mathrm{Tr}\,(V) = \mathrm{rang}\,(V) = 0$ donc $V = 0$. Alors $U = \sum\limits_{B\in P} B = 0$.

$\boxed{\textbf{2.138}}$ **a.** Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{P}(p) =$ "$\forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,\cdots,0\}, f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^{\beta_k}$ s'annule au plus $p-1$ fois pour tout $(\beta_1,\cdots,\beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\beta_1,\cdots,\beta_p$ sont deux à deux distincts".

• Initialisation : comme $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda_1 x^{\beta_1}$ ne s'annule jamais (donc au plus $1-1=0$ fois) sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\lambda_1 \neq 0$ et $\beta_1 \in \mathbb{R}$ car $x^{\beta_1} = e^{\beta_1 \ln(x)}$, l'assertion $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Soit $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\lambda_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1} \setminus \{(0,\cdots,0\}$ et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p+1} \lambda_k x^{\beta_k}$ avec $\beta_1,\cdots,\beta_p,\beta_{p+1}$ deux à deux distincts. Traitons deux cas :

- • Si $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p) = (0,\cdots,0)$, alors $f : x \mapsto \lambda_{p+1}x^{\beta_{p+1}}$ ne s'annule jamais car $\lambda_{p+1} \neq 0$ et $0 \leqslant (p+1)-1$.
- • Sinon, par l'absurde, supposons que f s'annule au moins $p+1$ fois sur $\mathbb{R}$. Soit la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \mapsto x^{-\beta_{p+1}}f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p+1} \lambda_k x^{\beta_k - \beta_{p+1}} = \lambda_{p+1} + \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^{\beta_k-\beta_{p+1}}$ qui s'annule aussi au moins $p+1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse, disons en $z_1 < z_2 < \cdots < z_p < z_{p+1}$. Comme g est dérivable, avec Rolle, g' s'annule au moins p fois sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\exists z'_k \in]z_k;z_{k+1}[$ tel que $g'(z'_k) = 0$. Or $g'(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} (\beta_k - \beta_{p+1})\lambda_k x^{\beta_k-\beta_{p+1}-1}$. Comme $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p) \neq (0,\cdots,0)$, comme $\beta_1,\cdots,\beta_{p+1}$ sont distincts, $((\beta_1-\beta_{p+1})\lambda_1,\cdots,(\beta_p-\beta_{p+1})\lambda_p) \neq (0,\cdots,0)$ et $\beta_1-\beta_{p+1}-1,\cdots,\beta_p-\beta_{p+1}-1$ sont aussi deux à deux distincts. L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$ s'applique à g' et on obtient une contradiction. On en déduit que f s'annule au plus $(p+1)-1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, dans les deux cas, f s'annule au plus $(p+1)-1$ fois sur $\mathbb{R}$ et on a établi $\mathcal{P}(p+1)$ d'où l'hérédité !

Par principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie.

b. <u>Méthode 1</u> : on sait que A est inversible si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, donc si le seul vecteur colonne X tel que $AX = 0$ est $X = 0$. Soit donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$ avec $X^T = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_p)$. En effectuant le produit matriciel, on trouve $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j t_i^{\alpha_j} = 0$. Si on suppose $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \neq (0,\cdots,0)$, comme les $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ sont distincts, la question **a.** nous dit $f : x \mapsto \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j x^{\alpha_j}$ s'annule au plus $n-1$ fois alors qu'elle s'annule en $t_1,\cdots,t_n$ distincts par hypothèse et on a une contradiction : ainsi $X = 0$. On a bien A inversible.

<u>Méthode 2</u> : posons, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, la fonction $f_j : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f_j(x) = x^{\alpha_j}$. Définissons aussi $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ par $\varphi(f) = (f(t_1),\cdots,f(t_n))$ où $E = \mathrm{Vect}(f_1,\cdots,f_n)$. $\mathcal{B} = (f_1,\cdots,f_n)$ est libre car si $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j = 0$ et qu'on suppose $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\cdots,0)\}$, on a une contradiction avec la question **a.** car f s'annule une infinité de fois. Ainsi, $\dim(E) = n$. De plus, si $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors f s'annule en $t_1,\cdots,t_n$ par hypothèse donc $f = 0$ toujours d'après la question **a.**.

L'application φ est donc injective, donc φ est un isomorphisme car $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$ et on en déduit que $A = (f_j(t_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (t_i^{\alpha_j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(\varphi)$ est inversible (si $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

2.139 **a.** On constate d'abord que la condition $\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$ d'appartenance à $C_n(\mathbb{R})$ pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ signifie que les cases de A sont symétriques par rapport au centre de la matrice A (centre incarné par une case si n est impair ou pas si n est pair).

La matrice nulle est clairement dans $C_n(\mathbb{R})$ donc $C_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $C_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et posons $D = \lambda A + B = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors, pour tout couple (i,j) dans $[\![1;n]\!]^2$, on a la relation $d_{n+1-i,n+1-j} = \lambda a_{n+1-i,n+1-j} + b_{n+1-i,n+1-j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j} = d_{i,j}$ donc $D \in D_n(\mathbb{R})$. Ainsi $C_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $C_n(\mathbb{R})$ et posons $C = AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On sait que $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et $c_{n+1-i,n+1-j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n+1-i,k}b_{k,n+1-j} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{n+1-i,n+1-\ell}b_{n+1-\ell,n+1-j}$ avec le changement d'indice $k = n+1-\ell$. Ce qui devient $c_{n+1-i,n+1-j} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}b_{\ell,j} = c_{i,j}$ avec la propriété fondatrice de $C_n(\mathbb{R})$. Ainsi $C \in C_n(\mathbb{R})$ et $C_n(\mathbb{R})$ est bien stable par produit matriciel.

Au final, $C_n(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il est stable par produit. Comme $I_n \in C_n(\mathbb{R})$, cet ensemble $C_n(\mathbb{R})$ est même une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais chut !

b. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap C_n(\mathbb{R})$. Par stabilité de $C_n(\mathbb{R})$ par produit, l'application $\theta : C_n(\mathbb{R}) \to C_n(\mathbb{R})$ de l'énoncé est bien définie, et elle est linéaire par distributivité du produit par rapport à la somme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc θ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(C_n(\mathbb{R}))$. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\theta)$, alors $AM = 0$ donc $A^{-1}(AM) = M = 0$ d'où $\mathrm{Ker}(\theta) = \{0\}$ ce qui signifie que θ est injective. Comme $C_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie puisque sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui l'est (en fait $\dim(C_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n^2}{2}$ si n est pair et $\dim(C_n(\mathbb{R})) = 1 + \dfrac{n^2-1}{2}$ puisque seule une case sur 2 est à choisir, sa symétrique par rapport au centre de la matrice est alors imposée - à part la case centrale si n est impair -), θ est un automorphisme de $\mathbb{C}_n(\mathbb{R})$. Comme $I_n \in C_n(\mathbb{R})$, I_n admet un antécédent par θ dans $C_n(\mathbb{R})$ donc $\exists B \in C_n(\mathbb{R}),\ \theta(B) = I_n = AB$. Par conséquent : $B = A^{-1} \in C_n(\mathbb{R})$.

2.140 **a.** Si $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre, posons $F = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_n)$ qui est un sous-espace de E de dimension n car $(f_1, \cdots, f_n)$ est alors une base de F. Soit $\varphi : F \to \mathbb{R}^n$ définie par $\forall f \in F,\ \varphi(f) = \Big(\int_0^1 ff_1, \cdots, \int_0^1 ff_n\Big)$. Alors $\varphi \in \mathcal{L}(F)$ par linéarité de l'intégrale. Si $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, comme $f \in F$, il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que l'on ait $f = \lambda_1 f_1 + \cdots \lambda_n f_n$ et $\varphi(f) = 0$ donne $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \int_0^1 ff_k = 0$. Alors, toujours par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 (\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k) f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^1 ff_k = 0$. Un résultat classique du cours, comme f^2 est continue et positive sur $[0;1]$ et que $\int_0^1 f^2 = 0$, montre que $f^2 = 0$ sur $[0;1]$ donc que $f = 0$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective. Mais comme $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^n)$, φ est un isomorphisme.

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(h_1, \cdots, h_n) \in F^n$, la condition $\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$ se traduit par $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \varphi(h_i) = (m_{i,1}, \cdots, m_{i,n})$. La bijectivité de φ montre que non seulement une telle famille $(h_1, \cdots, h_n) \in F^n$ existe, mais aussi qu'elle est unique, il suffit de prendre $h_i = \varphi^{-1}(m_{i,1}, \cdots, m_{i,n})$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. Il existe donc une famille $(h_1, \cdots, h_n) \in E^n$ (mais on n'a plus forcément l'unicité dans E qui est de dimension violemment infinie) telle que $\forall(i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$.

b. Méthode 1 : en prenant $M = I_n$, il existe par hypothèse $(h_1, \cdots, h_n) \in E^n$ telle que l'on ait les relations $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ \delta_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$ (symbole de KRONECKER). Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j = 0$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\int_0^1 \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\Big) h_i = 0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \int_0^1 h_i f_j = \lambda_i$. Ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.
La réciproque de la question **a.** est donc vraie.

Méthode 2 : on pouvait aussi raisonner par l'absurde. Si $(f_1, \cdots, f_n)$ était liée, l'une de ces fonctions, disons f_j, s'écrirait comme combinaison linéaire des autres. Alors, par linéarité de l'intégrale, la j-ième colonne de la matrice $M = \left(\int_0^1 h_i f_j\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ serait combinaison linéaire des autres donc M ne serait pas inversible. On aurait donc une contradiction avec n'importe quelle matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notamment I_n).

2.141 Si $n = 1$, $A = ((2-2x)^2)$ donc A est de rang 1 si $x \neq 1$ et A est nulle (donc de rang 0) si $x = 1$.

Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} (2-2x)^2 & (3-2x)^2 \\ (3-2x)^2 & (4-2x)^2 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = -2(3-2x)^2 + 1$ ainsi A est de rang 1 pour $x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (soit $x \sim 1,14$ ou $x \sim 1,85$) et rang$(A) = 2$ pour toute autre valeur de x.

Si $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} (2-2x)^2 & (3-2x)^2 & (4-2x)^2 \\ (3-2x)^2 & (4-2x)^2 & (5-2x)^2 \\ (4-2x)^2 & (5-2x)^2 & (6-2x)^2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -8$ (après calculs) donc $\forall x \in \mathbb{R},\ $rang$(A) = 3$.

Pour $n \geqslant 4$, soit $\varphi_n : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(P) = (P(1), \cdots, P(n))$. Alors φ est linéaire et comme $\varphi(P) = 0$ signifie que P s'annule en n valeurs distinctes, on en déduit que $P = 0$ car $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. φ étant injective et $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$, on en déduit que φ est un isomorphisme. Or A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la famille $(\varphi((X+1-2x)^2), \cdots, \varphi((X+n-2x)^2))$. Or φ conserve les dimensions des espaces, $\dim(\varphi(\mathrm{Vect}((X+1-2x)^2, \cdots, (X+n-2x)^2)) = \dim(\mathrm{Vect}((X+1-2x)^2, \cdots, (X+n-2x)^2))$ donc rang$(A) = $ rang$(\varphi((X+1-2x)^2), \cdots, \varphi((X+n-2x)^2)) = $ rang$((X+1-2x)^2, \cdots, (X+n-2x)^2)$. Comme tous ces polynômes sont de degré inférieur ou égaux à 2, on a rang$(A) \leqslant 3$. Or les trois premières colonnes de la matrice A forment une famille libre d'après le cas $n = 3$ donc rang$(A) \geqslant 3$. On en déduit que rang$(A) = 3$.
On pouvait aussi effectuer trois fois de suite les opérations de GAUSS $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$ sur les colonnes de la matrice pour arriver à la même conclusion avec des diminutions de degré successives.

2.142 **a.** Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E$ (1). Si on avait $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \cdots, 0)$, alors posons $r = \mathrm{Min}\big(\{k \in [\![0;p-1]\!],\ \lambda_k \neq 0\}\big)$. Alors, en composant (1) par u^{p-1-r}, on obtient la relation $\lambda_r u^{p-1}(x) = 0_E$ car $u^p = 0$ ce qui est absurde car $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ et $\lambda_r \neq 0$. On en déduit que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$ donc la famille $(x, \cdots, u^{p-1}(x))$ est libre donc $\dim(F) = p$.
b. Soit une base de E de la forme $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, u^{p-1}(x))$; elle existe d'après le théorème de la base incomplète. Considérons l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})$, alors on sait qu'il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Comme $u^{p-1}(x) \notin H$ par construction, on a $\varphi(u^{p-1}(x)) \neq 0$ car $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
c. En tant qu'intersection de sous-espaces, G est un sous-espace de E. On procède par analyse/synthèse. Soit $z \in E$, on suppose qu'il s'écrit $z = v + w$ avec $u \in F$ et $w \in G$. Alors $v = \lambda_0 x + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x)$ avec $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ et $\forall k \in [\![0;p-1]\!],\ \varphi(u^k(w)) = 0$. Ainsi : $z = \lambda_0 x + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) + w$ (1).
Pour tout entier $k \in [\![0;p-1]\!]$, on applique $\varphi \circ u^k$ à la relation (1) et on obtient le système linéaire à p équations et p inconnues suivant $(S)\ :\ \forall k \in [\![0;p-1]\!],\ \sum\limits_{i=k}^{p-1} \lambda_{i-k} \varphi(u^i(x)) = \varphi(u^k(z))$ (les inconnues étant les $\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}$). Ce système est triangulaire inférieur avec une diagonale de $\varphi(u^{p-1}(x)) \neq 0$ donc il est de CRAMER et admet une unique solution. En posant $w = z - (\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x))$ pour les valeurs de λ_k trouvées, on a l'unicité de la décomposition $z = x + y$.

Réciproquement, soit $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{p-1})\in\mathbb{C}^p$ l'unique solution du système (S), $x=\lambda_0x+\cdots+\lambda_{p-1}u^{p-1}(x)\in F$ et w défini par $w=z-x$. Il est clair que $z=v+w$. Or, pour tout $k\in[\![0;p-1]\!]$, $\sum\limits_{i=k}^{p-1}\lambda_{i-k}\varphi(u^i(x))=\varphi(u^k(z))$ signifie que $\varphi(u^k(z)-\sum\limits_{i=k}^{p-1}\lambda_{i-k}u^i(x))=\varphi(u^k(z)-\sum\limits_{i=k}^{p+k-1}\lambda_{i-k}u^i(x))=\varphi\circ u^k(z-\sum\limits_{j=0}^{p-1}\lambda_ju^j(x))=0$ donc que $w\in\mathrm{Ker}(\varphi\circ u^k)$. On a donc bien $w\in G=\bigcap\limits_{k=0}^{p-1}\mathrm{Ker}(\varphi\circ u^k)$. Et voici l'existence établie.

L'existence et l'unicité de la décomposition de z montre que $E=F\oplus G$.

d. Comme $\dim(G)=n-p$, soit une base $\mathcal{B}'=(v_{p+1},\cdots,v_n)$ de G. Puisque $E=F\oplus G$ d'après la question précédente, la famille $\mathcal{B}=(u^{p-1}(x),\cdots,u(x),x,v_{p+1},\cdots,v_n)$ est une base de E. On constate que G est stable par u car si $w\in G$, on a $\forall k\in[\![0;p-1]\!]$, $\varphi(u^k(w))=0$ donc $\forall k\in[\![0;p-2]\!]$, $\varphi(u^k(u(w)))=0$ et $\varphi(u^{p-1}(u(w)))=0$ car $u^p=0$. Ainsi, en notant $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_G)$ (u_G est l'endomorphisme induit dans G par u), on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}N_p&0\\0&A\end{pmatrix}$ avec $N_p=\begin{pmatrix}0&1&&(0)\\\vdots&\ddots&\ddots&\\\vdots&&\ddots&1\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$.

e. Montrons cette propriété par récurrence, toute matrice nilpotente de taille n est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(N_{r_1},\cdots,N_{r_p})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par la formule de changement de bases, la version vectorielle de l'énoncé s'en suivra. Pour $n=1$, si $M\in\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est nilpotente, elle est nulle. Si $n=2$ et M nilpotente non nulle, on a forcément $\mathrm{Ker}(M)\neq0$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(M))=\dim(\mathrm{Im}\,(M))=1$. Si on avait $\mathbb{R}^2=\mathrm{Ker}(M)\oplus\mathrm{Im}\,(M)$, en posant $\mathrm{Im}\,(M)=\mathrm{Vect}(V)$, on aurait $MV=\alpha V$ avec un scalaire $\alpha\neq0$ donc $\forall k\in\mathbb{N}$, $M^kV=\alpha^kV\neq0$ et M ne serait pas nilpotente. Ainsi, $\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Im}\,(M)$ donc $M^2=0$ et en prenant $\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Im}\,(M)=\mathrm{Vect}(V_1)$ et V_2 tel que $V_1=f(V_2)$ alors on montre classiquement que (V_1,V_2) est libre donc que c'est une base de $\mathbb{R}^2$ et alors, en notant $P=(V_1\ V_2)$ la matrice de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$, on a $M=PN_2P^{-1}$ avec $N_2=E_{1,2}$ par construction.
Si $n\geqslant3$ et qu'on suppose la propriété vraie au rang $n-1$, si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente non nulle, en prenant u canoniquement associé à M, la question **d.** nous dit que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}N_p&0\\0&A\end{pmatrix}$ pour $p\geqslant1$ et $A\in\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$. Mais comme M est nilpotente, A l'est aussi et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. A est donc semblable à $D=\mathrm{diag}(N_{r_2},\cdots,N_{r_p})$: $A=QDQ^{-1}$ ce qui donne, en posant $U=\begin{pmatrix}I_p&0\\0&Q\end{pmatrix}$, $M=UD'U^{-1}$ avec $D'=\mathrm{diag}(N_{r_1},\cdots,N_{r_p})$ avec $r_1=r$ car $U^{-1}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&Q^{-1}\end{pmatrix}$. La récurrence est achevée et la question démontrée.

2.143 **a.** ($\Longrightarrow$) Supposons A monotone et soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX\geqslant0$. Alors $X=A^{-1}(AX)$ et comme tous les coefficients de A^{-1} et de AX sont positifs par hypothèse, la formule du produit matriciel garantit que X est aussi positif. Ainsi : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX\geqslant0\Longrightarrow X\geqslant0$.

($\Longleftarrow$) Supposons que $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX\geqslant0\Longrightarrow X\geqslant0$. D'abord, soit $X\in\mathrm{Ker}(A)$, alors $AX=0$ donc $AX\geqslant0\Longrightarrow X\geqslant0$ et $A(-X)\geqslant0\Longrightarrow-X\geqslant0$. On en déduit que $X=0$ donc que A est "injective" donc A est inversible. De plus, la k-ième colonne de A^{-1} vaut $A^{-1}E_k$ où E_k est le vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec un 1 en ligne k et des 0 partout ailleurs. Comme $A(A^{-1}E_k)=E_k\geqslant0$, on a donc $A^{-1}E_k\geqslant0$ donc tous les coefficients de la k-ième colonne de A^{-1} sont positifs. Ainsi $A^{-1}\geqslant0$ et A est donc monotone.

b. Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX=Y\geqslant0$. On pose ${}^tX=(x_1\ \cdots\ x_n)$ et ${}^tY=(y_1\ \cdots\ y_n)$. Soit $m\in[\![1;n]\!]$ un des indices tels que $x_m=\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ x_i$. Distinguons trois cas :

• Si $m=1$, $(2+a_1)x_1-x_2=y_1$ donc $(2+a_1)x_1=y_1+x_2\geqslant y_1+x_1\Longrightarrow(1+a_1)x_1\geqslant y_1\geqslant0$ et $x_1=x_m\geqslant0$.

• Si $m \in [\![2; n-1]\!]$, on a $-x_{m-1}+(2+a_m)x_m-x_{m+1} = y_{m+1}$ donc $(2+a_m x_m = y_m+x_{m-1}+x_{m+1} \geqslant y_m+2x_m$ et on a donc $a_m x_m \geqslant y_m$ ce qui prouve encore que $x_m \geqslant 0$.

• Si $m = n$, $(2+a_n)x_n - x_{n-1} = y_n$ et $(2+a_n)x_n \geqslant y_n + x_n \Longrightarrow (1+a_n)x_n \geqslant y_n \geqslant 0$ d'où $x_n = x_m \geqslant 0$.

Dans tous les cas, on a donc $x_m = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Min}}\ x_i \geqslant 0$ donc $X \geqslant 0$.
Soit $X \in \text{Ker}(A)$, on a $AX = 0 \geqslant 0$ donc $X \geqslant 0$ et $A(-X) = 0 \geqslant 0$ donc $-X \geqslant 0$, ainsi $X = 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible car $\text{Ker}(A) = \{0\}$. Par conséquent, la matrice proposée est bien monotone.

2.144 **a.** Soit $y \in \text{Im}\,(f)$, alors $f(y) \in \text{Im}\,(f)$ par définition donc $\text{Im}\,(f)$ est stable par f. Considérons l'application $g : \text{Im}\,(f) \to \text{Im}\,(f)$ telle que $\forall x \in \text{Im}\,(f),\ g(x) = f(x)$ (l'application induite par f dans $\text{Im}\,(f)$ qui existe par stabilité de $\text{Im}\,(f)$ par f). Si $x \in \text{Im}\,(f)$, alors $g(x) = f(x) \in \text{Im}\,(f^2)$. Réciproquement, si $y \in \text{Im}\,(f^2)$, alors $\exists x \in E,\ y = f^2(x) = f(f(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}\,(g)$ car $f(x) \in \text{Im}\,(f)$. On vient de montrer que $\text{Im}\,(g) = \text{Im}\,(f^2)$.

Soit $x \in E$, $x \in \text{Ker}(g) \Longleftrightarrow (x \in \text{Im}\,(f)$ et $g(x) = f(x) = 0_E) \Longleftrightarrow (x \in \text{Im}\,(f) \cap \text{Ker}(f))$.
Par conséquent, $\text{Ker}(g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Im}\,(f)$.
On applique maintenant la formule du rang à g. Cela donne $\text{rang}\,(f) = \text{rang}\,(g) + \dim(\text{Ker}(g))$ qui équivaut à $\dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f^2)) + \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}\,(f))$ en appliquant aussi la formule du rang à f et f^2. On en déduit que $\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}\,(f))$. Mais $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}\,(f) \subset \text{Ker}(f)$ donc $\dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}\,(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$ et on trouve bien $\dim(\text{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\text{Ker}(f))$.

b. Puisque $\dim(\text{Ker}(f)) = 3n - 2n = n$ d'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f^2)) \leqslant 2n$ d'après **a.**. Or comme $f^3 = f^2 \circ f = 0$, on sait qu'alors $\text{Im}\,(f) \subset \text{Ker}(f^2)$. Mais $\text{rang}\,(f) = 2n$ par hypothèse donc $\dim(\text{Ker}(f^2)) \geqslant 2n$. On en déduit bien que $\dim(\text{Ker}(f^2)) = 2n$ puis $\text{rang}\,(f^2) = n$ avec la formule du rang.

c. Avec les inclusions $\text{Im}\,(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}\,(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ et l'égalité des dimensions, on a $\text{Im}\,(f) = \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}\,(f^2) = \text{Ker}(f)$. On prend une base $(e_{2n+1}, \cdots, e_{3n})$ de $\text{Ker}(f) = \text{Im}\,(f^2)$. On y est incité par la forme de la matrice puisque les n derniers vecteurs de $\mathcal{B}$ doivent être dans le noyau. Par définition, il existe une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ de vecteurs de E tels que $\forall k \in [\![1; n]\!],\ f^2(e_k) = e_{2n+k}$.
On pose $\forall k \in [\![1; n]\!],\ e_{n+k} = f(e_k)$ et enfin $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}, e_{2n+1}, \cdots, e_{3n})$.
Vérifions que $\mathcal{B}$ est libre, soit donc $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant 3n} \in \mathbb{K}^{3n}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{3n} \lambda_k e_k = 0_E$ (1). On applique f^2 à cette relation (1) et il ne reste que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_{2n+k} = 0_E$ car $f^3 = 0$. Mais comme $(e_{2n+1}, \cdots, e_{3n})$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. On recommence en appliquant u à la relation (1), et on a $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \lambda_k e_{n+k} = 0_E$ car $f^3 = 0$. À nouveau $(e_{2n+1}, \cdots, e_{3n})$ est libre donc $\lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{2n} = 0$. Il ne reste donc dans (1) que $\sum\limits_{k=2n+1}^{3n} \lambda_k e_k = 0_E$ qui donne encore $\lambda_{2n+1} = \cdots = \lambda_{3n} = 0$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une famille libre de E.

$\mathcal{B}$ est une base de E car $\dim(E) = 3n = \text{card}\,(\mathcal{B})$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$ par construction de $\mathcal{B}$.

2.145 **a.** • Si f et p commutent, on sait d'après le cours que le noyau et l'image de p sont stables par f.

• Réciproquement, si c'est le cas, soit x un vecteur de E qu'on décompose $x = y + z$ avec $y = x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ et $z = p(x) \in \text{Im}\,(p)$, alors $p(x) = z$ donc $f \circ p(x) = f(z)$.
De plus $p \circ f(x) = p \circ f(y) + p \circ f(z)$ or $y \in \text{Ker}(p)$ donc $f(y) \in \text{Ker}(p)$ par hypothèse et $p \circ f(y) = 0_E$. Aussi $z \in \text{Im}\,(p)$ donc $f(z) \in \text{Im}\,(p)$ donc $p(f(z)) = f(z)$ car $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$. On a bien $f \circ p = p \circ f$.

Par double implication, on a prouvé l'équivalence entre (i) et (ii).
b. En posant $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base formée de $e_1, \cdots, e_r$ formant une base de Im (p) et $e_{r+1}, \cdots, e_n$ formant une base de $\mathrm{Ker}(p)$, la matrice de p dans cette base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et un endomorphisme f de E commute avec p si et seulement si, d'après la question précédente, sa matrice dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. On note D le sous-espace des matrices de cette forme. Ce qui précède montre que $\theta : C(f) \mapsto D$ défini par $\theta(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme donc $\dim(C(f)) = \dim(D) = r^2 + (n-r)^2$ si $n = \dim(E)$.

2.146 **a.** f associe bien un polynôme réel à un polynôme réel et f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ car on a la relation $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
b. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Si P n'est pas constant, on sait que P admet au moins une racine complexe α. Alors, puisque $P(X+1) = P(X)$, on a $P(\alpha+1) = 0$, puis $P(\alpha+2) = 0$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\alpha+n) = 0$ donc P admet une infinité de racines, c'est absurde ! Par conséquent, comme $f(1) = 0$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$.
On pouvait aussi dire que, par une récurrence facile : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$ donc le polynômes $P - P(0)$ s'annule en l'infinité des entiers naturels : $P - P(0) = 0$ donc $P = P(0)$ est bien constant.
c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \cdots, X^n)$, $f(1) = 0$ et $\forall k \in [\![1; n]\!],\ f(X^k) = (X+1)^k - X^k$ est de degré $k-1$ (les X^k s'éliminent) donc $f(X^k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: f induit une application linéaire f_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
d. Comme $P \in \mathrm{Ker}(f_n) \iff (P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(P) = 0) \iff (P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P \in \mathbb{R}_0[X])$, on en déduit que $\mathrm{Ker}(f_n) = \mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(f_n)) = 1$ et si on applique la formule du rang à f_n, on a $n+1 = 1 + \mathrm{rang}\,(f_n)$ donc $\mathrm{rang}\,(f_n) = \dim(\mathrm{Im}\,(f_n)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ donc $\mathrm{Im}\,(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (inclusion et égalité des dimensions) donc f_n est surjective.
f. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, en posant $n = \deg(P) + 1 \in \mathbb{N}^*$, on a $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc, par surjectivité de f_n, il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$ tel que $P = f_n(Q) = f(Q)$. Alors f est surjective.
g. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, comme f est surjective, il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(U) = Q$. En posant $P = U - U(0)$, on a bien $P(0) = 0$ et $f(P) = Q$ car $f(U(0)) = 0$. Si on avait un autre polynôme R tel que $R(0) = 0$ et $f(R) = Q$, alors on aurait $f(P-R) = 0$ donc $P - R$ constant d'après **b.** or $(P-R)(0) = 0$ donc $P = R$: on a bien existence et unicité de $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $f(P) = Q$.
De plus, $\sum\limits_{k=0}^{n} Q(k) = \sum\limits_{k=0}^{n} (P(k+1) - P(k) = P(n+1) - P(0) = P(n+1)$ par télescopage.
h. Pour P non constant, $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1$ donc on cherche un polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX$ tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$, ce qui revient à identifier dans $3aX^2 + 3aX + a + 2bX + b + c = X^2$ d'où $3a - 1 = 3a + 2b = a + b + c = 0$ soit $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{6}$.
Ainsi, $P = \frac{1}{6}(2X^3 - 3X^2 + X) = \dfrac{X(X-1)(2X-1)}{6}$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
i. Pour connaître $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ avec $p \geqslant 1$, il suffit de trouver par identification l'unique polynôme P de degré $p+1$ tel que $P(X+1) - P(X) = X^p$ et $P(0) = 0$ et on aura $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p = P(n+1)$.

2.147 **a.** Si f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors f' l'est aussi donc d va bien de E dans E et sa linéarité découle de celle de la dérivation. Ainsi, d est bien un endomorphisme de E. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$, alors $d(f_0) = -f_0$ et $d(f_k) = kf_{k-1} - f_k$ si $k \geqslant 1$. Dans les deux cas $d(f_k) \in E_n$ donc $E_n = \mathrm{Vect}(f_0, \cdots, f_n)$ est bien stable par d.
b. Par définition, $\mathcal{B}_n = (f_0, \cdots, f_n)$ est génératrice dans E_n. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x^k\Big)e^{-x} = 0$ et le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ s'annule en tout réel x car $e^{-x} \neq 0$. Alors $P = 0$ donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$: la famille $\mathcal{B}$ est donc aussi libre. $\mathcal{B}$ est une base de E_n d'où $\dim(E_n) = n+1$.
c. On a vu que $d(f_0) = -f_0$ et $d(f_k) = kf_{k-1} - f_k$ si $k \in [\![1; n]\!]$. Ainsi $A_n = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(d_n)$ avec $a_{k,k} = -1$, $a_{i,j} = j$ si $j \geqslant 1$ et $i = j-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
d. Comme $(f_0, \cdots, f_n)$ est une base de E_n et que $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\frac{1}{k!} \neq 0$, $\mathcal{B}' = (g_0, \cdots, g_n)$ est aussi une

base de E_n. Soit $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que l'on ait $\lambda_0(-g_0)+\lambda_1(g_0-g_1)+\cdots+\lambda_n(g_{n-1}-g_n)=0$, alors il vient $(\lambda_1-\lambda_0)g_0+(\lambda_2-\lambda_1)g_1+\cdots+(\lambda_n-\lambda_{n-1})g_{n-1}-\lambda_n g_n=0$, donc, $(g_0,\cdots,g_n)$ est libre : $\lambda_1-\lambda_0=\lambda_2-\lambda_1=\cdots=\lambda_n-\lambda_{n-1}=\lambda_n=0$ et on en déduit que $\lambda_0=\cdots=\lambda_n=0$. Par conséquent $\mathcal{B}''=(-g_0,g_0-g_1,g_1-g_2,\cdots,g_{n-1}-g_n)$ est libre donc c'est une base de E_n car elle a $n+1$ vecteurs. Or $d(g_0)=-g_0$ et $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $d(g_k)=\dfrac{1}{k!}d(f_k)=\dfrac{kf_{k-1}-f_k}{k!}=g_{k-1}-g_k$.

e. d_n envoie la base $\mathcal{B}'$ de E_n sur la base $\mathcal{B}''$ de E_n donc d_n est un automorphisme de E_n. On pouvait aussi dire que A_n est triangulaire supérieure avec des -1 sur la diagonale donc elle est inversible ; son déterminant vaut $(-1)^{n+1}\neq 0$. $d_n^{-1}(f_0)=-f_0$ et, pour $j\in[\![1;n]\!]$, comme g_j est la somme des $j+1$ premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}''$, on a $g_j=-(-g_0-\sum\limits_{k=1}^{j}(g_{k-1}-g_k))=-\sum\limits_{k=0}^{j}d(g_k)=d_n\Big(-\sum\limits_{k=0}^{j}g_k\Big)$. Ainsi $d_n^{-1}(g_j)=-\sum\limits_{k=0}^{j}g_k$ donc $\dfrac{1}{j!}d_n^{-1}(f_j)=-\sum\limits_{k=0}^{j}\dfrac{f_k}{k!}$ et on a enfin $d_n^{-1}(f_j)=-\sum\limits_{k=0}^{j}\dfrac{j!f_k}{k!}$. Comme $A_n^{-1}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(d_n^{-1})$, il vient $A_n^{-1}=(b_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{i,j}=0$ si $i>j$ et $b_{i,j}=-\dfrac{j!}{i!}$ si $i\leqslant j$.

2.148 **a.** Si $P\in\mathbb{R}_2[X]$, il est clair que $\dfrac{1}{2}\Big(P\Big(\dfrac{X}{2}\Big)+P\Big(\dfrac{X+1}{2}\Big)\Big)\in\mathbb{R}_2[X]$ et la linéarité de f se démontre de manière classique donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $f(1)=1$, $f(X)=\dfrac{X}{2}+\dfrac{1}{4}$ et $f(X^2)=\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{X}{4}+\dfrac{1}{8}$, on a $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&1/4&1/8\\0&1/2&1/4\\0&0&1/4\end{pmatrix}$ si $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Comme $\det(A)=8\neq 0$, f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donc f est injective et surjective.

c. Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}_2[X])^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $g(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)(1)=\lambda P(1)+Q(1)=\lambda g(P)+g(Q)$ donc g est linéaire. C'est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_2[X]$ donc $\mathrm{Ker}(g)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$. Or, pour $P\in\mathbb{R}_2[X]$, $P(1)=0\iff(X-1)|P\iff\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ P=(X-1)(aX+b)=aX(X-1)+b(X-1)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Vect}(X(X-1),X-1)$. Comme $(X(X-1),X-1)$ est libre car de degrés échelonnés, $(X(X-1),X-1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$: $\dim(\mathrm{Ker}(g))=2$.

d. g n'est pas injective car $\mathrm{Ker}(g)\neq\{0\}$. Par contre, g est une forme linéaire non nulle donc g est surjective.

e. Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(A)=0$. A étant triangulaire supérieure, les puissances de A aussi, avec les puissances 1, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$ sur la diagonale : $P(A)=\begin{pmatrix}P(1)&*&*\\0&P(1/2)&*\\0&0&P(1/4)\end{pmatrix}$ d'où $P(1)=P\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=P\Big(\dfrac{1}{4}\Big)=0$ donc, si on impose P unitaire, forcément $P=(X-1)\Big(X-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(X-\dfrac{1}{4}\Big)$. Réciproquement, on vérifie que
$$P(A)=(A-I_3)\Big(A-\frac{I_3}{2}\Big)\Big(A-\frac{I_3}{4}\Big)=\begin{pmatrix}0&1/4&1/8\\0&-1/2&1/4\\0&0&-3/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&1/4&1/8\\0&0&1/4\\0&0&-1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/4&1/4&1/8\\0&1/4&1/4\\0&0&0\end{pmatrix}=0.$$
Soit $n\in\mathbb{N}$, la division euclidienne de X^n par P donne $X^n=PQ+R$ avec $R(1)=1$, $R\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{1}{2^n}$ et $R\Big(\dfrac{1}{4}\Big)=\dfrac{1}{4^n}$ donc $R=\dfrac{(X-1/2)(X-1/4)}{(1-1/2)(1-1/4)}+\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{(X-1)(X-1/4)}{(1/2-1)(1/2-1/4)}+\dfrac{1}{4^n}\times\dfrac{(X-1)(X-1/2)}{(1/4-1)(1/4-1/2)}$. Sans aller jusqu'au bout des calculs, il suffit d'écrire $A^n=P(A)Q(A)+R(A)=R(A)$ pour avoir une expression de A^n en fonction de I_3, A et A^2 qui permettra d'avoir $f^n(aX^2+bX+c)$ en fonction de a, b et c et n.

On pouvait aussi chercher trois vecteurs v_1,v_2,v_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $AV_1=V_1$, $AV_2=\dfrac{V_2}{2}$ et $AV_3=\dfrac{V_3}{4}$. On trouve facilement, par exemple, $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,-2,0)$ et $v_3=(1,-6,6)$. On vérifie facilement que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(1, 1/2, 1/4)$. On en déduit alors que $A^n = PD^nP^{-1}$.

2.149 **a.** Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\left(AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\right)$. Or, d'après le cours sur les complexes, $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{AC}{AB} e^{i(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$. Ainsi, ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si l'on a $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2 \iff (c-a) = -j^2(b-a) \iff c + j^2 b - (1+j^2)a = 0 \iff c + j^2 b + ja = 0$ car $1 + j + j^2 = 0$. De même, (ABC est équilatéral indirect) $\iff \dfrac{c-a}{b-a} = e^{\frac{-i\pi}{3}} = -j \iff c + jb + j^2 a = 0$.

On a mis à part le cas où les trois points A, B, C sont confondus ($b = a$) : triangle ponctuel... mais équilatéral.

b. La matrice V_n possède $n-2$ lignes et n colonnes donc $\mathrm{rang}\,(V_n) \leqslant \mathrm{Min}(n-2, n) = n-2$. De plus, si on considère la matrice $V'_n \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ obtenue en ne gardant que les $n-2$ premières colonnes de V_n, alors $V'_n = (\omega_n^{i(j-1)})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-2}}$ est la matrice de VANDERMONDE associée aux $n-2$ complexes $\omega_n, \omega_n^2, \cdots, \omega_n^{n-2}$. Si $1 \leqslant p < q \leqslant n-2$, $0 < \dfrac{2q\pi}{n} - \dfrac{2p\pi}{n} = \dfrac{2(q-p)\pi}{n} \leqslant \dfrac{2(n-3)\pi}{n} < 2\pi$ donc $\dfrac{2q\pi}{n} \not\equiv \dfrac{2p\pi}{n}$ $[2\pi]$ ce qui prouve que $\omega_n^p = e^{\frac{2ip\pi}{n}} \neq e^{\frac{2iq\pi}{n}} = \omega_n^q$. Ainsi, ces $n-2$ complexes sont distincts deux à deux donc V'_n est inversible et son déterminant D' vaut $\displaystyle\prod_{1 \leqslant p < q \leqslant n-2} (\omega_n^q - \omega_n^p) \neq 0$ d'après le cours. Les $n-2$ premières colonnes de V_n forment donc une famille libre ce qui justifie que $\mathrm{rang}\,(V_n) \geqslant n-2$. Par conséquent, $\mathrm{rang}\,(V_n) = n-2$.

c. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, comme $\omega_n^k \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} = \frac{(\omega_n^k)^n - 1}{\omega_n^k - 1} = 0$ car $(\omega_n^k)^n = (\omega_n^n)^k = 1^k = 1$.

d. D'après la formule du rang et le résultat de la question **b.**, comme $\mathrm{rang}\,(V_n) = n-2$, on en déduit que $n = \dim(\mathbb{C}^n) = \dim(\mathrm{Ker}(V_n)) + \mathrm{rang}\,(V_n)$ donc $\mathrm{Ker}(V_n)$ est un plan (de dimension 2). Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $U^T = (1\ 1 \cdots\ 1)$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $V^T = (1\ \omega_n \cdots \omega_n^{n-1})$.

- Comme $\forall i \in [\![1; n-2]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \omega_n^{i(j-1)} \times 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{ik} = 0$ d'après la question **c.** car $i \in [\![1; n-2]\!] \subset [\![1; n-1]\!]$ avec le changement d'indice $k = j-1$, on a $U \in \mathrm{Ker}(V_n)$.
- Comme $\forall i \in [\![1; n-2]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \omega_n^{i(j-1)} \times \omega_n^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(i+1)k} = 0$ d'après **c.** car $i+1 \in [\![2; n-1]\!] \subset [\![1; n-1]\!]$ avec le même changement d'indice, on conclut que $V \in \mathrm{Ker}(V_n)$.

Comme (U, V) est une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Ker}(V_n)$ qui est un plan, on a $\mathrm{Ker}(V_n) = \mathrm{Vect}(U, V)$.

e. ($\Longleftarrow$) Si $A_1 \cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés, en notant Ω son centre d'affixe $m = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, alors il existe un rayon $r \geqslant 0$ et un angle θ tel que $\forall p \in [\![1; n]\!]$, $a_p = m + re^{i\theta}\omega_n^{p-1}$ par définition et on trouve alors (en posant $j = p-1$), pour $k \in [\![1; n-2]\!]$:

$$a_1 + a_2\omega_n^k + \cdots + a_n\omega_n^{k(n-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}\omega_n^{jk} = m\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} + re^{i\theta}\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{j(k+1)} = m \times 0 + re^{i\theta} \times 0 = 0$$

d'après la question **c.** puisque $(k, k+1) \in [\![1; n-1]\!]^2$.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, $\forall k \in [\![1; n-2]\!]$, $a_1 + a_2\omega_n^k + \cdots + a_n\omega_n^{k(n-1)} = 0$, alors $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathrm{Ker}(V_n)$ donc, d'après la question **d.**, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(a_1 \cdots a_n)^T = aU^T + bV^T = a(1 \cdots 1) + b(1\ \omega_n \cdots \omega_n^{n-1})$. En notant $b = re^{i\theta}$, on a donc $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $a_k = a + re^{i\theta}\omega_n^{k-1}$ ce qui montre bien que $A_1 \cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés (avec le cas particulier où $b = 0$ et où tous ces points sont confondus).

Par double implication, pour $n \geqslant 3$ points $A_1, \dots, A_n$ du plan d'affixes respectives $a_1, \dots, a_n$: $A_1 \cdots A_n$ est un polygone régulier direct à n côtés si et seulement si $\forall k \in [\![1; n-2]\!],\ a_1 + a_2\omega_n^k + \cdots + a_n\omega_n^{k(n-1)} = 0$.

2.150 **a.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire, alors comme $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}(1, i)$ (dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et par $\mathbb{R}$-linéarité de f, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = f(x1 + yi) = xf(1) + yf(i)$. Or $x = \mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$. Ainsi, $f(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}f(1) + \dfrac{z-\overline{z}}{2i}f(i) = \alpha z + \beta\overline{z}$ en notant $\alpha = \dfrac{f(1)}{2} + \dfrac{f(i)}{2i}$ et $\beta = \dfrac{f(1)}{2} - \dfrac{f(i)}{2i}$.
Réciproquement, soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe deux complexes α et β tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$. Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, comme $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$ par exemple car λ est réel, f est $\mathbb{R}$-linéaire car on a $f(\lambda z + \mu z') = \alpha(\lambda z + \mu z') + \beta\overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda\alpha z + \mu\alpha z' + \lambda\beta\overline{z} + \mu\beta\overline{z'} = \lambda(\alpha z + \beta\overline{z}) + \mu(\alpha z' + \beta\overline{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z')$.
Par double implication, f est $\mathbb{R}$-linéaire si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,\ \forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$.

b. Avec ces conditions sur f, on a $f(1) = \alpha + \beta$ et $f(i) = \alpha i - \beta i$ donc, en résolvant ce système linéaire élémentaire, on trouve $\alpha = \dfrac{1}{2}\big(f(1) - if(i)\big)$ et $\beta = \dfrac{1}{2}\big(f(1) + if(i)\big)$: α et β sont entièrement déterminés par f.

c. La matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, i)$ de $\mathbb{C}$ est alors, après quelques calculs élémentaires, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\alpha) + \mathrm{Re}\,(\beta) & -\mathrm{Im}(\alpha) + \mathrm{Im}(\beta) \\ \mathrm{Im}(\alpha) + \mathrm{Im}(\beta) & \mathrm{Re}\,(\alpha) - \mathrm{Re}\,(\beta) \end{pmatrix}$. Or f est un automorphisme de $\mathbb{C}$ si et seulement si $\det(f) = \det(A) \neq 0$, $f \in GL(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Re}\,(\alpha)^2 - \mathrm{Re}\,(\beta)^2 + \mathrm{Im}(\alpha)^2 - \mathrm{Im}(\beta)^2 = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0 \iff |\alpha| \neq |\beta|$.

d. Cette réflexion est bien $\mathbb{R}$-linéaire (en identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ de la manière classique) par construction donc il existe d'après la question **a.** deux constantes α et β complexes telles que $\forall z \in \mathbb{C},\ r_\theta(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$. Comme le vecteur $\overrightarrow{w} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ d'affixe $ie^{i\theta}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $e^{i\theta}$, $r_\theta(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ et $r_\theta(ie^{i\theta}) = -ie^{i\theta}$. On a encore un système linéaire $\alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = e^{i\theta}$, $\alpha ie^{i\theta} - \beta ie^{-i\theta} = -ie^{i\theta}$ à résoudre, ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = e^{2i\theta}$. Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C},\ r_\theta(z) = e^{2i\theta}\overline{z}$.

2.151 **a.** On a $\mathrm{Im}\,(u+v) \subset \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ donc, par croissance de dimension, $\mathrm{rang}\,(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v))$ donc, avec Grassmann, $\mathrm{rang}\,(u+v) \leqslant \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v) - \dim(\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)) \leqslant \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v)$.
Si on applique ce qui précède à $u+v$ et $-v$, on a $\mathrm{rang}\,(u) = \mathrm{rang}\,(u+v-v) \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v) + \mathrm{rang}\,(-v)$ or $\mathrm{rang}\,(-v) = \mathrm{rang}\,(v)$ car $\mathrm{Im}\,(-v) = \mathrm{Im}\,(v)$ donc $\mathrm{rang}\,(u+v) \geqslant \mathrm{rang}\,(u) - \mathrm{rang}\,(v)$. Par symétrie entre u et v, on a aussi $\mathrm{rang}\,(u+v) \geqslant \mathrm{rang}\,(v) - \mathrm{rang}\,(u)$ ce qui montre bien que $\big|\mathrm{rang}\,(u) - \mathrm{rang}\,(v)\big| \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v)$.
Au final, on a bien la double inégalité : $\big|\mathrm{rang}\,(u) - \mathrm{rang}\,(v)\big| \leqslant \mathrm{rang}\,(u+v) \leqslant \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v)$.

b. Comme $\mathrm{Im}\,(p) = F$ et $\mathrm{Im}\,(q) = G$ par propriété d'un projecteur, on obtient, comme on sait aussi que $F \oplus G = E$, la relation $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$, alors $p(x) + q(x) = 0_E$. Ainsi, $q(p(x) + q(x)) = q(0_E) = 0_E$. Or $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}\,(p)$ donc $q \circ p = 0$ et on obtient, puisque q est linéaire et que $q^2 = q$, $q(x) = 0_E$. On a donc $p(x) = q(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) = H \cap F = \{0_E\}$ car $E = F \oplus H$. Comme $\mathrm{Ker}(p+q) = \{0_E\}$, on en déduit que $p+q$ est injective donc que c'est un automorphisme de E (on est en dimension finie). Par conséquent, $\mathrm{rang}\,(p+q) = \dim(E) = \mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q)$.

c. D'après **a.**, $\mathrm{rang}\,(u+v) = \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v) \iff (\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ et $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0_E\})$.
Il s'agit donc de montrer qu'on a équivalence entre $\big(\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ et $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0_E\}\big)$ et $\big(\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E\big)$. Supposons donc que $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0_E\}$ et montrons qu'on a l'équivalence $\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v) \iff \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E$ (E).

($\Longrightarrow$) Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc $f(x)\mathrm{Im}\,(f+g)$ (c'est l'inclusion intéressante) donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = (f+g)(y) = f(y) + g(y)$ et on a donc $f(x-y) = g(y) \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)$ d'où, par hypothèse, $f(x-y) = g(y) = 0_E$ donc $x-y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Ker}(g)$. Comme $x = (x-y)+y$, on a bien $x \in \mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Ker}(g)$.

($\Longleftarrow$) On a toujours $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$. Soit $a \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$, alors il existe $b \in E$ et $c \in E$ tels que $a = f(b) + g(c)$. On décompose, par hypothèse, $b = x + y$ avec $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Ker}(g)$ et $c = v + w$ avec $v \in \mathrm{Ker}(f)$ et $w \in \mathrm{Ker}(g)$. Alors $a = f(x+y) + g(v+w) = f(y) + g(v) = (f+g)(y+v)$ car $y \in \mathrm{Ker}(g)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f)$. On a donc bien $a \in \mathrm{Im}\,(f+g)$.

Par double implication, on a montré l'équivalence (E) ce qui permet d'affirmer l'équivalence souhaitée : $\mathrm{rang}\,(u+v) = \mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{rang}\,(v) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E\big)$.

2.152 **a.** Comme f est un endomorphisme de E, f^n en est aussi un pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ainsi $\mathrm{Ker}(f^n)$ et $\mathrm{Im}\,(f^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

- En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels, I (le cœur de f) est un sous-espace vectoriel de E.
- K est non vide car $K_0 = \mathrm{Ker}(f^0) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ est inclus dans K. Soit $(x,y) \in K^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Par définition d'une réunion, il existe deux entiers m et n tels que $x \in K_m$ et $y \in K_n$. Sans perte de généralité, supposons que $m \leqslant n$. Alors $f^n(x) = f^{n-m} \circ f^m(x) = f^{n-m}((f^m(x)) = f^{n-m}(0_E) = 0_E$ donc $x \in K_n$. Comme K_n est un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda x + \mu y \in K_n \subset K$. Ainsi, K est stable par combinaison linéaire et non vide donc K est un sous-espace vectoriel de E.

b. Si $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$, $f^k(x) = 0_E$ donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0_E$ d'où $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Si $y \in \mathrm{Im}\,(f^{k+1})$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in \mathrm{Im}\,(f^k)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}\,(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}\,(f^k)$. Ainsi, la suite $\big(\dim(\mathrm{Ker}(f^k))\big)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ est croissante et majorée par $n = \dim(E)$ donc il existe forcément un entier $N \leqslant n$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f^N)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^{N+1}))$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(f^N) = \mathrm{Ker}(f^{N+1})$ (inclusion et égalité des dimensions). En effet, si $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^{k+1})) > \dim(\mathrm{Ker}(f^k))$, on aurait facilement par récurrence $\forall k \in [\![0;n+1]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) \geqslant k$ ce qui est impossible car $\dim(\mathrm{Ker}(f^n)) \leqslant n$ car $\mathrm{Ker}(f^n) \subset E$.

S'il existe $k \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{N+k}) = \mathrm{Ker}(f^N)$, on a déjà $\mathrm{Ker}(f^{N+k}) \subset \mathrm{Ker}(f^{N+k+1})$ et si $x \in \mathrm{Ker}(f^{N+k+1})$, il vient $f^{N+k}(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{N+k}) = \mathrm{Ker}(f^N)$ donc $f^{N+1}(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Ker}(f^{N+1}) = \mathrm{Ker}(f^N)$. Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(f^{N+k}) = \mathrm{Ker}(f^N)$. Par principe de récurrence, $\forall k \geqslant 0,\ K_{N+k} = K_N$.

Montrons par double inclusion que $K = K_N$. Par définition d'une réunion, on a $\mathrm{Ker}(f^N) = K_N \subset K$.

Soit $x \in K$, par définition il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K_i$.

- Soit $i \leqslant N$ et alors $x \in K_i \subset K_N$ d'après la croissance des noyaux itérés et on a $x \in K_N$.
- Soit $i > N$ et alors $i = N + k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in K_{N+k} = K_N$ d'après ce qui précède.

On a bien établi que $K = K_N$.

c. Comme avant, et puisqu'avec la formule du rang on a $\mathrm{rang}\,(f^{N+k}) = \mathrm{rang}\,(f^N)$ pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Im}\,(f^{N+k}) = \mathrm{Im}\,(f^N)$ par inclusion te égalité des dimensions. Comme en **b.**, on en déduit que $I = I_N$.

- Si $x \in K = K^N$, on a $f^N(x) = 0_E$ donc $f^{N+1}(x) = f^N(f(x)) = f^(f^N(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in K_N = K$ ce qui montre que K est stable par l'endomorphisme f.

• Si $y \in I = I_N$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^N(x)$ donc $f(y) = f^{N+1}(x) \in I_{N+1} = I_N = I$ donc I est aussi stable par l'endomorphisme f.

Soit $x \in I \cap K$, alors $f^N(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^N(y)$ car $I = I_N$ et $K = K_N$. Ainsi, $f^N(x) = f^N(f^N(y)) = f^{2N}(y) = 0_E$ donc $y \in K_{2N} = K_N$ donc $x = f^N(y) = 0_E$. Ainsi, I et K sont en somme directe et, comme $\dim(I) + \dim(K) = \dim(\mathrm{Ker}(f^N)) + \mathrm{rang}\,(f^N) = n = \dim(E)$ par la formule du rang, on en déduit que $E = I \oplus K$: I et K sont supplémentaires dans E.

d. Comme I et K sont stables par f, on peut définir les deux endomorphismes induits f_I et f_K induits respectivement par f dans I et dans K.

<u>Pour f_I</u> : on a l'équivalence $x \in \mathrm{Ker}(f_I) \iff (x \in I \text{ et } f(x) = 0_E) \iff x \in I \cap \mathrm{Ker}(f)$ qui justifie l'égalité $\mathrm{Ker}(f_I) = I \cap \mathrm{Ker}(f)$. Or $\mathrm{Ker}(f) \subset K$ donc $\mathrm{Ker}(f_I) \subset I \cap K = \{0_E\}$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(f_I) = \{0_E\}$ et donc que f_I est injective. Soit $y \in I = I_N = I_{N+1}$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{N+1}(x) = f(f^N(x)) = f(z)$ avec $z = f^N(x) = I_N = I$. Ainsi, $y = f_I(z)$ et f_I est surjective. Par conséquent, f_I est un automorphisme de I.

<u>Pour f_N</u> : soit $x \in K$, comme $K = K_N = \mathrm{Ker}(f^N)$, on a $f_K^N(x) = f^N(x) = 0_E$ donc $f_K^N = 0$ et f_K est un endomorphisme de K qui est nilpotent d'indice inférieur ou égal à N.

2.153 **a.** <u>Méthode 1</u> : le polynôme $P = X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{2}$ annule f par hypothèse. Soit $n \in \mathbb{N}$, on écrit $X^n = PQ_n + R_n$ la division euclidienne de X^n par P avec $R_n = a_nX + b_n$ (où $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^n$) car $\deg(R_n) < \deg(P) = 2$. Ainsi, en substituant l'endomorphisme f à X, on obtient $f^n = P(f) \circ Q_n(f) + R_n(f) = a_nf + b_n\mathrm{id}_E$. Ceci justifie bien l'existence de deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = a_nf + b_n\mathrm{id}_E$.

<u>Méthode 2</u> : $f^0 = \mathrm{id}_E = 0.f + 1.\mathrm{id}_E$ et $f^1 = f = 1.f + 0.\mathrm{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = a_nf + b_n\mathrm{id}_E$, alors $f^{n+1} = a_nf^2 + b_nf = \frac{a_n}{2}(f + \mathrm{id}_E) + b_nf = \left(\frac{a_n}{2} + b_n\right)f + \frac{a_n}{2}\mathrm{id}_E$. En posant $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, on a bien $f^{n+1} = a_{n+1}f + b_{n+1}\mathrm{id}_E$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ f^n = a_nf + b_n\mathrm{id}_E$ ce qui justifie encore l'existence de deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = a_nf + b_n\mathrm{id}_E$.

b. Si f est une homothétie, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\mathrm{id}_E$ donc $\lambda^2 = \frac{\lambda + 1}{2}$ d'après l'énoncé donc $P(\lambda) = 0$. Comme $P = (X - 1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$, on a $f = \mathrm{id}_E$ ou $f = -\frac{\mathrm{id}_E}{2}$. Dans ce cas, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas uniques car la famille (f, id_E) est liée. Plus précisément, si $f = \mathrm{id}_E$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \mathrm{id}_E$ donc une fois a_n quelconque choisi, on peut prendre $b_n = 1 - a_n$. De même, si $f = -\frac{\mathrm{id}_E}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{id}_E$ donc une fois a_n quelconque choisi, on peut prendre $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{a_n}{2}$.

Par contre, si f n'est pas une homothétie, (f, id_E) est libre donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de **a.** sont uniques.

c. <u>Méthode 1</u> : reprenons la division euclidienne $X^n = PQ_n + a_nX + b_n$ et évaluons en 1 et $-\frac{1}{2}$ (les racines de P). Alors $a_n + b_n = 1^n = 1$ car $P(1) = 0$ et $-\frac{a_n}{2} + b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ car $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. On résout ce système et $a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et $b_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Ainsi, $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$ et $\beta = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

<u>Méthode 2</u> : pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}$. L'équation caractéristique associée est $z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{2} = 0$ donc les solutions sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Ainsi, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Comme

$a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ d'après **a.**, on a $\lambda+\mu = 0$ et $\lambda - \frac{\mu}{2} = 1$ donc $\lambda = \frac{2}{3} = -\mu$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2}{3}\Big(1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big)$. Si $n \geqslant 1$, $b_n = \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{3}\Big(1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big) = \frac{1}{3}\Big(1+2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\Big)$. Cette formule marche encore pur $n = 0$ car $b_0 = 1$. On retrouve les relations de la première méthode donc les mêmes limites $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$.

d. Posons donc $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{id}_E = \frac{1}{3}(2f + \mathrm{id}_E)$. Alors p est un endomorphisme de E, c'est un projecteur de E car $p^2 = \frac{1}{9}\big(4f^2 + 4f + \mathrm{id}_E\big) = \frac{1}{9}\big(2f + 2\mathrm{id}_E + 4f + \mathrm{id}_E\big) = \frac{1}{3}(2f + \mathrm{id}_E) = p$. Les sous-espaces importants sont $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = E_1(f)$ et $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(2f + \mathrm{id}_E) = E_{-1/2}(f)$ (qui sont des sous-espaces propres de f) donc p est la projection sur $E_1(f)$ parallèlement à $E_{-1/2}(f)$ (p est un projecteur spectral car f est diagonalisable puisque le polynôme P annulateur de f est scindé à racines simples).

2.154 **a.** Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de E. Comme $(v_k, f(v_k))$ est liée pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ par hypothèse, il existe des scalaires λ_k tels que $f(v_k) = \lambda_k v_k$ car $(v_k, f(v_k))$ est liée et $v_k \neq 0_E$. Comme $v = v_1 + \cdots + v_n \neq 0_E$, il existe un scalaire λ tel que $f(v) = \lambda v$ ce qui équivaut à $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda(v_1 + \cdots + v_n)$ donc, puisque $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre, à $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. Ainsi, f et l'homothétie de rapport λ coïncident sur une base et on peut conclure d'après le cours que $f = \lambda\,\mathrm{id}_E$.

b. Montrons la contre-apposée de cette assertion : $(\forall x \in E,\ (x, f(x))$ liée$) \Longrightarrow (f = 0$ ou $\mathrm{Tr}\,(f) \neq 0)$. Cela découle de la question précédente car si $(x, f(x))$ est liée pour tout vecteur x de E, alors f est une homothétie, disons $f = \lambda\mathrm{id}_E$. Alors on a deux cas, soit $\lambda = 0$ et $f = 0$, soit $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{Tr}\,(f) = \lambda\mathrm{Tr}\,(\mathrm{id}_E) = n\lambda \neq 0$.

c. Si f est non nul et que $\mathrm{Tr}\,(f) = 0$, on sait d'après la question **b.** qu'il existe au moins un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1))$ est libre (ce qui justifie que $x_1 \neq 0_E$). Posons $x_2 = f(x_1)$. Comme (x_1, x_2) est libre, on peut donc compléter la famille (x_1, x_2) en une base $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ de E. La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est bien, par construction, de la forme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ (matrice carrée) et on a même ${}^tC = (1\ 0\ \cdots\ 0)$.

d. Effectuons une récurrence sur la taille de la matrice M.

• Si $n = 1$, il est évident que si $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et si $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$, alors $M = 0$ donc M est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle. On a même $\forall P \in GL_1(\mathbb{K}),\ M = P\,0P^{-1} = 0$.

• Supposons le résultat établi pour des matrices de taille $n \geqslant 1$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$. Si $M = 0$, la matrice M est elle-même à diagonale nulle et le tour est joué ! Si $M \neq 0$, d'après **c.**, en posant f l'endomorphisme canoniquement associé à M, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathrm{Tr}\,(M) = 0 + \mathrm{Tr}\,(A)$, on a aussi $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$. En posant Q la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, on a donc, par formule de changement de base, $M = Q\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}Q^{-1}$. Or, par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $R \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = RNR^{-1}$ où $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice à diagonale nulle. Posons $Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, alors Q' est inversible et $Q'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$. En calculant par blocs, $Q'^{-1}\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}Q' = \begin{pmatrix} 0 & LR \\ R^{-1}C & N \end{pmatrix}$

donc $M = QQ'UQ'^{-1}Q^{-1}$ avec $U = \begin{pmatrix} 0 & LR \\ R^{-1}C & N \end{pmatrix}$ dont la diagonale est nulle. Comme QQ' est inversible comme produit de matrices inversibles et que $Q'^{-1}Q^{-1} = (QQ')^{-1}$, M est bien semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Par principe de récurrence, on a bien montré que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}\,(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

2.155 **a.** Rendons cet exercice plus général en constatant (par calculs) que $A^3 = 2A^2$. Prenons dans **a.** un endomorphisme d'un espace E tel que $f^3 = 2f^2$, c'est-à-dire tel que $X^3 - 2X^2 = X^2(X-2)$ soit un polynôme annulateur de f. Soit $x \in E$.

<u>Analyse</u> : supposons qu'il existe $(y, z) \in \text{Ker}(f^2) \times \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ tel que $x = y + z$. En appliquant f^2 à cette relation, on a $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z) = 0_E + 2(2z) = 4z$ donc $y = x - \dfrac{f^2(x)}{4}$ et $z = \dfrac{f^2(x)}{4}$.

<u>Synthèse</u> : posons $y = x - \dfrac{f^2(x)}{4}$ et $z = \dfrac{f^2(x)}{4}$, il est clair que $x = y + z$. De plus, $f^2(y) = f^2(x) - \dfrac{f^4(x)}{4} = 0$ car $f^3 = 2f$ donc $f^4 = 2f^3 = 4f^2$ donc $y \in \text{Ker}(f^2)$. Enfin, $f(z) - 2z = \dfrac{f^3(x)}{4} - \dfrac{f^2(x)}{2} = \dfrac{f^3(x) - 2f^2(x)}{4} = 0$ car $f^3 = 2f^2$ ce qui prouve que $z \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

On vient de prouver par analyse/synthèse que $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

Avec la matrice A de l'énoncé, il était plus simple de calculer $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de constater que A^2 est de rang 1 donc, par la formule du rang, que $\dim(\text{Ker}(f^2)) = 2$. Comme les vecteurs $w_1 = (1,0,1)$ et $w_2 = (3,1,0)$ sont clairement dans $\text{Ker}(f^2)$ car les colonnes C_1, C_2, C_3 de A^2 vérifient $C_1 + C_3 = 3C_1 + C_2 = 0$ et que w_1 et w_2 sont non colinéaires, on a $\text{Ker}(f^2) = \text{Vect}(w_1, w_2)$. De plus, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ et on voit que la différence des deux premières colonnes de cette matrice est nulle donc $\text{rang}\,(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 2$ car les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Toujours d'après la formule du rang, on a $\dim(\text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})) = 1$ et $\text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(w_3)$ avec $w_3 = (1,1,0)$. Comme la famille $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant $2 \neq 0$, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

b. A est de rang 2 donc, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ et il est visible que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,0,1)$. Ainsi, on peut prendre $w_2 \in \text{Ker}(f^2) \setminus \text{Ker}(f)$ d'après la question **a.**.

c. On cherche d'après l'énoncé une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_1$ et $f(v_3) = 2v_3$. Comme ceci implique $f^2(v_2) = f(f(v_2)) = f(v_1) = 0$ et que $f(v_2) = v_1 \neq 0$ car v_1 est un vecteur de base, on est incité à prendre $v_2 = w_2 = (3,1,0)$. Forcément, $v_1 = f(v_2) = (4,0,4)$ et on prend $v_3 = w_3 = (1,1,0)$. Comme avant, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on a par construction $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.156 **a.** Si $m \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ et qu'on pose la matrice $M = \left(\lambda_i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, alors la formule de VANDERMONDE donne le déterminant $\det(M) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\lambda_j - \lambda_i)$.

b. Si on dérive $n-p$ fois la relation $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^n = 0$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(p+1)\lambda_k(X+k)^{n-(n-p)} = 0$ et, en simplifiant par $n(n-1)\cdots(p+1) = \dfrac{n!}{p!} \neq 0$, on obtient bien $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X+k)^p = 0$ pour tout $p \in [\![0;n]\!]$.

c. En substituant dans la relation précédente X par 0, on a immédiatement $\forall p \in [\![0;n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k k^p = 0$.

d. En définissant $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ par ${}^tX = (\lambda_0 \ \cdots \ \lambda_n)$, les formules de **c.** s'écrivent matriciellement sous la forme $MX = 0$ où $M = \left(j^i\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Mais d'après la question **a.**, $\det(M) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i) \neq 0$ donc M est inversible et $MX = 0$ implique alors $X = 0$. Comme $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n =)0$, on en déduit que la famille $\left((X+k)^n\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre. Mais comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et que cette famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ est libre, $\left((X+k)^n\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.157 **a.** E est classiquement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, lui-même sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. F est une partie non vide de E car la fonction nulle 0 appartient bien à F. De plus, si $(f,g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $h = \lambda f + \mu g$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie bien $h(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$ et $h'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$ par linéarité de la dérivation. Ainsi, $\lambda f + \mu g \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E.

b. L'appartenance de f à F impose deux conditions à la fonction f donc on pense à un supplémentaire de F qui est un plan. Il vient naturellement à l'esprit le plan $G = \mathbb{R}_1[x] = \{f : x \mapsto ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ des fonctions affines. Il est classique que G est un sous-espace de E : la fonction nulle $x \mapsto 0.x + 0 = 0$ est affine et toute combinaison $\lambda f + \mu g$ de fonctions affines $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto a'x + b'$ est elle-même affine car $\lambda f + \mu g : x \mapsto (\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')$.

De plus, si $f \in F \cap G$, alors il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ et $f(0) = b = f'(0) = a = 0$ donc f est la fonction nulle : on a déjà $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe.

Soit $h \in E$, en posant $g(x) = h(0) + xh'(0)$ et $f(x) = h(x) - h(0) - xh'(0)$ (expression qu'on peut trouver par analyse-synthèse) et on a $h = f + g$, g est affine et $f \in F$ car $f(0) = f'(0) = 0$. Par conséquent, $E = F + G$.

Comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$, on a $E = F \oplus G$ qui se traduit par "F et G sont supplémentaires dans E".

c. Par construction, l'expression de la projection $p : E \to E$ sur G parallèlement à F est $p(h) = g$ avec $g : x \mapsto h(0) + xh'(0)$ (on ne garde que la composante selon G dans l'écriture de la fonction h sous forme d'une somme de fonction de F et de G).

2.158 Méthode 1 : posons $u_n = x_n + y_n + z_n$, alors $u_{n+1} = \dfrac{5}{4} u_n$. Posons aussi $v_n = x_n - y_n$ et $w_n = x_n - z_n$ de sorte que $v_{n+1} = -\dfrac{1}{4} v_n$ et $w_{n+1} = -\dfrac{1}{4} z_n$. On connaît les suites géométriques et on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n u_0$, $v_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n v_0$ et $w_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n w_0$. Or on inverse facilement le système pour avoir $x_n = \dfrac{u_n + v_n + w_n}{3}$, $y_n = \dfrac{u_n - 2v_n + w_n}{3}$ et $z_n = \dfrac{u_n + v_n - 2w_n}{3}$. On traite donc trois cas selon $u_0 = x_0 + y_0 + z_0$:

- Si $u_0 > 0$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} z_n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} z_n = +\infty$.

• Si $u_0 < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\infty$.

• Si $u_0 = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

<u>Méthode 2</u> : on pose $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et U_n le vecteur colonne tel que ${}^tU_n = (x_n\ y_n\ z_n)$ on a $X_{n+1} = AX_n$

Par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$. Comme $A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A + \frac{5}{16}I_3$, le polynôme $X^2 - X - \frac{5}{16}$ annule A or $P = X^2 - X - \frac{5}{16} = \left(X - \frac{5}{4}\right)\left(X + \frac{1}{4}\right)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable. De plus, en effectuant la division euclidienne $X^n = Q_nP + R_n$ avec $R_n = a_nX + b_n$, on a $\left(\frac{5}{4}\right)^n = \frac{5a_n}{4} + b_n$ et $\left(-\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{a_n}{4} + b_n$ d'où $a_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$ et $b_n = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$. Comme $X_n = (a_nA + b_nI_3)X_0$, on a $x_n = \frac{a_n}{4}(x_0 + 2y_0 + 2z_0) + b_nx_0$, $y_n = \frac{a_n}{4}(2x_0 + y_0 + 2z_0) + b_ny_0$ et $z_n = \frac{a_n}{4}(2x_0 + 2y_0 + z_0) + b_nz_0$ donc, après calculs, $x_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{2x_0 - y_0 - z_0}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, $y_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{-x_0 + 2y_0 - z_0}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ et $x_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^n + \frac{-x_0 - y_0 + 2z_0}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ et on conclut avec la même discussion selon le signe de $x_0 + y_0 + z_0$.

2.159 **a.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à S_d, par définition de cet ensemble, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$. L'existence est donc acquise. Supposons qu'il existe un autre polynôme $Q \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + Q(n)$. Alors, $\forall n \in [\![0; d]\!],\ P(n) = u_{n+1} - au_n = Q(n)$. Les deux polynômes P et Q de degré maximum d coïncidant en au moins $d + 1$ valeurs, on sait d'après le cours qu'ils sont égaux formellement. Voici pour l'unicité. En conclusion, pour $u \in S_d$, il existe une unique polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$.

b. L'application φ est bien définie par l'existence et l'unicité de la question précédente. Soit u et v deux suites de S_d et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P_u(n)$ et $v_{n+1} = av_n + P_v(n)$. Alors, $w = \lambda u + \mu v$ est une suite réelle et on a $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(au_n + P_u(n)) + \mu(av_n + P_v(n)) = aw_n + Q(n)$ (1) en posant $Q = \lambda P_u + \mu P_v \in \mathbb{R}_d[X]$. On en déduit, comme S_d n'est pas vide puisqu'il contient la suite nulle (avec $P_0 = 0$), que S_d est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ donc lui-même un espace vectoriel. La relation (1) permet aussi de conclure que $\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi(w) = Q = \lambda P_u + \mu P_v = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$ donc l'application φ est bien une application linéaire de S_d dans $\mathbb{R}_d[X]$.

c. Soit $u \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors, par définition, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n$. La suite u est donc géométrique de raison a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0a^n$. Réciproquement, la suite $u = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + 0$ donc $\varphi\big((a^n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = 0$ et $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \text{Ker}(\varphi)$. En notant $g_a = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite géométrique de raison a, $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(g_a)$ est donc une droite (car $g_a \neq 0$ quel que soit le réel a).

Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$. Alors, par définition, $u \in S_d$ et on a clairement $\varphi(u) = P$. Ceci prouve que φ est surjective donc que $\text{Im}\,(\varphi) = \mathbb{R}_d[X]$.

d. D'après la formule du rang, on a $\dim(S_d) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}\,(\varphi)) = 1 + (d+1)$ donc $\dim(S_d) = d+2$.

2.160 L'ensemble $E_{d,n}$ est fini car $E_{d,n} \subset [\![0;n]\!]^d$ qui est lui-même un ensemble fini. En associant à un d-uplet $I = (i_1, \cdots, i_d) \in E_{d,n}$ la suite de symboles $1111+1+11+\cdots+111$ où on a remplacé i_1 par i_1 fois le symbole 1 (par exemple on associe la suite $111+1+11+1111$ à $(3,1,2,4) \in E_{4,10}$), on crée une bijection (le vérifier) entre $E_{d,n}$ et ces suites de symboles. Mais une telle suite de $n+d-1$ symboles contient n fois 1 et $d-1$ fois $+$, donc il y en a $\binom{n+d-1}{d-1}$, ce qui prouve que $\text{card}\,(E_{d,n}) = \binom{n+d-1}{d-1}$.

Nous allons montrer, à d fixé et par récurrence sur l'entier n, que $(f_I)_{I \in I_{d,n}}$ est libre dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

<u>Initialisation</u> : si on prend $n = 0$, $E_{d,n}$ ne contient que le d-uplet $I_0 = (0, \cdots, 0)$ donc, comme la fonction $f_{I_0} : (x_1, \cdots, x_d) \mapsto \prod_{k=1}^{d} x_k^{i_k} = 1$ n'est pas nulle, la famille (f_{I_0}) est libre.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$ et supposons $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est libre. Soit $(\lambda_I)_{I \in E_{d,n+1}}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{I \in E_{d,n+1}} \lambda_I f_I = 0$. Ceci signifie que $\forall (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{I \in E_{d,n+1}} \lambda_I \prod_{k=1}^{d} x_k^{i_k} = 0$ (1). Pour tout $m \in [\![1;d]\!]$, on dérive (1) partiellement par rapport à x_m pour avoir $\forall (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{\substack{I \in E_{d,n+1} \\ i_m \geqslant 1}} i_m \lambda_I x_m^{i_m - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{d} x_k^{i_k} = 0$.

Or, si $I = (i_1, \cdots, i_d) \in E_{d,n+1}$ avec $i_m \geqslant 1$, on a $(i_1, \cdots, i_{m-1}, i_m - 1, i_{m+1}, \cdots, i_d) \in E_{d,n}$ donc, par hypothèse de récurrence, $\lambda_I = 0$ car $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est libre et que toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Si $I = (i_1, \cdots, i_d) \in E_{d,n+1}$, comme $i_1 + \cdots + i_d = n+1 \geqslant 1$, il existe un entier $m \in [\![1;d]\!]$ tel que $i_m \geqslant 1$, d'après ce qui précède, $\lambda_I = 0$. Ainsi, $\forall I = (i_1, \cdots, i_d) \in E_{d,n+1}$, $\lambda_I = 0$ donc $(f_I)_{I \in E_{d,n+1}}$ est libre.

Par principe de récurrence, $\forall (d,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $(f_I)_{I \in E_{d,n}}$ est une famille libre. Il devait y avoir une suite.

2.161 <u>Analyse</u> : soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice telle que S_A soit fini. Soit, pour $(u_1, \cdots, u_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, la matrice inversible $P = \text{diag}(u_1, \cdots, u_n)$, alors la matrice $M = PAP^{-1} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans S_A et, par calcul, on a $m_{i,j} = \frac{u_i}{u_j} a_{i,j}$. S'il existe un couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $a_{i,j} \neq 0$, alors en prenant $u_i = \lambda$ et $u_j = 1$, quelles que soient les valeurs des autres coefficients diagonaux de P, on a $m_{i,j} = \lambda a_{i,j}$ qui pourrait prendre n'importe quelle valeur réelle (à part 0) quand λ parcourt $\mathbb{R}^*$. Puisque S_A est fini, on en déduit que $\forall i \neq j$, $a_{i,j} = 0$, donc A est diagonale.

Soit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, la matrice de transvection $P = T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, alors P est inversible et $P^{-1} = T_{i,j}(-\lambda) = I_n - \lambda E_{i,j}$. En posant $M = PAP^{-1} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $m_{i,i} = a_{i,i} + \lambda(a_{j,j} - a_{i,i})$. Si on avait $a_{i,i} \neq a_{j,j}$, alors $m_{i,i}$ pourrait prendre toutes les valeurs réelles quand $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que S_A est fini. Ainsi, $\forall i \neq j$, $a_{i,i} = a_{j,j}$ donc on a $A = a_{1,1} I_n$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, soit $A = \lambda I_n$ pour un réel λ, alors pour toute matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP = \lambda P^{-1} I_n P = \lambda I_n = A$ donc $S_A = \{A\}$ est bien fini.

Par analyse-synthèse, les seules matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que S_A est fini sont les matrices d'homothéties de la forme $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (on les appelle aussi matrices scalaires).

2.162 Par définition, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ ce qui se traduit aussi par $AP = PB$. On décompose $P = P_1 + iP_2$ avec $(P_1, P_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ et on a donc $AP_1 - BP_1 + i(AP_2 - BP_2) = 0$ d'où, en séparant partie réelle et imaginaire, $AP_1 - BP_1 = AP_2 - BP_2 = 0$. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{C}$, $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$.

Mais on a vu dans le cours que $f : x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ est polynomiale en x (et de degré maximum n) donc elle est continue sur $\mathbb{C}$. Or, $f(i) = \det(P) \neq 0$ car P est inversible donc f n'est pas identiquement nulle. Ainsi, il existe un réel x tel que $\det(P_1 + xP_2) \neq 0$; en effet, si f s'annulait en tous les réels x, cette fonction polynomiale aurait une infinité de racines donc le polynôme associé serait nul et f le serait aussi ce qui est absurde. En posant $Q = P_1 + xP_2$, on a $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et $AQ = QB$ donc A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.163 **a.** Si ω est racine de P, alors $P(\omega) = 0$ donc $P(\omega^2) = P(\omega)P(\omega - 1) = 0$ et ω^2 est aussi racine de P.

b. Si ω est racine de P, d'après la question précédente, ω^2 est racine de P, donc $\omega^4 = (\omega^2)^2$ aussi, $\omega^8 = (\omega^4)^2$ aussi, etc... Par une récurrence simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ω^{2^n} est racine de P. Si $\omega \neq 0$ et si $|\omega| \neq 1$, alors la suite $(|\omega|^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (si $|\omega| > 1$) ou strictement décroissante (si $|\omega| < 1$) donc injective. Ainsi, l'infinité des termes de la suite $(\omega^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ serait racine de P ce qui est absurde. Par conséquent, toutes les racines $\omega \in \mathbb{C}$ de P vérifient $|\omega| = 1$ ou $\omega = 0$. Plus précisément, la suite $(\omega^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne contient qu'un nombre fini de termes si et seulement si $\omega = 0$ ou si ω est une racine de l'unité et elles sont toutes de module 1.

c. Si 0 est racine de P, $P(1) = P(1^2) = P(1)P(0) = 0$ donc 1 est racine de P puis $P(4) = P(2^2) = P(2)P(1) = 0$ donc 4 est racine de P ce qui est absurde avec la question **a.**. Ainsi, 0 n'est pas racine de P donc toutes les racines ω de P sont de module 1.

d. Comme à la question précédente, si ω est racine de P, $P((\omega + 1)^2) = P(\omega + 1)P(\omega)0$ donc $(\omega + 1)^2$ est racine de P donc $|(\omega + 1)^2| = |\omega + 1|^2 = 1$ donc $|\omega + 1| = 1$. Ainsi, si ω est racine de P, $|\omega| = |\omega + 1| = 1$ ce qui donne, comme $|\omega|^2 = \omega\overline{\omega}$, la relation $\omega\overline{\omega} = \omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega} + 1 = 1$ donc $2\mathrm{Re}\,(\omega) = -1$. Or les seuls complexes de module 1 et de partie réelle $-\dfrac{1}{2}$ sont j et j^2. Les seules racines possibles de P sont donc j et j^2.

De plus, comme $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ le coefficient dominant λ de P (qui existe car $P \neq 0$) vérifie $\lambda = \lambda^2$ donc $\lambda = 1$. Comme P est scindé dans $\mathbb{C}$ par D'ALEMBERT-GAUSS, on peut écrire $P = (X - j)^n(X - j^2)^m$ avec n et m les ordres de multiplicité respectifs de j et j^2 dans le polynôme P.

En reportant dans $P(X^2) = P(X)P(X-1)$, on a$(X^2-j)^n(X^2-j^2)^m = (X-j)^n(X-j^2)^m(X-j-1)^n(X-j^2-1)^m$ donc, comme $j = j^4$ et $1+j+j^2 = 0$, $(X-j^2)^n(X+j^2)^n(X-j)^m(X+j)^m = (X-j)^n(X-j^2)^m(X+j^2)^n(X+j)^m$ d'où $n = m$ par unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles (à ordre près). Enfin, on obtient $P = (X - j)^n(X - j^2)^n = (X^2 + X + 1)^n$.

Réciproquement, si on pose $P = (X^2 + X + 1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, on a bien $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ car on a $P(X^2) = (X^4 + X^2 + 1)^n = (X^2 + X + 1)^n(X^2 - X + 1)^n = (X^2 + X + 1)^n((X - 1)^2 - (X - 1) + 1)^n$.

Les solutions non nulles de $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ sont tous les polynômes $(X^2 + X + 1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

2.164 **a.** Soit v un projecteur de E, il existe donc deux sous-espaces F et G de E tels que $E = F \oplus G$ et tel que $v = p_{F,G}$ est la projection sur F parallèlement à G. Si on prend une base $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n)$ adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire que $(v_1, \cdots, v_r)$ est une base de F et $(v_{r+1}, \cdots, v_n)$ une base de G), alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = A = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_r \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Tr}\,(v) = \mathrm{Tr}\,(A) = r = \mathrm{rang}\,(v)$ car $\mathrm{Im}\,(v) = F$ et $\dim(F) = r$.

Bien sûr, la réciproque est fausse. En effet, si $v : (x, y) \mapsto (3x, -y)$, on a $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{rang}\,(v) = 2$ et

$\text{Tr}\,(v) = 3 - 1 = 2$ alors que v n'est pas un projecteur car $v^2 : (x,y) \mapsto (9x,y)$ et $v^2 \neq v$.

b. $p^2 = \dfrac{1}{m^2}\Big(\sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k\Big)^2 = \dfrac{1}{m^2}\Big(\sum\limits_{i=0}^{m-1} u^i\Big) \circ \Big(\sum\limits_{j=0}^{m-1} u^j\Big)$ donc $p^2 = \dfrac{1}{m^2}\sum\limits_{0\leqslant i,j\leqslant m-1} u^{i+j}$. Or $u^{i+j} = u^k$ si $k \equiv i+j\ [m]$ car $u^m = \text{id}_E$. Pour $k \in [\![0;m-1]\!]$, il existe m couples $(i,j) \in [\![0;m-1]\!]^2$ tels que $u^{i+j} = u^m$:

- Si $k=0$, ces m couples sont tous les couples $(i, m-i)$ avec $i \in [\![1;m-1]\!]$ et le couple $(0,0)$.
- Si $k=1$, ce sont les couples $(i, m+1-i)$ avec $i \in [\![2;m-1]\!]$ et les couples $(0,1)$ et $(1,0)$.
- Si $k \in [\![2;m-1]\!]$, ce sont les couples $(i, m+k-i)$ avec $i \in [\![k+1;m-1]\!]$ et les $(i,k-i)$ avec $i \in [\![0;k]\!]$.

Ainsi, en regroupant les termes, on a $p^2 = \dfrac{1}{m^2}\sum\limits_{k=0}^{m-1} mu^k = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k = p$.

Plus simplement, on pouvait écrire $p^2 = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k \circ p$. Or $u^k \circ p = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1} u^{i+k}$ et la suite $(u^q)_{q\geqslant 0}$ est m-périodique car $u^m = \text{id}_E$ donc $u^k \circ p = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=0}^{m-1} u^i = p$ et on retrouve $p^2 = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} p = p$.

c. Par linéarité de la trace, $\text{Tr}\,(p) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} \text{Tr}\,(u^k) = \text{rang}\,(p)$ d'après la question **a.**. Or, on sait que $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ car p est un projecteur. Ainsi, $\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} \text{Tr}\,(u^k) = \dim(\text{Ker}(p - \text{id}_E))$. Il semble qu'il faille établir que $\text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$.

- Si $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$, alors $u(x) = x$ donc, par une simple récurrence, on obtient $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = x$ d'où $p(x) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k(x) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} x = x$ et $x \in \text{Ker}(p - \text{id}_E)$.
- Si $x \in \text{Ker}(p - \text{id}_E)$, alors $p(x) = x$. Comme $u \circ p = p$ d'après **b.**, $u(x) = x$ donc $x \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$.

Par double inclusion, $\text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ donc, avec (1), $\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} \text{Tr}\,(u^k) = \dim(\text{Ker}(u - \text{id}_E))$.

d. On vient de voir que $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$. Si $x \in \text{Im}\,(u - \text{id}_E)$, alors il existe un vecteur $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$ donc $p(x) = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=0}^{m-1} u^k(u(y) - y)$ et, après télescopage, il ne reste que $p(x) = \dfrac{u^m(x) - x}{m} = 0_E$. On aurait aussi pu écrire que $p(x) = p(u(y) - y) = p \circ u(y) - p(y)$ et on sait d'après la question **b.** que $p \circ u^k = u^k \circ p = p$ (des polynômes en u commutent) pour tout k donc en particulier $p \circ u = p$ ce qui donne bien $p(x) = p(y) - p(y) = 0_E$. On a donc l'inclusion $\text{Im}\,(u - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(p)$.

Par la formule du rang, $\dim(E) = \text{rang}\,(p) + \dim(\text{Ker}(p)) = \dim(\text{Im}\,(u - \text{id}_E)) + \dim(\text{Ker}(u - \text{id}_E))$ si on l'applique à p et $u - \text{id}_E$. Or, d'après **c.**, $\text{Im}\,(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ donc il ne reste que $\dim(\text{Im}\,(u - \text{id}_E)) = \dim(\text{Ker}(p))$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $\text{Im}\,(u - \text{id}_E) = \text{Ker}(p)$. Alors, p est la projection sur $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Im}\,(u - \text{id}_E)$.

2.165 **a.** Posons $n = \dim(E)$, alors on sait que $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$. Ainsi, dès que $q \geqslant n^2+1$, la famille $(u, u^2, \cdots, u^q)$ est une famille d'endomorphismes possédant strictement plus de vecteurs que la dimension de $\mathcal{L}(E)$, elle est donc liée. Par conséquent $n^2+1 \in A$ qui est donc non vide, le théorème fondamental de la relation d'ordre sur les entiers montre alors que cette partie A de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Bien sûr, comme $\chi_u = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de u par le théorème de Cayley-Hamilton, il suffit de composer par u pour avoir $u \circ \chi_u(u) = 0 = u^{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k u^{k+1}$ ce qui prouve qu'on a beaucoup mieux, à savoir $n+1 \in A$.

b. ($\Longrightarrow$) Supposons $\text{Im}\,(u) = \text{Im}\,(u^2)$. Prenons $m = \text{Min}(A)$, alors par définition $(u, u^2, \cdots, u^m)$ est liée. Il existe donc $(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\neq(0,\cdots,0)\in\mathbb{K}^m$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k u^k=0$. Si on avait $\lambda_1=0$, on aurait $u^2\circ v=0$ avec $v=\sum\limits_{k=2}^{m}\lambda_k u^{k-2}$. Or, avec la formule du rang, comme $\text{rang}\,(u)=\text{rang}\,(u^2)$, on en déduit que $\dim(\mathsf{Ker}(u))=\dim(\mathsf{Ker}(u^2))$. Mais on a toujours l'inclusion $\mathsf{Ker}(u)\subset\mathsf{Ker}(u^2)$, et elle nous donne ici l'égalité $\mathsf{Ker}(u)=\mathsf{Ker}(u^2)$. Comme $u^2\circ v$ se traduit par $\text{Im}\,(v)\subset\mathsf{Ker}(u^2)$, on a donc aussi $\text{Im}\,(v)\subset\mathsf{Ker}(u)$ donc $u\circ v=0$ ce qui montre que $\sum\limits_{k=2}^{m}\lambda_k u^{k-1}=0$ avec $(\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\neq(0,\cdots,0)$, ce qui contredit la minimalité de m. Par l'absurde, $\lambda_1\neq 0$ donc $u=\sum\limits_{k=2}^{m}\mu_k u^k\in\mathsf{Vect}\big(\{u^k\mid k\geqslant 2\}\big)$ en posant $\mu_k=-\dfrac{\lambda_k}{\lambda_1}$.

($\Longleftarrow$) On suppose qu'il existe $p\geqslant 2$ et $(\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^{p-1}$ tels que $u=\sum\limits_{k=2}^{p}\lambda_k u^k$. On sait déjà qu'on a l'inclusion $\text{Im}\,(u^2)\subset\text{Im}\,(u)$. Soit $y\in\text{Im}\,(u)$, alors il existe $x\in E$ tel que $y=u(x)$. On en déduit donc que $y=u(x)=\sum\limits_{k=2}^{p}\lambda_k u^k(x)=u^2\Big(\sum\limits_{k=2}^{p}\lambda_k u^{k-2}(x)\Big)\in\text{Im}\,(u^2)$ et on a l'inclusion $\text{Im}\,(u)\subset\text{Im}\,(u^2)$.

Par double inclusion, on a établi que $\text{Im}\,(u)=\text{Im}\,(u^2)$.

Conclusion, par double implication, $\text{Im}\,(u)=\text{Im}\,(u^2)\Longleftrightarrow u\in\mathsf{Vect}\big(\{u^k\mid k\geqslant 2\}\big)$.

2.166 **a.** Par le binôme de Newton, $\forall j\in[\![0;n]\!],\ (X+1)^j=\sum\limits_{i=0}^{j}\binom{j}{i}X^i$, la matrice A_n est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_n=(1,\cdots,X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $f_n:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f_n(P)=P(X+1)$ (clairement linéaire et allant de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$) . Si on définit $g_n:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ par $g_n(P)=P(X-1)$, alors $f_n\circ g_n=g_n\circ f_n=\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $g_n=f_n^{-1}$. Par conséquent, $A_n^{-1}=\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(g_n)$ et, comme $\forall j\in[\![0;n]\!],\ (X-1)^j=\sum\limits_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}X^i$, $A_n^{-1}=B_n=\left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$.

b. Pour $p\in[\![0;n]\!]$, on note S_p l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;p]\!]$. On sait que $\text{card}\,(S_p)=p!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_p selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{p,i}$ l'ensemble des permutations de S_p qui ont exactement i points fixes. Alors $S_p=\bigcup\limits_{i=0}^{p}S_{p,i}$ (réunion disjointe) avec $S_{p,p-1}=\emptyset$ car si une permutation de S_p a au moins $p-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait p points fixes. On a donc $\text{card}\,(S_p)=p!=\sum\limits_{i=0}^{p}\text{card}\,(S_{p,i})$. Pour dénombrer $S_{p,i}$, on choisit les i points fixes parmi les éléments de $[\![1;p]\!]$ ce qui fait $\binom{p}{i}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $p-i$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de d_{p-i} par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{p,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange"). On obtient donc $\text{card}\,(S_{p,i})=\binom{p}{i}d_{p-i}$. Par conséquent, on a $p!=\sum\limits_{i=0}^{p}\binom{p}{i}d_{p-i}$ et le changement d'indice $k=p-i$ donne bien le résultat attendu, à savoir $p!=\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p}{k}d_k$ car $\binom{p}{p-k}=\binom{p}{k}$.

c. Les $n+1$ relations trouvées à la question précédente s'écrivent matriciellement $A_n^T\begin{pmatrix}d_0\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0!\\ \vdots\\ n!\end{pmatrix}$.

d. Comme A_n est inversible et que $(A_n^T)^{-1}=(A_n^{-1})^T=B_n^T$, on a donc $\begin{pmatrix}d_0\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}=B_n^T\begin{pmatrix}0!\\ \vdots\\ n!\end{pmatrix}$. On en déduit donc, en regardant la dernière ligne de ce produit, que $d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$.

e. Comme la loi sur S_n est la loi uniforme par hypothèse ("au hasard"), on a $p_n = \frac{\text{card}(S_{n,0})}{\text{card}(S_n)} = \frac{d_n}{n!}$ donc $p_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$ en posant $j = n-k$. Classiquement, avec la fonction exponentielle écrite sous forme de série entière, on a $\lim_{n\to+\infty} p_n = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j!} = e^{-1} \sim 0,36$.

$\boxed{\textbf{2.167}}$ Analyse : soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $X^n - 1$ et $(X+1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune. Les racines de $X^n - 1$ sont les $\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0;n-1]\!]$ (racines n-ièmes de l'unité) et celles de $(X+1)^p - 1$ sont, en translatant, les $\beta_m = e^{\frac{2im\pi}{p}} - 1$ avec $m \in [\![0;p-1]\!]$. Il existe donc $k \in [\![0;n-1]\!]$ et $m \in [\![0;p-1]\!]$ tels que $\alpha_k = \beta_m$ donc $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2im\pi}{p}} - 1 = 2ie^{\frac{im\pi}{p}}\sin\left(\frac{m\pi}{p}\right)$ qui est de module 1. Ainsi, $\sin\left(\frac{m\pi}{p}\right) = \pm\frac{1}{2}$ donc $\frac{m\pi}{p} \equiv \pm\frac{\pi}{6}\ [\pi]$ ce qui, en multipliant par $\frac{6p}{\pi}$, revient à $6m \equiv \pm p\ [6p]$ donc p est un multiple de 6.

- Si $\frac{m\pi}{p} \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi]$, on a $\frac{2m\pi}{p} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc $e^{\frac{2im\pi}{p}} - 1 = e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ donc $\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ce qui montre, en multipliant par $\frac{3n}{2\pi}$, que $3k \equiv n\ [3n]$ donc n est un multiple de 3.
- Si $\frac{m\pi}{p} \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi]$, on a $\frac{2m\pi}{p} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc $e^{\frac{2im\pi}{p}} - 1 = e^{\frac{-i\pi}{3}} - 1 = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ donc $\frac{2k\pi}{n} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ce qui montre, en multipliant par $\frac{3n}{2\pi}$, que $3k \equiv -n\ [3n]$ donc n est un multiple de 3.

Synthèse : si $n = 3a$ est un multiple de 3 et $p = 6b$ est un multiple de 6, alors j est racine de $X^n - 1$ car $j^3 = 1$ et $j^{3a} = 1^a = 1$ et j est racine de $(X+1)^p - 1$ car $j + 1 = -j^2$ et que $(-j^2)^{6b} = (-1)^{6b}j^{6b} = 1$.

En conclusion, $X^n - 1$ et $(X+1)^p - 1$ admettent au moins une racine commune $\Longleftrightarrow$ ($n \equiv 0\ [3]$ et $p \equiv 0\ [6]$).

$\boxed{\textbf{2.168}}$ Comme $f \circ g = 0$, on a $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ donc, par croissance de la dimension et la formule du rang appliquée à f, $\text{rang}(g) = \dim(\text{Im}(g)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f)) = n - \text{rang}(f)$ donc $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) \leqslant n$.

De plus, comme on sait que $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, comme $\text{Im}(f+g) = \mathbb{C}^n$ puisque $f+g \in GL(\mathbb{C}^n)$, on a $\mathbb{C}^n \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ donc $n \leqslant \dim(\text{Im}(f)+\text{Im}(g)) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) - \dim(\text{Im}(f)\cap\text{Im}(g))$ par la formule de Grassmann et $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) = \text{rang}(f) + \text{rang}(g) \geqslant n$ car $\dim(\text{Im}(f)\cap\text{Im}(g)) \geqslant 0$.

Par double inégalité, on parvient comme attendu à $\text{rang}(f) + \text{rang}(g) = n$.

$\boxed{\textbf{2.169}}$ **a.** Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$. On sait d'après le cours que $\text{Im}(AB) \subset \text{Im}(A)$. Si on avait $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)$, par inclusion et égalité des dimensions, on aurait $\text{Im}(AB) = \text{Im}(A)$. Comme $A \neq 0$, il existe $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_1 \neq 0 \in \text{Im}(A)$. On a donc $AX_1 \in \text{Im}(AB)$ d'où l'existence de X_2 tel que $AX_1 = ABX_2 = BAX_2$ car $AB = BA$. De même, comme $AX_2 \in \text{Im}(A) = \text{Im}(AB)$ il existe X_3 tel que $AX_2 = ABX_3 = BAX_3$ donc $AX_1 = B^2AX_3$. Si $B^r = 0$, on continue comme ceci pour avoir l'existence de $X_{r+1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_1 = B^rAX_{r+1}$ ce qui fournit une contradiction car $B^rAX_{r+1} = 0$ alors que $AX_1 \neq 0$.

On a donc montré que si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ vérifie $A \neq 0$, B nilpotente et $AB = BA$, alors $\text{rang}(AB) < \text{rang}(A)$.

b. Soit $A_1, \cdots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent 2 à 2.

- Si $A_1 \cdots A_{n-1} = 0$, alors on a bien $A_1 \cdots A_n = 0$.

• Si $A_1 \cdots A_{n-1} \neq 0$, comme A_n est nilpotente et commute avec $A_1 \cdots A_{n-1}$ par hypothèse, on a l'inégalité $\text{rang}(A_1 \cdots A_n) < \text{rang}(A_1 \cdots A_{n-1})$. Comme $A_1 \cdots A_{n-2} \neq 0$ car $A_1 \cdots A_{n-1} \neq 0$, que A_{n-1} commute avec $A_1 \cdots A_{n-2}$ et que A_{n-2} est nilpotente, on a encore $\text{rang}(A_1 \cdots A_{n-1}) < \text{rang}(A_1 \cdots A_{n-1})$. On continue ainsi de suite pour avoir $\text{rang}(A_1 \cdots A_n) < \text{rang}(A_1 \cdots A_{n-1}) < \cdots \text{rang}(A_1A_2) < \text{rang}(A_1)$. Mais comme A_1 est nilpotente, $\text{rang}(A_1) < n$ car A_1 est non inversible et on montre par une simple récurrence à partir des inégalités ci-dessus que $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\text{rang}(A_1 \cdots A_{n-k}) < k+1$. En prenant $k = 0$, on a donc $\text{rang}(A_1 \cdots A_n) < 1$ donc $\text{rang}(A_1 \cdots A_n) = 0$ et $A_1 \cdots A_n = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, on a $A_1 \cdots A_n = 0$.

c. Soit $n = 2$ et posons $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$. A_1 et A_2 sont nilpotentes. On a $A_1A_2 = E_{2,2}$ et $A_2A_1 = E_{1,1}$. Les matrices A_1 et A_2 ne commutent pas et $A_1A_2 \neq 0$.

On peut généraliser avec $n \geqslant 3$ en prenant $A_1 = E_{2,1}$, $A_2 = E_{2,3}, \cdots, A_n = E_{n,1}$ car $A_1 \cdots A_n = E_{1,1} \neq 0$ alors que toutes les matrices A_k sont nilpotentes.

2.170 **a.** Méthode 1 : supposons que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée. Alors il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En notant L_i la ligne i de A_x, on a donc par construction $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ ce qui rend les lignes de A_x liée, donc $\det(A_x) = 0$. Par contraposée, si $\det(A_x) \neq 0$, alors $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E.

Méthode 2 : supposons $\det(A_x) \neq 0$ et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En évaluant en les $x_1, \cdots, x_n$, $\forall j \in [\![1; n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = 0$, ce qui se traduit par $A_x^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Or A_x est inversible par hypothèse, A_x^T l'est aussi, donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ceci assure directement la liberté de $(f_1, \cdots, f_n)$ dans E.

b. Initialisation : si $n = 1$, $f_1 \in E$ telle que (f_1) est libre, alors $f_1 \neq 0$ ce qui prouve l'existence d'un réel x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$. Ainsi, en prenant $x = (x_1) \in \mathbb{R}$ et $A_x = (f_1(x_1)) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on a bien $\det(A_x) = f_1(x_1) \neq 0$.

Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que pour toute famille libre $(f_1, \cdots, f_{n-1}) \in E^{n-1}$, il existe une famille de réels $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\det(A'_x) \neq 0$ en notant $A'_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Soit maintenant $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille libre de E, alors sa sous-famille $(f_1, \cdots, f_{n-1})$ est libre donc, par hypothèse de récurrence, il existe $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel qu'en notant $A'_{x'} = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, on ait $\det(A'_{x'}) \neq 0$. Pour $x_n \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$, on pose $A_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on développe par rapport à la dernière colonne pour avoir $\det(A_x) = \alpha_1 f_1(x_n) + \cdots + \alpha_n f_n(x_n)$ avec $\alpha_n = \det(A'_{x'}) \neq 0$. Or la fonction $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ est non nulle car $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre et $\alpha_n \neq 0$ donc il existe une valeur $x_n \in \mathbb{R}$ telle que $\alpha_1 f_1(x_n) + \cdots + \alpha_n f_n(x_n) = \det(A_x) \neq 0$ ce qui clôt les débats.

Par principe de récurrence, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ est une famille libre de fonctions de E, il existe un n-uplet de réels $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det(A_x) \neq 0$ où $A_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.171 **a.** Méthode 1 : soit $x \in \mathbb{R}^3$, comme $f^3 + f = 0$, $f^3(x) + f(x) = 0$. Procédons par analyse/synthèse.

Analyse : si $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, alors $f(y) = 0$ donc $f^2(y) = 0$ et $f^2(z) + z = 0$. Ainsi, $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z) = -z$ d'où $y = x - z = x + f^2(x)$. Ceci montre déjà l'unicité d'une décomposition, donc le fait que la somme de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est directe.

Synthèse : réciproquement, si $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$, on a bien $y + z = x$, $y \in \mathrm{Ker}(f)$ car $f^3(x) + f(x) = 0$ et $z \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ car $f^4(x) + f^2(x) = f(f^3(x) + f(x)) = 0$. Ceci assure $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.

On conclut donc que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

Méthode 2 : soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, alors $f(x) = 0$ et $f^2(x) + x = 0$. Comme $f(x) = 0$, en composant par f, on a aussi $f^2(x) = f(0) = 0$ par linéarité de f donc $0 + x = 0$ d'où $x = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$. Comme $(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \circ f = f^3 + f = 0$, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $\mathrm{rang}\,(f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))$. Or, d'après la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rang}\,(f) = 3$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \geqslant 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Comme on sait déjà que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = 3$ donc $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

La première méthode a l'avantage de marcher même en dimension infinie.

Comme $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\mathrm{Im}\,(f) \neq \{0\}$ puisque $f \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$. On pouvait aussi dire que si on avait $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$, comme $f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un endomorphisme en dimension finie, on aurait $f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \in GL(\mathbb{R}^3)$ donc $f^3 + f = f \circ (f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$ impliquerait $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Par l'absurde, on a $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.

b. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ tel que $x \neq 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ax + bf(x) = 0$ (1). On a aussi $af(x) + bf^2(x) = 0$ donc, puisque $f^2(x) + x = 0$, on a $af(x) - bx = 0$ (2). En effectuant $a(1) - b(2)$, on parvient à $(a^2 + b^2)x = 0$ donc $a^2 + b^2 = 0$ car $x \neq 0$. Ainsi, $a = b = 0$ car a et b sont réels donc $(x, f(x))$ est libre.

c. Si f était injective, $f \in GL(\mathbb{R}^3)$ et $f^3 + f = f \circ (f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$ impliquerait $f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = 0 = 0$ donc $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et, en passant au déterminant, on aurait $\det(f)^2 = (-1)^3 = -1$. NON ! Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc on peut prendre un vecteur non nul v_1 dans $\mathrm{Ker}(f)$. On a vu en question **a.** que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$ donc on peut prendre un vecteur non nul v_2 dans $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. On sait d'après la question **b.** qu'en notant $v_3 = f(v_2)$ la famille (v_2, v_3) est libre. De plus, $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ est stable par f donc $v_3 \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est donc libre et, puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = f^2(v_2) = -v_2$ donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$, alors on a $g \circ f = f \circ g \Longleftrightarrow AB = BA$. Or, après calculs, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b_{3,1} & -b_{3,2} & -b_{3,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & b_{1,3} & -b_{1,2} \\ 0 & b_{2,3} & -b_{2,2} \\ 0 & b_{3,3} & -b_{3,2} \end{pmatrix}$. On dispose donc de l'équivalence $AB = BA \Longleftrightarrow (b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,1} = b_{3,1} = 0,\ b_{2,2} = b_{3,3},\ b_{2,3} = -b_{3,2})$. Les matrices B vérifiant $AB = BA$

sont donc de la forme $B = b_{1,1}I_3 + b_{3,2}A + (b_{1,1} - b_{2,2})A^2$ car $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ce qui montre que si g commute avec f, alors $g = b_{1,1}\text{id}_{\mathbb{R}^3} + b_{3,2}f + (b_{1,1} - b_{2,2})f^2 \in \text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$. Comme les polynômes en f commutent avec f, on a l'autre inclusion $\text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2) \subset \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\}$.

Par double inclusion, on a donc $\{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$.

On aurait pu, si $g \circ f = f \circ g$, dire que les deux sous-espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ étaient stables par g donc la matrice $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est de la forme $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$. Or $f(v_2) = v_3$ donc $g(v_3) = g(f(v_2))$ devient $g(v_3) = f(g(v_2)) = f(b_{2,2}v_2 + b_{3,2}v_3) = -b_{3,2}v_2 + b_{2,2}v_3$ et on arrive à la même forme de B.

2.172 Les relations $A \times A = B \times B = 0$ se traduisent par $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(B) \subset \text{Ker}(B)$. On en déduit que $\text{rang}(A) \leqslant \dim(\text{Ker}(A)) = 2n - \text{rang}(A)$ par la formule du rang donc que $2\,\text{rang}(A) \leqslant 2n$. Comme on a $\text{rang}(A) \geqslant n$ par hypothèse, on en déduit que $\text{rang}(A) = n$. Par symétrie, $\text{rang}(B) = n$.

Soit S un supplémentaire de $\text{Ker}(A)$ dans $\mathbb{C}^{2n}$, on a donc $\dim(S) = 2n - \dim(\text{Ker}(A)) = 2n - n = n$. Prenons $\mathcal{B}_1 = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de S. On sait d'après le théorème du rang que A induit un isomorphisme entre S et $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$ de sorte que $\mathcal{B}_2 = (Av_1, \cdots, Av_n)$ est une base de $\text{Im}(A)$. Comme $C^{2n} = S \oplus \text{Im}(A)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{C}^{2n}$. Par construction, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Et on a $A = PNP^{-1}$ par formule de changement de base avec P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ à la base $\mathcal{B}$. Par symétrie, on a aussi l'existence d'une matrice $Q \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $B = QNQ^{-1}$. Comme les matrices A et B sont semblables à la même matrice N, A et B sont semblables. En effet, $A = P(Q^{-1}BQ)P^{-1} = UBU^{-1}$ en posant $U = PQ^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$.

2.173 **a.** Pour $(k, m) \in [\![0; n-1]\!]^2$, $\chi_m(\omega_k) = \dfrac{\omega_k^m}{\sqrt{n}} = \dfrac{e^{\frac{2ikm\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \dfrac{e^{\frac{2imk\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \chi_k(\omega_m)$ (relation de De Moivre).

b. Pour $(k, m) \in [\![0; n-1]\!]^2$, $< \chi_m, \chi_k >= \sum\limits_{p=0}^{n-1} \chi_m(\omega_p)\overline{\chi_k(\omega_p)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} \omega_p^m \overline{\omega_p^k}$. Comme $\omega_p^k \in \mathbb{U}$, il vient $\overline{\omega_p^k} = (\omega_p^k)^{-1} = \omega_p^{-k}$ donc $< \chi_m, \chi_k >= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} \omega_1^{p(m-k)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} (\omega_1^{m-k})^p$ car $\omega_p = \omega_1^p$.

<u>Si $m = k$,</u> $< \chi_m, \chi_k >=< \chi_m, \chi_m >= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} \omega_1^0 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} 1 = 1$ donc $||\chi_m|| = \sqrt{1} = 1$.

<u>Si $m \neq k$,</u> $< \chi_m, \chi_k >= \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=0}^{n-1} (\omega_1^{m-k})^p$. Or $m \not\equiv k\ [n]$ donc $\omega_1^{m-k} = e^{\frac{2i(m-k)\pi}{n}}$ avec $\dfrac{2(m-k)\pi}{n} \not\equiv 0\ \left[2\pi\right]$ donc $\omega_1^{m-k} \neq 1$ et on a donc $< \chi_m, \chi_k >= \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1 - \omega_1^{(m-k)n}}{1 - \omega_1^{m-k}} = 0$ car $\omega_1^{(m-k)n} = (\omega_1^n)^{m-k} = 1$.

Ainsi, pour $(k, m) \in [\![0; n-1]\!]^2$, on a $< \chi_m, \chi_k >= \delta_{m,k}$.

c. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$, par définition, pour $m \in [\![0; n-1]\!]$, on a $\hat{\chi_k}(\omega_m) =< \chi_k, \chi_m >= \overline{< \chi_m, \chi_k >}$ par définition de $< .,. >$ sur E^2 donc, d'après la question précédente, on a $\hat{\chi_k}(\omega_m) = \delta_{m,k}$. De même, pour $m \in [\![0; n-1]\!]$, $\hat{\hat{\chi_k}}(\omega_m) =< \hat{\chi_k}, \chi_m >= \sum\limits_{p=0}^{n-1} \hat{\chi_k}(\omega_p)\overline{\chi_m(\omega_p)} = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \delta_{p,k}\overline{\chi_m(\omega_p)} = \overline{\chi_m(\omega_k)} = \overline{\chi_k(\omega_m)}$ d'après la question **a.**, ce qu'on peut réduire à $\hat{\hat{\chi_k}} = \overline{\chi_k}$.

d. Pour $\Phi \in E$ et $m \in [\![0;n-1]\!]$, on a $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\widehat{\chi_\ell}(m) = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\delta_{m,\ell}$ d'après la question **c.** d'où la relation $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\widehat{\chi_\ell}(m) = \Phi(\omega_m)$. Comme les deux applications Φ et $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\widehat{\chi_\ell}$ coïncident sur leur ensemble de définition $\mathbb{U}_n$, on a bien $\Phi = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\widehat{\chi_\ell}$.

e. Pour $(\Phi, \Psi) \in E^2$, on écrit $\Phi = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k)\widehat{\chi_k}$ et $\Psi = \sum\limits_{m=0}^{n-1} \Psi(\omega_m)\widehat{\chi_m}$. Or l'application $\hat{}$, par définition, est linéaire en la première variable et, en la seconde, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire avec les coefficients conjugués des images, ce qui s'appelle l'anti-linéarité (mais n'est plus enseigné en PSI par manque de séries de Fourier). Ainsi, $<\hat{\Phi}, \hat{\Psi}> = <\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k)\widehat{\chi_k}, \sum\limits_{m=0}^{n-1} \Psi(\omega_m)\widehat{\chi_m}>$ s'écrit aussi $<\hat{\Phi}, \hat{\Psi}> = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant m \leqslant n-1}} \Phi(\omega_k)\overline{\Psi(\omega_m)} <\widehat{\chi_k}, \widehat{\chi_m}>$. Or, avec la question **c.** et la définition de $<.,.>$, on a $<\widehat{\chi_k}, \widehat{\chi_m}> = \delta_{m,k}$ donc $<\hat{\Phi}, \hat{\Psi}> = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant m \leqslant n-1}} \Phi(\omega_k)\overline{\Psi(\omega_m)}\delta_{m,k} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Phi(\omega_k)\overline{\Psi(\omega_k)} = <\Phi, \Psi>$.

f. Il est clair que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, comme tout ensemble $\mathcal{F}(X, F)$ des applications de X dans F où X est un ensemble non vide et F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. D'après la question **d.**, toute fonction Φ de E s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{B} = (\widehat{\chi_0}, \cdots, \widehat{\chi_{n-1}})$. La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice de E. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k\widehat{\chi_k} = 0$, alors en évaluant en ω_m pour $m \in [\![0;n-1]\!]$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k\widehat{\chi_k}(\omega_m) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k\delta_{m,k} = \lambda_m = 0$ d'après **c.**. Ainsi, $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$ donc $\mathcal{B}$ est aussi libre. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de E ce qui prouve que $\dim(E) = \text{card}(\mathcal{B}) = n$.

On a déjà dit que $<.,.>$ était linéaire à gauche, ce qui garantit la linéarité de L. Soit $\Phi \in \text{Ker}(L)$, alors en écrivant $\Phi = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\widehat{\chi_\ell}$, on a $L(\Phi) = \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)L(\widehat{\chi_\ell}) = 0$ par linéarité de L donc, comme $\hat{\hat{\chi_\ell}} = \overline{\chi_\ell}$ d'après la question **c.**, on a $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \Phi(\omega_\ell)\overline{\chi_\ell} = 0$. En conjuguant, on obtient donc $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} \overline{\Phi(\omega_\ell)}\chi_\ell = 0$ ce qui, par liberté de $\mathcal{B}$, montre que $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $\overline{\Phi(\omega_\ell)} = 0$ donc $\Phi(\omega_\ell) = 0$. Ainsi, $L = 0$. Comme $\text{Ker}(L) = \{0\}$, L est injectif et, comme on est en dimension finie, L est un automorphisme de E.

De plus, pour une fonction $\Phi \in E$, on a $||\hat{\Phi}||^2 = <\hat{\Phi}, \hat{\Phi}> = <\Phi, \Phi> = ||\Phi||^2$ d'après **e.** donc, comme $<\Phi, \Phi> = \sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \Phi(\omega)\overline{\Phi(\omega)} = \sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\Phi(\omega)|^2 \geqslant 0$, en passant à la racine, on a bien $||\hat{\Phi}|| = ||\Phi||$.

2.174 **a.** Comme $\deg(P_n) = n \geqslant 1$, on a $\deg(P'_n) = n-1$. De plus, comme la fonction polynomiale P_n est de classe C^1 et que $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $P(k) = P(k+1) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $s_k \in]k;k+1[$ tel que $P'(s_k) = 0$. On a donc $n-1$ racines distinctes $s_0, \cdots, s_{n-1}$ de P'_n qui est de degré $n-1$, ce sont donc les seules. En particulier, $r_n = s_0$ est l'unique réel de $]0;1[$ tel que $P'(r_n) = 0$.

b. Pour des fonctions dérivables, comme pour des polynômes formels, on a $\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\Big)' = \sum\limits_{k=1}^{n} f'_k\Big(\prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f_i\Big)$. Si on applique ceci avec $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} f_k$ avec $f_k = X - k$, on a donc $P'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - i)$ car $f'_k = (X-k)' = 1$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus [\![0;n]\!]$, on a $P_n(x) \neq 0$, d'où $\dfrac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x-i)\Big) \times \Big(\prod\limits_{i=0}^{n} (x-i)\Big)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k}$.

c. Puisque $P_n'(r_n) = 0$ et $r_n \notin [\![0;n]\!]$, d'après **b.**, $\dfrac{1}{r_n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{r_n - k}$ donc $\dfrac{1}{r_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k - r_n} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ car $\forall k \in [\![1;n]\!],\ 0 < k - r_n \leqslant k$. Comme la série harmonique diverge par RIEMANN, la suite $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = H_n\Big)_{n \geqslant 1}$ de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Par minoration, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{r_n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$.

d. Mieux que ci-dessus, on a $\forall k \in [\![2;n]\!],\ k-1 \leqslant k - r_n \leqslant k$ donc $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{k - r_n} \leqslant \dfrac{1}{k-1}$ donc, en sommant, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{r_n} \leqslant \dfrac{1}{1 - r_n} + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k-1}$. Mais comme $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $H_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n-1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ car $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - r_n} = 1$, par encadrement, on a $\dfrac{1}{r_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $r_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(n)}$.

e. Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1)$ donc $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\Big(\dfrac{n-1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n} + \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n \geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge ce qui, par dualité suite-série, prouve la convergence (vers $\gamma \sim 0,577$) de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$ d'où $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = u_n + \ln(n) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2.175 **a.** Tout d'abord, comme le degré de P' est inférieur à celui de P, u va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, la linéarité de la dérivation montrant bien que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme $\forall k \in [\![1;n]\!],\ u\Big(\dfrac{X^k}{k!}\Big) = \dfrac{X^{k-1}}{(k-1)!}$, si on prend la famille $\mathcal{B} = \Big(\dfrac{X^k}{k!}\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car elle contient $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes et qu'elle est libre puisque constituée de polynômes de degrés échelonnés. Par construction, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $a_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. A ne contient bien que des 0 et des 1.

b. Considérons l'endomorphisme $\varphi = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - u$ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P - P'$. D'après la question **a.**, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_{n+1} - A$ est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale donc $\det(\varphi) = 1 \neq 0$ ce qui prouve que $\varphi \in GL(\mathbb{R}_n[X])$. Comme φ est bijective, $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ P - P' = Q$.

On peut même facilement trouver φ^{-1}. Si $Q = \varphi(P) = P - P'$, en dérivant successivement, on a aussi les relations $P' - P'' = Q', \cdots, P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$. Or $P^{(n+1)} = 0$ car $\deg(P) \leqslant n$ donc on trouve $P = \varphi^{-1}(Q) = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$ par télescopage.

c. <u>Méthode 1</u> : Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{-x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (P'(x) - P(x))e^{-x} = -Q(x)e^{-x} \leqslant 0$ donc f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées, f est donc positive sur $\mathbb{R}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

<u>Méthode 2</u> : on constate d'abord que P et Q ont même degré et même coefficient dominant. Si $Q = \lambda \geqslant 0$, alors $P = \lambda$ aussi et le résultat est vérifié. Sinon, $\deg(Q) \geqslant 1$ donc, comme Q reste positif sur $\mathbb{R}$, Q est de degré pair et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} Q(x) = +\infty$. Par conséquent, on a aussi $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x) = +\infty$. S'il existait un réel x_0 tel que $P(x_0) < 0$, alors P admettrait un minimum sur $\mathbb{R}$ (classique). On pourrait donc définir $m = \underset{\mathbb{R}}{\text{Min}}(P) = P(\alpha)$. Comme P est de classe C^∞, on aurait $P'(\alpha) = 0$. Ainsi $Q(\alpha) = P(\alpha) - P'(\alpha) = P(\alpha) \leqslant P(x_0) < 0$: NON !!!
On en déduit encore que P reste positif sur $\mathbb{R}$.

<u>Méthode 3</u> : La fonction P est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ y - y' = Q$. Les solutions de l'équation homogène associée $(E_0)\ :\ y - y' = 0$ sont les $y : x \mapsto \lambda e^x$. Par variation de la constante, on trouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$

tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \alpha e^x - e^x \int_0^x Q(t)e^{-t}dt$ qui s'écrit aussi $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)e^{-x} = \alpha - \int_0^x Q(t)e^{-t}dt$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = 0$ par croissances comparées et $\int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt$ converge car $t \mapsto Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $Q(t)e^{-t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t/2})$ par exemple. Ainsi, en passant à la limite, $\alpha = \int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = e^x \int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt - e^x \int_0^x Q(t)e^{-t}dt = e^x \int_x^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

d. Soit $d = \deg(P) \leqslant n$ et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_d$ les $d \leqslant n$ racines réelles distinctes de P qu'on suppose scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Les valeurs $P'(\alpha_1), \cdots, P'(\alpha_d)$ sont non nulles car les α_k sont des racines simples de P. Les valeurs $P'(\alpha_1), \cdots, P'(\alpha_d)$ ont des signes alternés car P change de signe au passage de chaque α_k, il suffit de faire un dessin ! Comme $P - P' = Q$, on a $\forall k \in [\![1;d]\!],\ Q(\alpha_k) = -P'(\alpha_k)$ donc les valeurs $Q(\alpha_1), \cdots, Q(\alpha_d)$ sont de signes stricts alternés donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe des valeurs $\beta_1, \cdots, \beta_{d-1}$ telles que $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{d-1} < \beta_{d-1} < \alpha_d$ et $Q(\beta_1) = \cdots = Q(\beta_{d-1}) = 0$. Comme $Q = P - P'$, on a $\deg(Q) = \deg(P - P') = \deg(P)$ et P et Q ont les mêmes coefficients dominants. Traitons deux cas :

- Si $P'(\alpha_d) > 0$, P est positive localement à droite de α_d mais comme il n'y a pas de racine de P à droite de α_d, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$ aussi et, comme $Q(\alpha_d) < 0$, il existe encore par le théorème des valeurs intermédiaires un réel $\beta_d > \alpha_d$ tel que $Q(\beta_d) = 0$ ce qui fait bien d racines distinctes de Q et Q est aussi scindé à racines simples.
- Si $P'(\alpha_d) < 0$, P est négative localement à droite de α_d mais comme il n'y a pas de racine de P à droite de α_d, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = -\infty$ aussi et, comme $Q(\alpha_d) > 0$, il existe encore par le théorème des valeurs intermédiaires un réel $\beta_d > \alpha_d$ tel que $Q(\beta_d) = 0$ ce qui fait bien d racines distinctes de Q et Q est aussi scindé à racines simples.

Dans les deux cas, si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors Q l'est aussi.

2.176 **a.** Méthode 1 : supposons que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée. Alors il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En notant L_i la ligne i de A_x, on a donc par construction $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0$ ce qui rend les lignes de A_x liée, donc $\det(A_x) = 0$. Par contraposée, si $\det(A_x) \neq 0$, alors $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre dans E.

Méthode 2 : supposons $\det(A_x) \neq 0$ et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En évaluant en les $x_1, \cdots, x_n$, $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = 0$, ce qui se traduit par $A_x^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Or A_x est inversible par hypothèse, A_x^T l'est aussi, donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ceci assure directement la liberté de $(f_1, \cdots, f_n)$ dans E.

b. Initialisation : si $n = 1$, $f_1 \in E$ telle que (f_1) est libre, alors $f_1 \neq 0$ ce qui prouve l'existence d'un réel x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$. Ainsi, en prenant $x = (x_1) \in \mathbb{R}$ et $A_x = (f_1(x_1)) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on a bien $\det(A_x) = f_1(x_1) \neq 0$.

Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que pour toute famille libre $(f_1, \cdots, f_{n-1}) \in E^{n-1}$, il existe une famille de réels $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\det(A'_x) \neq 0$ en notant $A'_x = \big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Soit maintenant $(f_1,\cdots,f_n)$ une famille libre de E, alors sa sous-famille $(f_1,\cdots,f_{n-1})$ est libre donc, par hypothèse de récurrence, il existe $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ tel qu'en notant $A'_{x'}=\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, on ait $\det(A'_{x'})\neq 0$. Pour $x_n\in\mathbb{R}$ et $x=(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)$, on pose $A_x=\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on développe par rapport à la dernière colonne pour avoir $\det(A_x)=\alpha_1f_1(x_n)+\cdots+\alpha_nf_n(x_n)$ avec $\alpha_n=\det(A'_{x'})\neq 0$. Or la fonction $\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_nf_n$ est non nulle car $(f_1,\cdots,f_n)$ est libre et $\alpha_n\neq 0$ donc il existe une valeur $x_n\in\mathbb{R}$ telle que $\alpha_1f_1(x_n)+\cdots+\alpha_nf_n(x_n)=\det(A_x)\neq 0$ ce qui clôt les débats.

Par principe de récurrence, si $n\in\mathbb{N}^*$ et $(f_1,\cdots,f_n)$ est une famille libre de fonctions de E, il existe un n-uplet de réels $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\det(A_x)\neq 0$ où $A_x=\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.177 **a.** Comme f est un endomorphisme de E, f^n en est aussi un pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, ainsi $\mathrm{Ker}(f^n)$ et $\mathrm{Im}(f^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

- En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels, I (le cœur de f) est un sous-espace vectoriel de E.
- K est non vide car $K_0=\mathrm{Ker}(f^0)=\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E)=\{0_E\}$ est inclus dans K. Soit $(x,y)\in K^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Par définition d'une réunion, il existe deux entiers m et n tels que $x\in K_m$ et $y\in K_n$. Sans perte de généralité, supposons que $m\leqslant n$. Alors $f^n(x)=f^{n-m}\circ f^m(x)=f^{n-m}((f^m(x))=f^{n-m}(0_E)=0_E$ donc $x\in K_n$. Comme K_n est un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda x+\mu y\in K_n\subset K$. Ainsi, K est stable par combinaison linéaire et non vide donc K est un sous-espace vectoriel de E.

b. Si $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathrm{Ker}(f^k)$, $f^k(x)=0_E$ donc $f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=0_E$ d'où $x\in\mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Si $y\in\mathrm{Im}(f^{k+1})$, il existe $x\in E$ tel que $y=f^{k+1}(x)=f^k(f(x))\in\mathrm{Im}(f^k)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f^k)\subset\mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1})\subset\mathrm{Im}(f^k)$. Ainsi, la suite $\big(\dim(\mathrm{Ker}(f^k))\big)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est croissante et majorée par $n=\dim(E)$ donc il existe forcément un entier $N\leqslant n$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f^N))=\dim(\mathrm{Ker}(f^{N+1}))$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(f^N)=\mathrm{Ker}(f^{N+1})$ (inclusion et égalité des dimensions). En effet, si $\forall k\in[\![0;n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^{k+1}))>\dim(\mathrm{Ker}(f^k))$, on aurait facilement par récurrence $\forall k\in[\![0;n+1]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^k))\geqslant k$ ce qui est impossible car $\dim(\mathrm{Ker}(f^n))\leqslant n$ car $\mathrm{Ker}(f^n)\subset E$.

S'il existe $k\geqslant 1$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{N+k})=\mathrm{Ker}(f^N)$, on a déjà $\mathrm{Ker}(f^{N+k})\subset\mathrm{Ker}(f^{N+k+1})$ et si $x\in\mathrm{Ker}(f^{N+k+1})$, il vient $f^{N+k}(f(x))=0_E$ donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(f^{N+k})=\mathrm{Ker}(f^N)$ donc $f^{N+1}(x)=0_E$ et $x\in\mathrm{Ker}(f^{N+1})=\mathrm{Ker}(f^N)$. Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(f^{N+k})=\mathrm{Ker}(f^N)$. Par principe de récurrence, $\forall k\geqslant 0$, $K_{N+k}=K_N$.

Montrons par double inclusion que $K=K_N$. Par définition d'une réunion, on a $\mathrm{Ker}(f^N)=K_N\subset K$.

Soit $x\in K$, par définition il existe $i\in\mathbb{N}$ tel que $x\in K_i$.

- Soit $i\leqslant N$ et alors $x\in K_i\subset K_N$ d'après la croissance des noyaux itérés et on a $x\in K_N$.
- Soit $i>N$ et alors $i=N+k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in K_{N+k}=K_N$ d'après ce qui précède.

On a bien établi que $K=K_N$.

c. Comme avant, et puisqu'avec la formule du rang on a $\mathrm{rang}(f^{N+k})=\mathrm{rang}(f^N)$ pour $k\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{Im}(f^{N+k})=\mathrm{Im}(f^N)$ par inclusion te égalité des dimensions. Comme en **b.**, on en déduit que $I=I_N$.

- Si $x\in K=K^N$, on a $f^N(x)=0_E$ donc $f^{N+1}(x)=f^N(f(x))=f^(f^N(x))=f(0_E)=0_E$ donc $f(x)\in K_N=K$ ce qui montre que K est stable par l'endomorphisme f.
- Si $y\in I=I_N$, il existe $x\in E$ tel que $y=f^N(x)$ donc $f(y)=f^{N+1}(x)\in I_{N+1}=I_N=I$ donc I est

aussi stable par l'endomorphisme f.

Soit $x \in I \cap K$, alors $f^N(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^N(y)$ car $I = I_N$ et $K = K_N$. Ainsi, $f^N(x) = f^N(f^N(y)) = f^{2N}(y) = 0_E$ donc $y \in K_{2N} = K_N$ donc $x = f^N(y) = 0_E$. Ainsi, I et K sont en somme directe et, comme $\dim(I) + \dim(K) = \dim(\text{Ker}(f^N)) + \text{rang}\,(f^N) = n = \dim(E)$ par la formule du rang, on en déduit que $E = I \oplus K$: I et K sont supplémentaires dans E.

d. Comme I et K sont stables par f, on peut définir les deux endomorphismes induits f_I et f_K induits respectivement par f dans I et dans K.

<u>Pour f_I</u> : on a l'équivalence $x \in \text{Ker}(f_I) \iff (x \in I \text{ et } f(x) = 0_E) \iff x \in I \cap \text{Ker}(f)$ qui justifie l'égalité $\text{Ker}(f_I) = I \cap \text{Ker}(f)$. Or $\text{Ker}(f) \subset K$ donc $\text{Ker}(f_I) \subset I \cap K = \{0_E\}$ ce qui montre que $\text{Ker}(f_I) = \{0_E\}$ et donc que f_I est injective. Soit $y \in I = I_N = I_{N+1}$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{N+1}(x) = f(f^N(x)) = f(z)$ avec $z = f^N(x) = I_N = $ I. Ainsi, $y = f_I(z)$ et f_I est surjective. Par conséquent, f_I est un automorphisme de I.

<u>Pour f_N</u> : soit $x \in K$, comme $K = K_N = \text{Ker}(f^N)$, on a $f_K^N(x) = f^N(x) = 0_E$ donc $f_K^N = 0$ et f_K est un endomorphisme de K qui est nilpotent d'indice inférieur ou égal à N.

2.178 **a.** Par l'absurde, supposons qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que la famille (AX, X) est libre. On peut poser $X_1 = X$, $X_2 = AX$ et compléter la famille libre (X_1, X_2) en une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$. Comme $AX_1 = X_2$, par formule de changement de base, $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$. Ainsi, B est semblable à A et son coefficient $b_{2,1}$ vaut $1 \neq 0$. On a donc montré par l'absurde que si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1} = 0$, alors pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille (AX, X) est liée.

Soit $\mathcal{B}_0 = (E_1, \cdots, E_n)$ la base canonique, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, (AE_k, E_k) est liée donc il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $AE_k = \lambda_k E_k$ car $E_k \neq 0$. Or AE_k est la k-ième colonne de A ce qui montre que $A = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Pour $k \in [\![2; n]\!]$, de même, il existe un réel μ_k tel que $A(E_1 + E_k) = \mu_k(E_1 + E_k)$. Or $A(E_1 + E_k) = \lambda_1 E_1 + \lambda_k E_k$ donc, par liberté de (E_1, E_k), on a $\mu_k = \lambda_1 = \lambda_k$ et on en déduit que $A = \lambda_1 I_n$. Réciproquement, toute matrice de la forme λI_n n'est semblable qu'à elle même ayant un coefficient nul en case $(2, 1)$.

Les matrices telles que toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1} = 0$ sont exactement les matrices scalaires (représentant les homothéties), de la forme λI_n.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A est telle que $b_{1,1} = 0$. Supposons l'existence d'un vecteur $X_1 \neq 0$ tel que (AX_1, X_1) est libre. Posons $X_2 = AX_1 - X_1$, alors la famille (X_1, X_2) est libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$. Comme $AX_1 = X_1 + X_2$, par formule de changement de base, $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$ ce qui contredit l'hypothèse. Par l'absurde, on a donc $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, (AX, X) est liée (même pour $X = 0$). Comme ci-dessus, on en déduit que $A = \lambda I_n$. Mais comme $a_{1,1} = 0$ car A est semblable à elle-même, on a $\lambda = a_{1,1} = 0$ donc $A = 0$.

Il n'y a qu'une seule matrice telle que pour toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ semblable à A, on ait $b_{1,1} = 0$, et c'est la matrice nulle.

2.179 **a.** Comme $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, on peut écrire $P = a_1X + \cdots + a_pX^p$ de degré $p \geqslant 1$ tel que $a_1 = P'(0) \neq 0$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$, on a donc $f(x) = 0_E$ et $\exists y \in E$, $x = f(y)$. Ainsi $f^2(y) = 0_E$. Par hypothèse, $P(f) = a_1 f + \cdots + a_p f^p = 0$ qu'on applique en y pour avoir $0_E = a_1 f(y)$ puisque $\forall k \geqslant 2$, $f^k(y) = 0_E$. Ainsi, comme $a_1 \neq 0$, on a $f(y) = x = 0_E$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont donc en somme directe. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(E)$ par la formule du rang (voilà l'apport de la dimension finie), on conclut que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E si E est de dimension finie.

b. Avec les mêmes notations et le même raisonnement, on sait déjà que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe. Soit $x \in E$, alors $P(f)(x) = 0_E$ donc $a_1 f(x) + \cdots + a_p f^p(x) = f(a_1 x + a_2 f(x) + \cdots + a_p f^{p-1}(x)) = 0_E$ ce qui prouve que $a_1 x + a_2 f(x) + \cdots + a_p f^{p-1}(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $a_1 \neq 0$, $y = x + \frac{a_2}{a_1} f(x) + \cdots + \frac{a_p}{a_1} f^{p-1}(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Mais $z = -\frac{a_2}{a_1} f(x) - \cdots - \frac{a_p}{a_1} f^{p-1}(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ car $z = f\Big(-\frac{a_2}{a_1} x - \cdots - \frac{a_p}{a_1} f^{p-2}(x)\Big)$ et on a $x = y + z$. On vient d'établir que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}\,(f)$.

Même en dimension infinie, avec les conditions de l'énoncé, $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E.

2.180 Les deux applications f et g de l'énoncé sont clairement linéaires donc des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $\varphi = g \circ f = f \circ g$ donc φ est aussi linéaire (c'était clair) mais on a aussi $\det(\varphi) = \det(f)\det(g)$.

Pour f : soit $\mathcal{B}_\ell = (E_{1,1}, E_{1,2}, \cdots, E_{1,n}, E_{2,1}, \cdots, E_{2,n}, \cdots\cdots, E_{n,1}, \cdots, E_{n,n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrite ligne par ligne et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\ell}(f)$. $f(E_{1,1}) = E_{1,1}A$ est la matrice dont la première ligne est celle de A et toutes les autres sont nulles donc $f(E_{1,1}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} E_{1,j}$. Ceci prouve que la première colonne de P contient dans l'ordre $a_{1,1}, \cdots, a_{1,n}, 0, \cdots, 0$. De même, $f(E_{1,2}) = E_{1,2}A$ est la matrice dont la première ligne est la seconde de A et toutes les autres sont nulles donc $f(E_{1,2}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j} E_{1,j}$ donc la seconde colonne de P contient dans l'ordre $a_{2,1}, \cdots, a_{2,n}, 0, \cdots, 0$. On continue comme ceci pour toutes les colonnes de P pour se rendre compte que P est diagonale par blocs avec n fois A^T sur la diagonale : $P = \mathrm{diag}(A^T, \cdots, A^T)$. On sait qu'alors $\det(f) = \det(P) = (\det(A^T))^n = (\det(A))^n$.

Pour g : soit $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{2,1}, \cdots, E_{n,1}, E_{1,2}, \cdots, E_{n,2}, \cdots\cdots, E_{1,n}, \cdots, E_{n,n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrite colonne par colonne et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g)$. $g(E_{1,1}) = AE_{1,1}$ est la matrice dont la première colonne est celle de A et toutes les autres sont nulles donc $g(E_{1,1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,1} E_{i,1}$. Ceci prouve que la première colonne de Q contient dans l'ordre $a_{1,1}, \cdots, a_{n,1}, 0, \cdots, 0$. De même, $g(E_{2,1}) = AE_{2,1}$ est la matrice dont la première colonne est la seconde de A et toutes les autres sont nulles donc $g(E_{2,1})=\sum_{i=1}^{n} a_{i,2}E_{i,1}$ donc la seconde colonne de Q contient dans l'ordre $a_{2,1},\cdots,a_{2,n},0,\cdots,0$. On continue comme ceci pour toutes les colonnes de Q pour se rendre compte que Q est diagonale par blocs avec n fois A sur la diagonale : $Q=\mathrm{diag}(A,\cdots,A)$. On sait qu'alors $\det(g)=\det(Q)=(\det(A))^n$.

Ainsi, d'après ce qui précède, $\det(\varphi)=(\det(A))^{2n}$.

2.181 **a.** Comme $u^{n-1}\neq 0$, par définition, il existe un vecteur $x\in E$ tel que $u^{n-1}(x)\neq 0_E$. Posons alors $\mathcal{B}=(x,u(x),\cdots,u^{n-1}(x))$, cette famille de vecteurs de E comporte n vecteurs et $\dim(E)=n$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre pour établir que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Soit $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k u^k(x)=0_E$ (1). Par l'absurde, supposons $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1})\neq(0,\cdots,0)$ et posons alors $m=\mathrm{Min}(\{k\in[\![0;n-1]\!]\mid\lambda_k\neq 0\})$. La relation (1) devient donc $\sum_{k=m}^{n-1}\lambda_k u^k(x)=0_E$ ce qui, en composant par u^{n-m-1}, devient $\sum_{k=m}^{n-1}\lambda_k u^{n-m-1+k}(x)=0_E$. Or, dès que $k\geqslant m+1$, on a $n-m-1+k\geqslant n$ donc $u^{n-m-1+k}=u^n\circ u^{k-m-1}=0$ et la relation se résume à $\lambda_m u^{n-1}(x)=0_E$, ce qui est impossible car $\lambda_m\neq 0$ et $u^{n-1}(x)\neq 0_E$ par définition. On a donc montré que $(\lambda_0,\cdots,\lambda_{n-1})=(0,\cdots,0)$ ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est libre donc que $\mathcal{B}$ est une base de E.

b. Pour tout entier $k\in[\![0;n]\!]$, $\mathrm{Im}\,(u^k)=\mathrm{Vect}(u^k(x),\cdots,u^k(u^{n-1}(x)))=\mathrm{Vect}(u^k(x),\cdots,u^{n-1}(x))$ car $u^k(u^{n-k}(x))=\cdots=u^k(u^{n-1}(x))=0_E$ et que $\mathcal{B}=(x,u(x),\cdots,u^{n-1}(x))$ est une base de E. Comme $(u^k(x),\cdots,u^{n-1}(x))$ est une famille libre car c'est une sous-famille de $\mathcal{B}$, la famille $(u^k(x),\cdots,u^{n-1}(x))$ est à la fois libre et génératrice dans $\mathrm{Im}\,(u^k)$ donc $\mathrm{rang}\,(u^k)=\dim(\mathrm{Im}\,(u^k))=n-k$. Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u^k))=k$. Mais comme on a vu que $u^{n-k}(x),\cdots,u^{n-1}(x)$ étaient dans $\mathrm{Ker}(u^k)$ et que cette famille $(u^{n-k}(x),\cdots,u^{n-1}(x))$ de k vecteurs est libre une nouvelle fois car c'est une sous-famille de $\mathcal{B}$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(u^k)$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u^k)=\mathrm{Vect}(u^{n-k}(x),\cdots,u^{n-1}(x))$ est de dimension k pour $k\in[\![0;n]\!]$.

c. Comme u^k et u commutent pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, on sait d'après le cours que $\mathrm{Ker}(u^k)$ est stable par u.

Réciproquement, soit F un sous-espace de E stable par u. Notons $k=\dim(F)\in[\![0;n]\!]$. Traitons deux cas :

- si $k=0$, alors $F=\{0_E\}=\mathrm{Ker}(u^0)=\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E)$.
- si $k\in[\![1;n]\!]$, on peut considérer l'endomorphisme u_F induit par u sur F. Comme u est nilpotent, u_F l'est aussi car $\forall x\in F$, $u_F^n(x)=u^n(x)=0_E$. Posons p son indice de nilpotence, c'est-à-dire l'unique entier p tel que $u_F^p=0$ et $u_F^{p-1}\neq 0$. Comme en **a.**, il existe un vecteur $x\in F$ tel que $(x,\cdots,u^{p-1}(x))$ est libre. Ainsi, $\dim(F)=k\geqslant p$ et on a donc $u_F^k=u_F^p\circ u_F^{k-p}=0$ ce qui prouve que $\forall x\in F$, $u_F^k(x)=u^k(x)=0_E$ donc $F\subset\mathrm{Ker}(u^k)$. Par inclusion et égalité des dimensions, $F=\mathrm{Ker}(u^k)$.

Les sous-espaces de E stables par u sont les $n+1$ sous-espaces $\mathrm{Ker}(u^k)=\mathrm{Im}\,(u^{n-k})$ pour $k\in[\![0;n]\!]$.

2.182 Traitons d'abord des cas simples :

- Si $a=0$, alors $P=0$ et tous les réels sont des racines de P.
- Si $n=1$ et $a\neq 0$, alors $P=X+a-(X-a)=2a$ est constant non nul.
- Si $n=2$ et $a\neq 0$, alors $P=(X+a)^2-(X-a)^2=4aX$ et seul 0 est racine de P.

Nous traiterons dorénavant le cas général où $n \geqslant 2$ et $a \neq 0$. On constate, avec le binôme de NEWTON, que $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k X^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k X^{n-k} = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} a^{2k+1} X^{n-2k-1}$ donc P est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\lambda = 2na$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P, alors comme $P(a) = (2a)^n \neq 0$, on a $z \neq a$ et $(z+a)^n - (z-a)^n = 0 \iff (z+a)^n = (z-a)^n \iff \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^n = 1 \iff \left(\exists k \in [\![1; n-1]\!],\ \frac{z+a}{z-a} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$. En effet, $k = 0$ est impossible car on ne peut pas avoir $\frac{z+a}{z-a} = 1$. Ainsi, il existe un entier $k \in [\![1; n-1]\!]$ tel que $\frac{z+a}{z-a} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff z = a \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = a \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}} = -ia\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ (avec $\frac{k\pi}{n} \in]0; \pi[$). En remontant les calculs, on constate que les imaginaires purs $z_k = -ia\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont des racines de P et, comme la fonction cotan est injective sur $]0; \pi[$, on a $z_1, \cdots, z_{n-1}$ distincts. Puisque P est de degré $n-1$, on a le compte de ses racines et, d'après le cours, $P = 2na \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + ia\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

2.183 **a.** Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique avec $\mathcal{B}$ la base canonique, u serait la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$). Alors $A^2 = -I_2$ donc $u^2 = -\text{id}_E$.

b. Par hypothèse, $P = X^2 + 1$ annule u et on sait d'après le cours que les valeurs propres de u sont des racines de P. Or les seules racines de P sont $\pm i$ dont aucune n'est réelle. Ainsi, u n'admet aucune valeur propre réelle. De plus, $\det(-\text{id}_E) = (-1)^n = \det(u^2) = \det(u)^2 \geqslant 0$ ce qui impose $n = 2p$ pair.

c. Initialisation : soit $e_1 \neq 0_E \in E$ (e_1 existe car $\dim(E) \geqslant 1$) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda e_1 + \mu u(e_1) = 0_E$ (1), alors en appliquant u, on obtient $\lambda u(e_1) - \mu e_1 = 0_E$ (2). En effectuant $(1) - \mu(2)$, il reste $(\lambda^2 + \mu^2)e_1 = 0_E$ ce qui, comme $e_1 \neq 0_E$, montre que $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ donc que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, $(e_1, u(e_1))$ est libre.

Hérédité : soit un entier $k \in [\![1; p-1]\!]$ telle qu'il existe une famille libre $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ dans E. Comme $\dim(\text{Vect}(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))) = 2k < n$, il existe un vecteur non nul $e_{k+1} \in E$ tel que $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$. Soit $(\lambda_1, \mu_1, \cdots, \lambda_k, \mu_k) \in \mathbb{R}^{2k}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i e_i + \mu_i u(e_i)) = 0_E$ (1). On applique u à (1) pour avoir $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i u(e_i) - \mu_i e_i) = 0_E$ (2). En effectuant $\lambda_k(1) - \mu_k(2)$ et il reste $(\lambda_k^2 + \mu_k^2)e_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_k \lambda_i + \mu_k \mu_i)e_i + (\lambda_k \mu_i - \mu_k \lambda_i)u(e_i)) = 0_E$ donc, puisque $(e_1, u(e_1), \cdots, e_{k-1}, u(e_{k-1}), e_k)$ est libre, on a en particulier $\lambda_k^2 + \mu_k^2 = 0$ d'où $\lambda_k = \mu_k = 0$. (1) se résume alors à $\sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i e_i + \mu_i u(e_i)) = 0_E$ et on a $\lambda_1 = \mu_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = \mu_{k-1} = 0$ car $(e_1, u(e_1), \cdots, e_{k-1}, u(e_{k-1}))$ est libre. On a donc montré que $\lambda_1 = \mu_1 = \cdots = \lambda_k = \mu_k = 0$ et $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ est libre.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, il existe des vecteurs $e_1, \cdots, e_k$ tels que la famille $(e_1, u(e_1), \cdots, e_k, u(e_k))$ est libre.

Pour $k = p$, il existe donc $e_1, \cdots, e_p$ tels que la famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_p, u(e_p))$ est libre. Comme $\text{card}(\mathcal{B}) = n$, $\mathcal{B}$ est une base de E et, par construction, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(A, \cdots, A)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.184 D'abord, $C(A) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $0 \in C(A)$ car $0A = A0 = 0$ donc $C(A) \neq \emptyset$. De plus, si $(B, C) \in C(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC = \lambda BA + CA = (\lambda B + C)A$ donc $\lambda B + C \in C(A)$. Ainsi, même si ce n'est pas demandé, on a montré que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = (BC)A$, on a aussi $BC \in C(A)$ ce qui montre, comme $I_n \in C(A)$, que $C(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notion hors programme).

a. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. La matrice $A = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ est une matrice de Gauss et, si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice AB s'obtient à partir de B en échangeant les lignes i et j de B et la matrice BA s'obtient à partir de B en échangeant les colonnes i et j de B. Ainsi, $AB = BA$ si et seulement si $(b_{i,i} = b_{j,j},\ b_{i,j} = b_{j,i}, \forall k \in [\![1;n]\!] \setminus \{i,j\},\ b_{k,i} = b_{k,j}$ et $b_{i,k} = b_{j,k})$. Comme $AB = BA$ si et seulement si les termes des ligne et colonne i dépendent de ceux des ligne et colonne j (voir ci-dessus pour les relations entre ces termes), la dimension de $C(A)$ est le nombre de cases qui ne se trouve ni dans la ligne i ni dans la colonne i. Ainsi, $\dim(C(A)) = n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$.

b. Si $A = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ avec $a_1, \cdots, a_n$ distincts, pour une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice AB s'obtient à partir de B en multipliant la ligne i par a_i et BA s'obtient à partir de B en multipliant la colonne j par a_j. En écrivant l'égalité $AB = BA$, on se rend compte que $AB = BA \iff B$ est diagonale. Ainsi, $\dim(C(A)) = n$. L'exercice est certainement incomplet !

2.185 On sait que $z \in \mathbb{C}$ est racine au moins double de P_n si et seulement si $P_n(z) = P'_n(z) = 0$.

<u>Analyse</u> : soit $n \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $P_n(z) = P'_n(z) = 0$, alors $P_n(z) = (z-1)^n - z^n + 1 = 0$ et $P'_n(z) = n\big((z-1)^{n-1} - z^{n-1}\big) = 0$ donc $z \neq 0$. Comme $n \geqslant 2$ et $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^{n-1} = 1$, il existe $k \in [\![1;n-2]\!]$ tel que $\dfrac{z-1}{z} = 1 - \dfrac{1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$ ($k \neq 0$ car $1 - \frac{1}{z} \neq 1$). Alors, $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n - 1 + \left(\dfrac{1}{z}\right)^n = 0$ d'où, comme $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^{n-1} = 1$ donc $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n = \dfrac{z-1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}}$ puis $\dfrac{1}{z} = 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} = e^{\frac{ik\pi}{n-1}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n-1}} - e^{\frac{ik\pi}{n-1}}\right) = -2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$ d'où $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = (-1)^n 2^n i^n \left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)\right)^n e^{\frac{ikn\pi}{n-1}}$ et $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n - 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} - 1 = 2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$, on arrive à $2i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)e^{\frac{ik\pi}{n-1}} + (-1)^n(-1)^k 2^n i^n \left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)\right)^n e^{\frac{ik\pi}{n-1}} = 0$ car $e^{\frac{ikn\pi}{n-1}} = e^{ik\pi}e^{\frac{ik\pi}{n-1}} = (-1)^k e^{\frac{ik\pi}{n-1}}$ donc, en simplifiant par $2ie^{\frac{ik\pi}{n-1}} \neq 0$, en factorisant par $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)$, et comme $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right) \neq 0$ car $0 < \dfrac{k\pi}{n-1} < \pi$, il ne reste que $1 + (-1)^{n+k}2^{n-1}i^{n-1}\left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{n-1}\right)\right)^{n-1} = 0$ (1).

Ceci impose que $n-1$ est pair pour que $i^{n-1} \in \mathbb{R}$. On écrit $n = 2p+1$ et on a $(-1)^{k+p}2^{2p}\sin^{2p}\left(\dfrac{k\pi}{2p}\right) = 1$. On a donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2p}\right) = \dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{k\pi}{2p} \in]0;\pi[$. Ainsi, $\dfrac{k\pi}{2p} = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\dfrac{5\pi}{6}$ donc $p = 3k$ ou $5p = 3k$. Dans les deux cas, comme 3 et 5 sont premiers entre eux, p est un multiple de 3 par le lemme de Gauss. Ainsi, $n = 6m+1$.

<u>Synthèse</u> : supposons que $n = 6m+1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, alors $P_n = P_{6m+1} = (X-1)^{6m+1} - X^{6m+1} + 1$ et $P'_n = (6m+1)\big((X-1)^{6m} - X^{6m}\big)$. Prenons $k = m$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $1 - \dfrac{1}{z} = e^{\frac{2ik\pi}{n-1}} = e^{\frac{2im\pi}{6m}} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$ de sorte que $\dfrac{1}{z} = 1 + j^2 = -j$ donc $z = -j^2$. Alors $P_n(-j^2) = (-j^2-1)^{6m+1} - (-j^2)^{6m+1} + 1 = j^{6m+1} + (j^2)^{6m+1} + 1$ donc $P_n(-j^2) = j + j^2 + 1 = 0$ et $P'_n(-j^2) = (6m+1)\big((-j^2-1)^{6m} - (-j^2)^{6m}\big) = (6m+1)\big((j)^{6m} - (j^2)^{6m}\big)$ donc on a $P'_n(-j^2) = (6m+1)(1-1) = 0$. Par conséquent, $-j^2$ est racine au moins double de P_n. Comme $P''_n = (6m+1)(6m)\big((X-1)^{6m-1} - X^{6m-1}\big)$, on a $P''_n(-j^2) = (6m+1)(6m)\big((-j^2-1)^{6m-1} - (-j^2)^{6m-1}\big)$ d'où $P''_n(-j^2) = (6m+1)(6m)\big((j)^{6m-1} + (j^2)^{6m-1}\big) = (6m+1)(6m)(j^2+j) = -(6m+1)(6m) \neq 0$ donc $-j^2$ est

racine d'ordre exactement 2 de P_n. Comme $P_n \in \mathbb{R}[X]$, $-j = \overline{-j^2}$ est aussi racine double de P_n.

<u>Conclusion</u> : les valeurs de n telles que P_n admet une racine double sont exactement les entiers de la forme $6m+1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Les racines doubles de P_n sont alors $-j^2$ et $-j$.

2.186 **a.** On calcule $AM = \begin{pmatrix} m_{2,1} & \cdots & \cdots & m_{2,n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n+1,1} & \cdots & \cdots & m_{n+1,n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n+1,1} & \cdots & m_{n+1,n} \end{pmatrix}$ pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$ si et seulement si $m_{2,1} \cdots = m_{n+1,1} = m_{n+1,1} = \cdots = m_{n+1,n} = 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![2;n+1]\!]$, $m_{i+1,j} = m_{i,j-1}$. Par conséquent, les matrices $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ sont exactement celles de la forme $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & \cdots & m_{1,n+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & m_{1,2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{1,1} \end{pmatrix} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} m_{1,k} \Big(\sum\limits_{i=1}^{n+2-k} E_{i,i+k-1} \Big)$. On en déduit que le commutant de A, c'est-à-dire $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \ \ AM = MA\}$ vérifie $C(A) = \mathrm{Vect}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n+1} E_{i,i}, \cdots, E_{1,n+1} \Big)$ et, puisque la famille $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n+1} E_{i,i}, \cdots, E_{1,n+1} \Big)$ est clairement libre, on a $\dim(C(A)) = n+1$.

b. <u>Analyse</u> : soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par D, notons $p = \dim(F)$ sa dimension. Comme $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P^{(n+1)} = 0$, on a $D^{n+1} = 0$ donc D est nilpotent. A fortiori, D_F, l'endomorphisme induit par D dans F, est aussi nilpotent. Notons $r \geqslant 1$ l'indice de nilpotence de D_F, de sorte que $D_F^r = 0$ et $D_F^{r-1} \neq 0$. Prenons $P \in F$ tel que $D_F^{r-1}(P) \neq 0$, alors on montre classiquement que la famille $(P, D_F(P), \cdots, D^{r-1}(P))$ est libre dans F par stabilité de F par D. Par conséquent, le cardinal de cette famille est inférieur à la dimension de F, donc $r \leqslant p$. On a donc $D_F^p = 0$, c'est-à-dire que $\forall P \in F$, $D_F^p(P) = D^p(P) = P^{(p)} = 0$ donc $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$. Comme $F \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$ alors que $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}_{p-1}[X]) = p$, on a $F = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

<u>Synthèse</u> : tous les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $p \in [\![1;n+1]\!]$ sont stables par dérivation.

En conclusion, les sous-espaces stables de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par D sont $\{0\}$ et tous les sous-espaces $\mathbb{R}_m[X]$ avec $m \in [\![0;n]\!]$: il y a donc $n+2$ tels sous-espaces.

c. Posons $\mathcal{B} = \Big(1, X, \frac{X^2}{2}, \cdots, \frac{X^n}{n!}\Big)$, cette famille est formée de polynômes de degrés échelonnés donc elle est libre. De plus, son cardinal est égal à la dimension $n+1$ de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = A$ car $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $\Big(\frac{X^{k+1}}{(k+1)!}\Big)' = \frac{X^k}{k!}$. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $D \circ f = f \circ D \iff AM = MA$. Ceci justifie que $\varphi : C(D) \to C(A)$ définie par $\varphi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est bien définie et que c'est un isomorphisme car elle est clairement linéaire et injective, sa surjectivité découlant de l'équivalence $D \circ f = f \circ D \iff AM = MA$. Par conséquent, les commutants de l'endomorphisme D et de la matrice A étant isomorphismes, ils ont même dimension donc, d'après **a.**, $\dim(C(D)) = n+1$.

2.187 **a.** Soit $n = \dim(E)$ et A un sous-espace vectoriel de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Comme on sait que $\dim(E^*) = \dim(E) = n$, A est aussi de dimension finie, notons $p = \dim(A) \leqslant n = \dim(E^*)$. Soit $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$ une base de A et

$\psi : E \to \mathbb{R}^p$ définie par $\forall x \in E,\ \psi(x) = (\ell_1(x), \cdots, \ell_p(x))$. L'application ψ est clairement linéaire. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$, alors $\forall k \in [\![1;p]\!],\ \ell_k(x) = 0$. Soit $\ell \in A$, il existe alors $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \ell_k$, ce qui montre que $\ell(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \ell_k(x) = 0$ donc $x \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$. Ainsi, ψ est injective ce qui montre que $\dim(E) = n \leqslant p = \dim(\mathbb{R}^p)$.

On a donc $p = n$ donc, comme $\dim(A) = \dim(E^*)$ et $A \subset E^*$, on a comme attendu $A = E^*$.

b. Posons $E = \mathrm{Vect}(f_1, \cdots, f_n)$ de sorte que E est un sous-espace de dimension finie de $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par définition, on a $\dim(E) = \mathrm{rang}\,(f_1, \cdots, f_n)$.

$(\Longrightarrow)$ Supposons $(f_1, \cdots, f_n)$ libre, alors $\dim(E) = n$. Soit $A = \mathrm{Vect}(\{\varphi_x \mid x \in \mathbb{R}\})$ le sous-espace de E^* engendré par les formes linéaires $\varphi_x : E \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_x(f) = f(x)$. Si $f \in E$ vérifie $f \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell)$, alors en particulier on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_x(f) = f(x) = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, $\bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell) = \{0_E\}$ d'où $A = E^*$ d'après la question **a.**. Comme $\dim(E) = n$, on a aussi $\dim(E^*) = n$. Soit $\mathcal{B} = (\psi_1, \cdots, \psi_n)$ une base de E^*. Par définition, les ψ_k sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de φ_x et, comme il y a un nombre fini de ψ_k, on peut énumérer $\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p}$ toutes les formes linéaires dont se composent les formes linéaires de la base $\mathcal{B}$. Comme la famille $(\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p})$ engendre $\mathcal{B}$ qui elle-même engendre E^*, alors $\mathcal{F} = (\varphi_{y_1}, \cdots, \varphi_{y_p})$ est génératrice de E^*. Par le théorème de la base extraite, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{B}' = (\varphi_{x_1}, \cdots, \varphi_{x_n})$ qui est une base de E^* (de cardinal n car $\dim(E^*) = n$) avec $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \{y_1, \cdots, y_p\}$.

Considérons $\theta : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\theta(f) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$ de sorte que θ est clairement linéaire. Si $f \in \mathrm{Ker}(\theta)$, on a $f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ donc $\varphi_{x_1}(f) = \cdots = \varphi_{x_n}(f) = 0$. Soit $\ell \in E^*$ qu'on écrit $\ell = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{x_k}$, on a donc $\ell(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_{x_k}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) = 0$ donc $f \in \mathrm{Ker}(\ell)$. Par conséquent, $f \in \bigcap\limits_{\ell \in A} \mathrm{Ker}(\ell)$ donc $f = 0_E$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\theta) = \{0_E\}$ donc que θ est injective. Mais comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$, ceci montre que θ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$. Comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\theta) = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en notant $\mathcal{B}_0 = (f_1, \cdots, f_n)$ la base de E, la matrice A est inversible.

$(\Longleftarrow)$ Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $A = \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En appliquant ceci en les x_j, on a donc $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_j) = 0$ ce qui, en définissant $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par $Y^T = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n)$, se traduit par $AY = 0$. Comme A est inversible, on a donc $Y = 0$ donc $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (0, \cdots, 0)$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.

Par double implication, on a bien montré que $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe une famille $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que la matrice $\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

2.188 **a.** Soit $x \in E$, comme $\mathrm{id}_E = p + q$, on a $x = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$ donc on a déjà $E = \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q)$. D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\,(p)) + \dim(\mathrm{Im}\,(q)) - \dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)) \quad (1)$ donc, comme $\dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)) \geqslant 0$, on en déduit que $\dim(E) \leqslant \mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q)$. Or on a l'hypothèse $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) \leqslant \dim(E)$ ainsi on a $\mathrm{rang}\,(p) + \mathrm{rang}\,(q) = \dim(E)$ par double inégalité donc, avec (1), on a $\dim(\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q)) = 0$ qui montre que $\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(q) = \{0_E\}$. Par conséquent, $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q)$.

b. Méthode 1 : soit $x \in E$, en écrivant $x = p(x) + q(x)$ avec $p(x) = y \in \text{Im}(p)$ et $q(x) = z \in \text{Im}(q)$. Par construction, $p(x) = y$ donc p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Im}(q)$. Par symétrie, $q(x) = z$ donc q est la projection sur $\text{Im}(q)$ parallèlement à $\text{Im}(p)$.

Méthode 2 : $q = \text{id}_E - p$ donc $\mathsf{Ker}(q) = \mathsf{Ker}(\text{id}_E - p) \subset \text{Im}(p)$ car $\forall x \in \mathsf{Ker}(\text{id}_E - p)$, $x = p(x) \in \text{Im}(p)$. Avec la formule du rang, $\dim(\mathsf{Ker}(q)) = \dim(E) - \text{rang}(q) = \text{rang}(p) = \dim(\text{Im}(p))$ avec la question **a.** donc, par inclusion et égalité des dimensions, $\mathsf{Ker}(q) = \text{Im}(p)$. Ainsi, $p^2 = p \circ p = p \circ (\text{id}_E - q) = p - p \circ q) = p$ donc p est un projecteur. Par symétrie, q est un projecteur.

2.189 **a.** Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$. Considérons la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a))$. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 a + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ (1). Supposons que $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$. Il existe alors $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$ et on peut poser $m = \mathsf{Min}\left(\{i \in [\![0; n-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}\right) \in [\![0; n-1]\!]$. L'équation (1) s'écrit donc $\lambda_m f^m(a) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$ (1) qu'on compose par f^{n-m-1} et, comme $f^n = \cdots = f^{2n-m-2} = 0$, pour qu'il ne reste que $\lambda_m f^{n-1}(a) = 0_E$. Mais ceci est impossible car $f^{n-1}(a) \neq 0_E$ et $\lambda_m \neq 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$, donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Comme $\mathcal{B}$ comporte n vecteurs et que $\dim(E) = n$, on en conclut que $\mathcal{B}$ est une base de E.

b. Comme $f(f^{n-1}(a)) = f^n(a) = 0_E$, on a $f^{n-1}(a) \in \mathsf{Ker}(f)$ donc $\mathsf{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ ce qui garantit que f n'est pas injective donc pas bijective.

c. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M. Alors $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ donc, d'après **a.**, il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base $\mathcal{B}$, alors $M = PTP^{-1}$ en notant $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Or, comme $f(f^2(a)) = f^3(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$, on a $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc M est semblable à T.

d. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons alors $B = P^{-1}BP$ de sorte que $A = PBP^{-1}$, alors on a l'équivalence $AM = MA \iff PBP^{-1}PTP^{-1} = PTP^{-1}PBP^{-1} \iff BT = TB$. En écrivant B avec ses coefficients, c'est-à-dire en posant $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, on calcule aisément $BT = \begin{pmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & 0 \\ b_{2,2} & b_{2,3} & 0 \\ b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \end{pmatrix}$ et $TB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \end{pmatrix}$, ce qui donne $BT = TB \iff (b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,3} = 0$ et $b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3}$ et $b_{2,1} = b_{3,2})$.

Ainsi, les matrices A qui commutent avec M sont exactement les matrices $A = P\begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{1,1} & 0 \\ b_{3,1} & b_{2,1} & b_{1,1} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire les matrices de la forme $A = P(b_{1,1}I_3 + b_{2,1}T + b_{3,1}T^2)P^{-1} = b_{1,1}I_3 + b_{2,1}M + b_{3,1}M^2 = Q(M)$ avec $Q = b_{1,1} + b_{2,1}X + b_{3,1}X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Réciproquement, tout polynôme en M commute avec M d'après le cours. On vient de montrer que le commutant $C(M)$ de M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (c'est classique, c'est même une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) et que $C(M) = \mathsf{Vect}(I_3, M, M^2)$ est de dimension 3.

2.13 Officiel de la Taupe

2.190 **a.** Calculons $(v \circ u)^2 = v \circ (u \circ v) \circ u = v \circ \mathrm{id}_F \circ u = v \circ u$. Ainsi, $v \circ u$ est un projecteur de E. D'après le cours, le rang d'un projecteur en dimension finie est sa trace donc $\mathrm{rang}\,(v \circ u) = \mathrm{Tr}\,(v \circ u)$. Or on a la formule $\mathrm{Tr}\,(v \circ u) = \mathrm{Tr}\,(u \circ v)$ en général, ce qui donne $\mathrm{rang}\,(v \circ u) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{id}_F) = p$.

Il est classique que $\mathrm{Ker}(v \circ u) \supset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\,(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\,(v)$.

- $\mathrm{rang}\,(v) \leqslant \dim(F) = p$, d'où $\mathrm{rang}\,(v \circ u) = p \geqslant \mathrm{rang}\,(v) \Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}\,(v \circ u)) \geqslant \dim(\mathrm{Im}\,(v))$. Comme $\mathrm{Im}\,(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\,(v)$, on en déduit $\mathrm{Im}\,(v \circ u) = \mathrm{Im}\,(v)$ (inclusion et égalité des dimensions).
- $\mathrm{rang}\,(u) \leqslant \dim(F) = p$, d'où $\dim(\mathrm{Ker}(v \circ u)) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rang}\,(u) \geqslant n - p = \dim(\mathrm{Ker}(v \circ u))$ avec la formule du rang appliquée à u et à $v \circ u$, on en déduit de même que $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.

On aurait aussi pu utiliser la relation $u \circ v = \mathrm{id}_F$ pour avoir :

- $u \circ v$ injective implique v injective donc $\mathrm{rang}\,(v) = p = \mathrm{rang}\,(v \circ u)$ et $\mathrm{Im}\,(v \circ u) = \mathrm{Im}\,(v)$.
- $u \circ v$ surjective implique u surjective donc $\mathrm{rang}\,(u) = p$ d'où $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(v \circ u))$ et on en déduit comme avant que $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$ (inclusion et égalité des dimensions).

Au final, $v \circ u$ est la projection sur $\mathrm{Im}\,(v \circ u) = \mathrm{Im}\,(v)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.

b. On sait que les entiers $\mathrm{rang}\,(u)$ et $\mathrm{rang}\,(v)$ sont inférieurs à $\mathrm{Min}(\dim(E), \dim(F)) = p$ car u va de E dans F et v va de F dans E. Or, on sait aussi que $p = \mathrm{rang}\,(u \circ v) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{rang}\,(u), \mathrm{rang}\,(v))$. Par conséquent, $p \leqslant \mathrm{rang}\,(u), \mathrm{rang}\,(v) \leqslant p$ ce qui implique $\mathrm{rang}\,(u) = \mathrm{rang}\,(v) = p$.

Comme le rang de u est égal à la dimension de son espace de d'arrivée F, u est surjective.

Comme le rang de v est égal à la dimension de son espace de départ, v est injective.
Mais comme $v \circ (u \circ v) \circ u = (v \circ u)^2 = v \circ u = v \circ \mathrm{id}_F \circ u \Longleftrightarrow v \circ (u \circ v - \mathrm{id}_F) \circ u = 0$, l'injectivité de v prouve que $(u \circ v) \circ u = \mathrm{id}_F \circ u$ et la surjectivité de u montre que $u \circ v = \mathrm{id}_F$.

En effet, on a les deux implications classiques, si $f \in \mathcal{L}(B, C)$ et $g \in \mathcal{L}(A, B)$:

- si $f \circ g = 0$ et f injective alors $\{0_B\} \subset \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(f) = \{0_B\}$ donc $\mathrm{Im}\,(g) = \{0_B\}$ d'où $g = 0$.
- si $f \circ g = 0$ et g surjective alors $B = \mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}(f) \subset B$ donc $\mathrm{Ker}(f) = B$ d'où $f = 0$.

2.191 Tout d'abord, les sous-espaces dont on parle sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ en identifiant les matrices et les applications linéaires (ici des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$) canoniquement associés. Il est clair que l'on a $\mathrm{Ker}(BC) \subset \mathrm{Ker}(ABC)$ d'où l'existence d'un supplémentaire (noté F) de $\mathrm{Ker}(BC)$ dans $\mathrm{Ker}(ABC)$.
Notons φ l'application de l'énoncé, c'est-à-dire la restriction de C à F au départ et $\mathrm{Ker}(AB)$ à l'arrivée. C'est licite car si $X \in F$, on a $X \in \mathrm{Ker}(ABC)$ donc $(ABC)X = AB(CX) = 0$ (vecteur colonne nul). D'après le théorème du rang appliqué à φ : $\dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}(ABC)) - \dim(\mathrm{Ker}(BC)) = \mathrm{rang}\,(\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$. Mais on peut aussi l'appliquer à ABC et à BC pour avoir $\mathrm{rang}\,(BC) - \mathrm{rang}\,(ABC) = \mathrm{rang}\,(\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$. Or $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(C) \cap F = \{0\}$ (classique et car $\mathrm{Ker}(C) \subset \mathrm{Ker}(BC)$ et $\mathrm{Ker}(BC) \cap F = \{0\}$). Il est clair que $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(AB) \cap \mathrm{Im}\,(C)$.
Notons alors ψ l'application qui va de $\mathrm{Im}\,(C)$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à X associe ABX. Alors $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(AB) \cap \mathrm{Im}\,(C)$ et $\mathrm{Im}\,(\psi) \subset \mathrm{Im}\,(ABC)$ (c'est clair). De plus, si $Y \in \mathrm{Im}\,(ABC)$, $\exists X \in \mathbb{R}^n,\ Y = ABCX = AB(CX) = ABZ$ avec $Z = CX \in \mathrm{Im}\,(C)$ donc $\mathrm{Im}\,(\psi) = \mathrm{Im}\,(ABC)$. On obtient donc $\mathrm{rang}\,(C) = \dim(\mathrm{Ker}(AB) \cap \mathrm{Im}\,(C)) + \mathrm{rang}\,(ABC)$

2.192 Si P convient, on a $P = (X^2+X+1)Q_1 + X - \frac{1}{2}$ et $P = (X^2-X+1)Q_2 + 2 - X$ donc $P(j) = j - \frac{1}{2}$, $P(j^2) = j^2 - \frac{1}{2}$, $P(-j) = 2 + j$ et $P(-j^2) = 2 + j^2$. Réciproquement, si P prend ces quatre valeurs, le polynôme $P - X + \frac{1}{2}$

s'annule en j et en j^2 donc est divisible par X^2+X+1 ; de même $P-2+X$ est divisible par X^2-X+1 et P convient.
Le polynôme de degré minimal qui vérifie $P(j)=j-\frac{1}{2}$, $P(j^2)=j^2-\frac{1}{2}$, $P(-j)=2+j$ et $P(-j^2)=2+j^2$ est le polynôme d'interpolation de LAGRANGE :

$$P=\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{(X-j^2)(X+j)(X+j^2)}{(j-j^2)(j+j)(j+j^2)}+\left(j^2-\frac{1}{2}\right)\frac{(X-j)(X+j)(X+j^2)}{(j^2-j)(j^2+j)(j^2+j^2)}+$$
$$(2+j)\frac{(X-j)(X-j^2)(X+j^2)}{(-j-j)(-j-j^2)(-j+j^2)}+(2+j^2)\frac{(X-j)(X-j^2)(X+j)}{(-j^2-j)(-j^2-j^2)(-j^2+j)}.$$

Les calculs donnent $P=-\frac{5}{4}X^3-X^2-\frac{1}{4}$ sachant que $j^3=1$ et que $1+j+j^2=0$.

On aurait pu aussi dire que P de degré minimal est maximum de degré 3 toujours par LAGRANGE donc doit s'écrire $P=(X^2-X+1)(\alpha X+\beta)+2-X$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ par la seconde condition. La première se traduit alors par $P(j)=-2j(\alpha j+\beta)+2-j=j-\frac{1}{2}$ (la valeur de $P(j^2)$ n'apporte rien de plus car α et β sont réels).
On obtient $\left(2\alpha+\frac{5}{2}\right)+\left(2\alpha-2\beta-2\right)j=0$ et comme la famille $(1,j)$ est libre dans $\mathbb{C}$, cela donne $\alpha=-\frac{5}{4}$ et $\beta=-\frac{9}{4}$ et on obtient le même résultat : $P=-\frac{5}{4}X^3-X^2-\frac{1}{4}$.

2.193 Si p est un projecteur, alors p est la projection sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. Avec une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E=\mathrm{Im}\,(p)\oplus\mathrm{Ker}(p)$: $D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ où $r=\mathrm{rang}\,(p)=\dim(\mathrm{Im}\,p)$.
Comme la trace de p est celle de sa matrice dans n'importe quelle base : $\mathrm{Tr}\,(p)=\mathrm{Tr}\,(D)=r=\mathrm{rang}\,(p)$.
Si $\forall (i,j)\in[\![1;n]\!]^2,\ i\neq j\Longrightarrow p_i\circ p_j=0$, alors en développant on a $P^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}p_i\circ p_j=\sum_{k=1}^n p_k^2$ par hypothèse donc $P^2=P$ car les p_k sont des projecteurs ; P est donc aussi un projecteur.
Réciproquement, si P est un projecteur, on a $\mathrm{Im}\,(P)=\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^r p_i\right)\subset\sum_{i=1}^r\mathrm{Im}\,(p_i)$ et, par linéarité de la trace, $\dim(\mathrm{Im}\,(P))=\mathrm{rang}\,(P)=\mathrm{Tr}\,(P)=\sum_{i=1}^n\mathrm{Tr}\,(p_i)=\sum_{i=1}^n\mathrm{rang}\,(p_i)=\sum_{i=1}^n\dim(\mathrm{Im}\,(p_i))$. On en déduit donc que :

- $\mathrm{Im}\,(P)=\sum_{i=1}^r\mathrm{Im}\,(p_i)$ (si l'inclusion était stricte : $\dim(\mathrm{Im}\,(P))<\dim\left(\sum_{i=1}^r\mathrm{Im}\,(p_i)\right)\leqslant\sum_{i=1}^n\dim(\mathrm{Im}\,(p_i))$).
- La somme des $\mathrm{Im}\,(p_i)$ est directe d'après le cours car $\dim\left(\sum_{i=1}^r\mathrm{Im}\,(p_i)\right)=\sum_{i=1}^n\dim(\mathrm{Im}\,(p_i))$.

Par conséquent : $\mathrm{Im}\,(P)=\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}\,(p_i)$.
Soit alors $x\in E$, on a $p_i(x)=x_i\in\mathrm{Im}\,(p_i)$ donc $x_i=p_i(x_i)$ mais aussi $x_i=P(x_i)$ car $x_i\in\mathrm{Im}\,(P)\supset\mathrm{Im}\,(p_i)$.
On en déduit que $P(x_i)=\sum_{j=1}^n p_j(x_i)=p(x_i)+\sum_{j\neq i}p_j(x_i)$ donc $\sum_{j\neq i}p_j(x_i)=0$ et comme la somme $\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}\,(p_i)$ est directe, on a $\forall j\neq i,\ p_j(x_i)=0$ donc $p_j\circ p_i(x)=0$.

2.194 **a.** Considérons $\tilde{g}:\mathrm{Im}\,(f)\to\mathrm{Im}\,(g\circ f)$ qui est la restriction de g (c'est-à-dire $\tilde{g}=g|_{\mathrm{Im}\,(f)}^{\mathrm{Im}\,(g\circ f)}$).
Cette application est bien sûr linéaire et elle est aussi surjective par construction car si $z\in\mathrm{Im}\,(g\circ f)$, il existe $x\in E,\ z=g\circ f(x)=\tilde{g}(f(x))\in\mathrm{Im}\,(\tilde{g})$. Ainsi :

$$\mathrm{rang}\,(g\circ f)=\mathrm{rang}\,(f)\Longleftrightarrow\dim(\mathrm{Im}\,(g\circ f))=\dim(\mathrm{Im}\,(f))\Longleftrightarrow\tilde{g}\text{ isomorphisme}\Longleftrightarrow\tilde{g}\text{ injective.}$$

Or $\mathrm{Ker}(\tilde{g})=\mathrm{Im}\,(f)\cap\mathrm{Ker}(g)$ car $x\in\mathrm{Ker}(\tilde{g})\Longleftrightarrow(x\in\mathrm{Im}\,(f)\text{ et }\tilde{g}(x)=g(x)=0_E)$. Par conséquent :

$$\mathrm{rang}\,(g\circ f)=\mathrm{rang}\,(f)\Longleftrightarrow\mathrm{Ker}(\tilde{g})=\{0_E\}\Longleftrightarrow\mathrm{Im}\,(f)\cap\mathrm{Ker}(g)=\{0_E\}.$$

b. ($\Longrightarrow$) On a toujours l'inclusion $\mathrm{Im}\,(g\circ f)\subset\mathrm{Im}\,(g)$ or on vient de supposer que $\mathrm{rang}\,(g\circ f)=\mathrm{rang}\,(g)$ ce qui donne l'égalité des dimensions des espaces précédents : $\mathrm{Im}\,(g\circ f)=\mathrm{Im}\,(g)$. Soit $x\in E$, comme $g(x)\in\mathrm{Im}\,(g)$, on a aussi $g(x)\in\mathrm{Im}\,(g\circ f)$ d'où l'existence de $y\in E$ tel que $g(x)=g\circ f(y)\Longleftrightarrow g(x-f(y))=0_E$. Alors $x=(x-f(y))+f(y)$ et $x-f(y)\in\mathrm{Ker}(g)$ et $f(y)\in\mathrm{Im}\,(f)$. On a bien $E=\mathrm{Im}\,(f)+\mathrm{Ker}(g)$.
($\Longleftarrow$) L'inclusion $\mathrm{Im}\,(g\circ f)\subset\mathrm{Im}\,(g)$ étant vraie, il faut montrer la réciproque.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, on décompose $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Im}\,(f)$ (donc $a = f(c)$ avec $c \in E$) et $b \in \mathrm{Ker}(g)$ et $y = g(a+b) = g(a) + g(b) = g \circ f(c) \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$.
On a donc $\mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(g \circ f)$ et l'égalité des rangs en passant aux dimensions.

2.195 Une étude de fonctions : $P(0) = -1 < 0 < P(1) = 1 > 0 > P(2) = -1 < 0 < +\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$.
En ordonnant : $a \simeq 0,198$, $b \simeq 1,555$ et $c \simeq 3,247$ à 10^{-3} près.
Relations coefficients-racines pour le polynôme P : $\sigma_1 = a+b+c = 5$, $\sigma_2 = ab+ac+bc = 6$ et $\sigma_3 = abc = 1$.
Pour le polynôme $Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$, cela donne :

- $s_1 = \alpha+\beta+\gamma = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 4\sigma_1 + 12 = 5$ puis
- $s_3 = \big[(a-2)(b-2)(c-2)\big]^2 = (\sigma_3 - 2\sigma_2 + 4\sigma_1 - 8)^2 = 1$ et
- $s_2 = (a-2)^2(b-2)^2 + (a-2)^2(c-2)^2 + (b-2)^2(c-2)^2$ donc en regroupant les termes semblables $s_2 = (\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) - 4(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) + 8(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 16\sigma_2 - 32\sigma_1 + 48 = 6$.

ce qui donne $Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - s_1X^2 + s_2X - s_3 = P$.
Mais plus simplement : $Q(X^2) = \big(X^2 - (a-2)^2\big)\big(X^2 - (b-2)^2\big)\big(X^2 - (c-2)^2\big)$ d'où l'on déduit que $Q(X^2) = -P(X+2)P(2-X) = X^6 - 5X^4 + 6X^2 - 1 = P(X^2)$ (après calculs) et à nouveau : $Q = P$.

2.196 <u>Méthode 1</u> : On constate que l'ensemble $\mathcal{E}$ des polynômes P qui vérifient $\exists (A,B) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ P = A^2 + B^2$ est stable par produit car $(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AD-BC)^2 + (AC+BD)^2$ (relation de LAGRANGE). À part si P est un polynôme constant et alors tout est clair, le polynôme P vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$ se décompose en produit de polynômes réels de plusieurs types :

- son coefficient dominant λ forcément strictement positif car $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$: $\lambda = (\sqrt{\lambda})^2 + 0^2$.
- des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ du type $(X-\alpha)^{2m}$ (forcément la multiplicité est paire sinon il y a changement de signe de P au voisinage de α) et alors : $(X-\alpha)^{2m} = \big((X-\alpha)^m\big)^2 + 0^2$.
- des polynômes de degré 2 sans racine réelle : $X^2 + 2aX + b$ et $X^2 + 2aX + b = (X+a)^2 + \big(\sqrt{b-a^2}\big)^2$.

Par stabilité par produit, tous les polynômes P qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$ sont des sommes de carrés de polynômes. La réciproque est claire.

<u>Méthode 2</u> : on écrit P sous forme scindée mais forcément dans $\mathbb{C}$ avec des racines complexes conjuguées de même multiplicité (car $P \in \mathbb{R}[X]$) et des racines réelles de multiplicité paire (comme ci-dessus) et on peut donc écrire $P = Q\overline{Q}$ où l'on met dans Q la moitié des racines réelles et les racines complexes dont la partie imaginaire est strictement positive par exemple.
En écrivant $Q = A + iB$ où A et B sont des polynômes réels, on a $P = (A+iB)(A-iB) = A^2 + B^2$.

2.197 ϕ ainsi définie associe un polynôme à un polynôme et la linéarité est immédiate. Comme on n'augmente pas le degré en faisant une combinaison linéaire de polynômes, on a bien $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
• Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P \in \mathrm{Ker}(\phi) \iff P(X+1)+P(X-1)-2P(X) = 0 \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1)+P(x-1)-2P(x) = 0)$.
Posons donc $u_n = P(n)$ pour tout entier n si $P \in \mathrm{Ker}(\phi)$, on a donc $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$ et on obtient classiquement $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u_n = an + b$ car l'équation caractéristique est $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0$. Ainsi les polynômes P et $a + b$ coïncident sur $\mathbb{N}$ infini donc sont formellement égaux. Réciproquement, on vérifie facilement que $aX + b \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Ainsi : $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{R}_1[X]$ est de dimension 2.
On aurait pu calculer directement l'image de $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ mais la démarche précédente marche aussi si on travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$ avec n quelconque.
• $\mathrm{Im}\,(\phi) = \mathrm{Vect}(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2), \phi(X^3)) = \mathrm{Vect}(2, 6X) = \mathbb{R}_1[X]$. Donc $\mathrm{Im}\,(\phi) = \ker(\phi) = \mathbb{R}_1[X]$ et $\phi^2 = 0$.
• On aurait pu constater que $\phi = \psi^2$ où $\psi(P)(X) = P\Big(X + \dfrac{1}{2}\Big) - P\Big(X - \dfrac{1}{2}\Big)$ et il est classique que si $\deg(P) \geqslant 1$ on a $\deg(\psi(P)) = \deg(P) - 1$ donc $\deg(\phi(P)) = \deg(P) - 2$ si $\deg(P) \geqslant 2$ et ceci justifie que ϕ est nilpotent d'ordre 2 donc $\mathrm{Im}\,(\phi) = \mathbb{R}_1[X] \subset \mathrm{Ker}(\phi)$ et on a l'égalité avec le théorème du rang et les dimensions.

2.198 **a.** $A^2 = A$, A est une matrice de projecteur donc $\mathrm{Im}\,(I_n - A) = \mathrm{Ker}(A)$ et le théorème du rang nous donne $\mathrm{rang}\,(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$ donc $\mathrm{rang}\,(A) + \mathrm{rang}\,(I_n - A) = n$. On vient d'établir $C_2 \Longrightarrow C_3$.
$\forall i \in [\![1;k]\!],\ A_i^2 = A_i$, les matrices A_i sont des matrices de projecteurs et alors $\mathrm{rang}\,(A_i) = \mathrm{Tr}\,(A_i)$. De plus, grâce à (C_1), en élevant $A = \sum\limits_{i=1}^{k} A_i$ au carré, il reste $A^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} A_i^2 = A$ (les double-carrés sont nuls). A est

donc aussi une matrice de projecteur qui vérifie donc $\text{rang}(A) = \text{Tr}(A)$ et par linéarité de la trace, on a donc $\text{rang}(A) = \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{k} \text{Tr}(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \text{rang}(A_i)$. On vient de montrer $C_1 \Longrightarrow C_2$.

b. On écrit les matrices R, S, T par trois blocs dont celui du milieu (correspondant aux blocs A_i de D) est décomposé en k blocs ($L_{2,1}, \cdots, L_{2,k}$ et $C_{2,1}, \cdots, C_{2,k}$), ce qui fait finalement $k+2$ blocs de taille n.

Opérations de Gauss pour passer de S à R : par blocs cela donne par exemple $C_3 \leftarrow C_3 + C_1 - \sum_{j=1}^{k} C_{2,j}$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \sum_{i=1}^{n} L_{2,i}$ et ces opérations ne modifient pas le rang donc $\text{rang}(S) = \text{rang}(R)$.

Les matrices par blocs $U = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ -Q & I_{nk} & -Q \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} I_n & -P & 0 \\ 0 & I_{nk} & 0 \\ 0 & -P & I_n \end{pmatrix}$ sont inversibles avec pour inverses $U^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ Q & I_{nk} & Q \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$ et $V^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & P & 0 \\ 0 & I_{nk} & 0 \\ 0 & P & I_n \end{pmatrix}$ et on a $USV = T$ donc $\text{rang}(S) = \text{rang}(T)$.

c. Comme les matrices R et T sont diagonales par blocs (R est "anti-diagonale" par blocs), on a assez facilement $\text{rang}(R) = n + \text{rang}(I_n - A) + \text{rang}(D) = \text{rang}(T) = 2n + \text{rang}(D - QP)$. D est aussi diagonale par blocs : $\text{rang}(D) = \sum_{i=1}^{k} \text{rang}(A_i)$. En identifiant : $\text{rang}(D - QP) = \text{rang}(I_n - A) - n + \sum_{i=1}^{k} \text{rang}(A_i)$.

d. Il ne reste qu'à prouver que $C_3 \Longrightarrow C_1$ et on aura l'équivalence des trois assertions.

Si on a C_3, alors $n - \text{rang}(I_n - A) = \dim(\text{Ker}(I_n - A)) = \dim(\text{Im}(A)) = \text{rang}(A)$ d'après le théorème du rang. Or $\text{Ker}(I_n - A) \subset \text{Im}(A)$ en général donc $\text{Ker}(I_n - A) = \text{Im}(A)$ d'où $A(I_n - A) = 0 \Longleftrightarrow A^2 = A$. A est donc un projecteur. On aurait aussi pu dire d'après la question **c.** que $\text{rang}(A^2 - A) = 0$ donc que $A^2 = A$.

Pour le reste : ??????????

2.199 **a.** $a + b + c = 0$ signifie que le centre de gravité (isobarycentre) du triangle est à l'origine O.

- Si ABC est équilatéral, les points A, B et C sont donc situés sur un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

Si ABC est direct, il existe donc α tel que $a = Re^{i\alpha}$, $b = Re^{i\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)}$ et $c = Re^{i\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)}$ donc $b = ja$ et $c = j^2 a$.

Si ABC est indirect, il existe α tel que $a = Re^{i\alpha}$, $c = Re^{i\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)}$ et $b = Re^{i\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right)}$ donc $b = j^2 a$ et $c = ja$.

- Réciproquement, si l'une de ces conditions est réalisée, il est clair que le triangle ABC est équilatéral, direct dans le premier cas et indirect dans le second.

b. Si $\sqrt{3}$ était rationnel, on aurait $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et p et q premiers entre eux, alors $p^2 = 3q^2$ donc p est un multiple de 3 (car si $p \equiv 1\ [3]$ on a $p^2 \equiv 1\ [3]$ et si $p \equiv 2\ [3]$ on a $p^2 \equiv 1\ [3]$) donc $p = 3r$ et alors $q^2 = 3r^2$ donc q est un multiple de 3 ce qui contredit la primalité relative de p et q : $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Supposons qu'il existe un triangle équilatéral dont les sommets n'ont que des coordonnées rationnelles, on change d'origine du repère en mettant le centre G du triangle d'affixe $\frac{a+b+c}{3} \in \mathbb{Q}[i]$ à l'origine. Alors les affixes de A, B, C dans ce nouveau repère sont encore rationnelles. D'après la question **a.**, on a par exemple $b = ja$ ce qui donne $b = b_1 + ib_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a_1 + ia_2)$ avec $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Q}^4$.

Ceci implique que $b_1 = -\frac{a_1}{2} - i\frac{\sqrt{3}a_2}{2}$ donc $a_2 = 0$ car $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Mais on a aussi $b_2 = -\frac{a_2}{2} + i\frac{\sqrt{3}a_1}{2}$ donc $a_1 = 0$ car $\sqrt{3}$ est irrationnel.

On aurait donc $a = b = c = 0$: ceci n'est pas un vrai triangle équilatéral.

c. Sans utiliser ce qui précède, le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$ car $\frac{c-a}{b-a} = \frac{AC}{AB} e^{i(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ d'après le cours. Ainsi, le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si on a $(c-a) = -j^2(b-a) \Longleftrightarrow c + j^2 b - (1+j^2)a = 0 \Longleftrightarrow c + j^2 b + ja = 0$ car $1 + j + j^2 = 0$.

De même le triangle ABC est équilatéral indirect si et seulement $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{\frac{-i\pi}{3}} = -j$.

Ainsi, ABC est équilatéral indirect si et seulement si $c + jb + j^2 a = 0$.

Comme ABC est équilatéral si et seulement il est équilatéral direct ou équilatéral indirect, on a l'équivalence ABC équilatéral $\Longleftrightarrow (c + j^2 b + ja)(c + jb + j^2 a) = 0$. On développe et on simplifie avec $j^3 = 1$, $j^4 = j$ et $1 + j + j^2 = 0$ et on trouve ABC équilatéral $\Longleftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

d. Déjà fait car $c + j^2 b + ja = 0 \Longleftrightarrow aj^4 + bj^2 + c = 0$ (j^2 est racine de $aX^2 + bX + c$) et $c + jb + j^2 a = 0 \Longleftrightarrow aj^2 + bj + c = 0$ (j est racine de $aX^2 + bX + c$).

2.200 • Clairement, s'il existe deux polynômes A et B à coefficients réels tels que $P = A^2 + B^2$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = A(x)^2 + B(x)^2 \geqslant 0$ car $A(x) \in \mathbb{R}$ et $B(x) \in \mathbb{R}$.

• Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Si $P = 0$ il est clair que $P = 0^2 + 0^2$. Sinon, on décompose P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ (polynômes de degré 1) en séparant les racines réelles distinctes de P et ses racines complexes distinctes (conjuguées 2 à 2 avec même ordre de multiplicité pour β et $\overline{\beta}$) : $P = \lambda \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod\limits_{i=1}^{s} (X - \beta_i)^{n_i} (X - \overline{\beta_i})^{n_i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de P.

En considérant le signe positif de $P(x)$ quand x tend vers $+\infty$, on a $\lambda > 0$.

Si $k \in [\![1;r]\!]$ et m_k impair, alors $P(x) \underset{\alpha_k}{\sim} \dfrac{P^{(m_k)}(\alpha_k)}{m_k!}(x - \alpha_k)^{m_k}$ d'après TAYLOR donc P change de signe au voisinage de α_k ce qui contredit l'hypothèse de positivité de P. Ainsi, tous les m_k sont pairs, on les écrit $m_k = 2p_k$ et on a $P = (\sqrt{\lambda})^2 \Big(\prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{p_k} \Big)^2 \prod\limits_{i=1}^{s} (X - \beta_i)^{n_i} \prod\limits_{i=1}^{s} (X - \overline{\beta_i})^{n_i}$ qu'on peut aussi écrire $P = Q\overline{Q}$ avec $Q = \sqrt{\lambda} \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{p_k} \prod\limits_{i=1}^{s} (X - \beta_i)^{n_i} \in \mathbb{C}[X]$. En écrivant $Q = A + iB$ avec deux polynômes A et B à coefficients réels, on a $P = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$.

2.201 On effectue les transvections (opérations de GAUSS) : $L_n \leftarrow L_n - zL_{n-1}, \cdots, L_2 \leftarrow L_2 - zL_1$ pour obtenir $\det(M)$ en tant que déterminant d'une matrice triangulaire supérieure avec 1 en case $(1,1)$ et des $1 - z\overline{z}$ sur les autres cases de la diagonale. Ainsi $\det(M) = (1 - |z|^2)^{n-1}$ donc M est inversible ssi $|z| \neq 1$.

On peut utiliser la méthode classique pour calculer l'inverse de M dans le cas où $|z| \neq 1$. On prend deux matrices colonnes X et Y et on résout le système $MX = Y$. En effectuant les mêmes opérations de GAUSS que précédemment, on obtient le système équivalent :

$$\begin{aligned} x_1 + \overline{z}x_2 + \cdots \overline{z}^{n-1}x_n &= y_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ (1 - |z|^2)x_{n-1} + \overline{z}(1 - |z|^2)x_n &= y_{n-1} - zy_{n-2} \\ (1 - |z|^2)x_n &= y_n - zy_{n-1} \end{aligned}$$

qui est encore équivalent au système suivant, en soustrayant à chaque ligne la suivante multipliée par $\overline{z}$:

$$\begin{aligned} x_1 + \overline{z}x_2 + \cdots \overline{z}^{n-1}x_n &= y_1 \\ (1 - |z|^2)x_2 &= -zy_1 + (1 + |z|^2)y_2 - \overline{z}y_3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ (1 - |z|^2)x_{n-1} &= -zy_{n-2} + (1 + |z|^2)y_{n-1} - \overline{z}y_n \\ (1 - |z|^2)x_n &= -zy_{n-1} + y_n \end{aligned}$$

On reporte dans la ligne 1 et $(1-|z|^2)x_1 = y_1 - \bar{z}y_2$ après calculs ! On en déduit que $M^{-1} = \dfrac{1}{1-|z|^2}A$ avec $a_{1,1} = a_{n,n} = 1$, $a_{k,k} = 1+|z|^2$ si $k \in [\![2; n-1]\!]$, $a_{i,j} = -\bar{z}$ si $j = i+1$ et $a_{i,j} = -z$ si $j = i-1$.

2.202 P vérifiant ces hypothèses s'écrit $P = (X^2+X+1)U + X + \dfrac{1}{2} = (X^2-X+1)V - X + 2$. Ainsi, comme les racines de X^2+X+1 sont j et j^2 et que celles de X^2-X+1 sont $-j$ et $-j^2$, on en déduit que $P(j) = j + \dfrac{1}{2} = i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $P(j^2) = j^2 + \frac{1}{2} = -i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $P(-j) = j+2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $P(-j^2) = j^2+2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Le polynôme de plus bas degré vérifiant ces 4 conditions est le polynôme d'interpolation de Lagrange :

$$P_0 = i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(X-j^2)(X+j)(X+j^2)}{(j-j^2)(j+j)(j+j^2)} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(X-j)(X+j)(X+j^2)}{(j^2-j)(j^2+j)(j^2+j^2)} +$$
$$\left(\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{(X-j)(X-j^2)(X+j^2)}{(-j-j)(-j-j^2)(-j+j^2)} + \left(\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{(X-j)(X-j^2)(X+j)}{(-j^2-j)(-j^2-j^2)(-j^2+j)}.$$

Ensuite, si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie ces 4 conditions, on a $P - P_0$ qui est à la fois un multiple de X^2+X+1 et de X^2-X+1. Comme ces deux polynômes sont premiers entre eux (ou ont des racines distinctes deux à deux), on a $P - P_0 = (X^2+X+1)(X^2-X+1)Q = (X^4+X^2+1)Q$.
Réciproquement, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X^2+X+1)(X^2-X+1)Q = (X^4+X^2+1)Q + P_0$, alors P vérifie bien les conditions imposées. Il existe donc une infinité de solutions au problème posé, dont celle de degré minimum est $P_0 = -\frac{3}{4}X^3 - X^2 + \frac{1}{4}$ (après calcul par Maple).

• On aurait aussi pu dire pour chercher P_0 que $P_0 = (X^2+X+1)U + X + \dfrac{1}{2}$ puis que $U = aX + b$ (où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) avec $P_0(-j) = j+2$ (et $P_0(-j^2) = j^2+2$) donc, comme $j^2 - j + 1 = -2j$, cela donne la relation $j + 2 = -2j(-aj+b) - j + \frac{1}{2}$ donc $-aj + b = -\frac{4j+3}{4j} = \frac{3}{4}j - \frac{1}{4}$ donc $a = -\frac{3}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Ce qui donne bien $P_0 = -\frac{1}{4}(X^2+X+1)(3X+1) + X + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}X^3 - X^2 + \frac{1}{4}$.

2.203 • Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$, alors $v(y) = 0_E$ et $\exists x \in E,\ y = u(x)$. Alors $v \circ u(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$ et comme $v \circ u$ est injective, on a $x = 0_E$ donc $y = 0_F$. Ainsi : $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_F\}$.

• Soit $y \in F$, alors $v(y) \in E$ donc $\exists x \in E,\ v(y) = v \circ u(x) \iff v(y - u(x)) = 0_E \iff y - u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$ car $v \circ u$ est surjective. Ainsi $y = u(x) + (y - u(x)) \in \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Ker}(v)$. $F = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Ker}(v)$ d'où $F = \mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}(v)$.

2.204 $\underline{(\Longrightarrow)}$: si $u \in \mathrm{Vect}\Big(u^k \mid k \geqslant 2\Big)$ c'est qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel qu'en posant $P = X^2Q$ on ait les égalités $u = P(u) = u^2 \circ Q(u) = Q(u) \circ u^2$. Ainsi $u \circ (\mathrm{id}_E - u \circ Q(u)) = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - u \circ Q(u)) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

- • <u>Méthode 1</u> : soit $x \in E$, comme $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - u \circ Q(u)) \subset \mathrm{Ker}(u)$, on a $x - u \circ Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}(u)$ et on écrit $x = x - u \circ Q(u)(x) + u \circ Q(u)(x) \quad (R)$. Comme $u \circ Q(u)(x) = u(Q(u)(x)) \in \mathrm{Im}\,(u)$, la relation précédente (R) justifie qu'on a $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}\,(u)$ et on conclut $\mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u) = E$ puisque $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}\,(u)) = \dim(E)$ avec la formule du rang appliquée à u.
- • <u>Méthode 2</u> : soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}\,(u)$, on a donc $u(x) = 0_E$ et un vecteur $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Comme $u^2(y) = u(x) = 0_E$, $x = u(y) = (u^2 \circ Q(u))(y) = (Q(u) \circ u^2)(y) = Q(u^2(y)) = 0_E$. Ceci justifie que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}\,(u) = \{0_E\}$ et on conclut, avec la formule du rang, que $\mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u) = E$.

$\underline{(\Longleftarrow)}$: si $\mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u) = E$, on peut traiter deux cas :

- • si $u = 0$, alors $u = u^2 = 0$ donc $u \in \mathrm{Vect}\Big(u^k \mid k \geqslant 2\Big)$ de manière évidente.
- • si $u \neq 0$, comme $\mathrm{Im}\,(u)$ est stable par u, on peut considérer l'application induite $v = u_{\mathrm{Im}u}$. Par le théorème du rang, comme $\mathrm{Im}\,(u)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$, v est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\,(u)$ dans $\mathrm{Im}\,(u)$, c'est-à-dire un automorphisme de $\mathrm{Im}\,(u)$. On a vu dans le cours que puisque v est un

automorphisme et qu'on est en dimension finie, il existait un polynôme P qui est annulateur de v et qui vérifie $P(0) \neq 0$. On verra plus tard dans l'année qu'on peut prendre $P = \chi_v$ (le polynôme caractéristique de v) de degré $r = \text{rang}(u) = \dim(\text{Im}(u))$ et qui vérifie $\chi_v(0) = (-1)^r \det(v) \neq 0$. Soit $x \in E$, $u(x) \in \text{Im}(u)$ donc $P(v)(u(x)) = 0_E$. Or $v^k(u(x)) = u^{k+1}(x)$ donc $P(v)(u(x)) = Q(u)(x)$ avec $Q = XP$. En écrivant $P = P(0) + XU$ (par construction), comme $Q = P(0)X + X^2U$ est un polynôme annulateur de u, on a $P(0)u + u^2 \circ U(u) = 0$ donc $u = -\dfrac{1}{P(0)}u^2 \circ U(u) \in \text{Vect}\Big(u^k \mid k \geqslant 2\Big)$.

Dans les deux cas, on a bien $u \in \text{Vect}\Big(u^k \mid k \geqslant 2\Big)$ si $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

Par double implication, on a l'équivalence : $u \in \text{Vect}\Big(u^k \mid k \geqslant 2\Big)$ si et seulement si $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

2.205 D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, P_n a n racines complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité) car il est de degré n. S'il existait une racine double α de P_n, on aurait $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$ donc $n\alpha^{n-1} - 1 = 0$ et $\alpha^n = \alpha - 1$ donc $n\alpha^n = n\alpha - n = \alpha$ donc $\alpha = \dfrac{n}{n-1}$ mais on trouve alors $n^n = (n-1)^{n-1}$: absurde ! Par conséquent, toutes les racines de P_n sont simples (et il y en a n).

Méthode 1 : on effectue les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1, \cdots$, $L_n \longleftarrow L_n - L_1$ puis (pour supprimer les $-z_1$ dans la première colonne) $C_1 \longleftarrow C_1 + \dfrac{z_1}{z_2}C_2 + \cdots + \dfrac{z_1}{z_n}C_n$ et on obtient D comme le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure : $D = \Big(1 + z_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \dfrac{z_1}{z_k}\Big) \prod\limits_{k=2}^{n} z_k = \Big(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_k}\Big) \prod\limits_{k=1}^{n} z_k$.

Méthode 2 : on interprète chaque colonne C_k de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+z_n \end{pmatrix}$ comme étant la somme de la colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et de $M_k = z_k E_k$ où E_k est la matrice colonne élémentaire ne contenant que des 0 sauf en ligne k où l'on a 1. Par multilinéarité du déterminant, si on développe, on obtient 2^n déterminants donc la plupart sont nuls (s'il y a deux fois U par alternance). Il ne reste donc plus que $D = \Delta + \sum\limits_{k=1}^{n} D_k$ où $\Delta = \text{diag}(z_1, \cdots, z_n)$ et où $D_k = \det(z_1E_1, \cdots, z_{k-1}E_{k-1}, U, z_{k+1}E_{k+1}, \cdots, z_nE_n)$. En développant ce dernier déterminant par rapport à la k^e ligne, on se ramène à celui d'une matrice diagonale et $\det(z_1E_1, \cdots, z_{k-1}E_{k-1}, U, z_{k+1}E_{k+1}, \cdots, z_nE_n) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} z_j$. Ainsi, $D = \prod\limits_{i=1}^{n} z_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} z_j = \prod\limits_{i=1}^{n} z_i \Big(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_k}\Big)$.

• Pour finir le calcul, si $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, il vient $\prod\limits_{i=1}^{n} z_i = \sigma_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} = (-1)^n$ (produit des racines).

De plus, pour $z \in \mathbb{C}^*$ (puisque $z = 0$ n'est pas racine de P_n), on a la suite d'équivalences suivantes :

$$P_n(z) = 0 \iff z^n - z + 1 = 0 \iff 1 - \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{1}{z^n} = 0 \iff \big(1/z\big)^n - \big(1/z\big)^{n-1} + 1 = 0 \iff Q_n\big(1/z\big) = 0.$$

en posant le polynôme $Q_n = X^n - X^{n-1} + 1$. De même, si $Q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$, comme les $\dfrac{1}{z_1}, \cdots, \dfrac{1}{z_n}$ sont les n racines distinctes de Q_n, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_k} = -\dfrac{q_{n-1}}{q_n} = 1$. Au final, $D = 2(-1)^n$.

2.206 Déjà, si $n = 1$, il, est clair que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A + X) = a + x = \det(A) + \det(X)$ en posant $A = (a)$ et $X = (x)$; ainsi l'énoncé est faux dans le cas où $n = 1$.

On suppose dorénavant que $n \geqslant 2$, alors si on suppose que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$, en prenant $X = A$, on obtient $\det(2A) = 2^n\det(A) = 2\det(A)$ donc $\det(A) = 0$ car $2^n \neq 2$.

Méthode 1 : notons maintenant $r = \text{rang}(A)$, alors on sait (même si c'est hors programme) que A est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; il existe donc des matrices P et Q de $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = QJ_rP^{-1}$.

La condition s'écrit alors $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(QJ_rP^{-1} + X) = \det(X)$ ou encore, en notant $Y = Q^{-1}XP$: $\det(QJ_rP^{-1} + QYP^{-1}) = \det(QYP^{-1}) \iff \det(Q)\det(J_r + Y)\det(P^{-1}) = \det(Q)\det(Y)\det(P^{-1})$. Mais comme $\det(Q) \neq 0$ et $\det(P^{-1}) \neq 0$ et que $f : X \mapsto Q^{-1}XP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la condition imposée à A devient : $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(J_r + Y) = \det(Y)$.

Si on avait $r \neq 0$, on pourrait prendre $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ et on aurait $\det(J_r + Y) = \det(I_n) = 1 = \det(Y) = 0$ qui est l'absurdité même ! On en déduit donc que $r = 0$ et donc que $A = 0$ (seule matrice de rang 0).

Méthode 2 : en interprétant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$ où $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille de vecteurs de R^n et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, si on avait $A \neq 0$, il existerait $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $v_k \neq 0$ et, en notant $w_k = -v_k$, on pourrait compléter (w_k) pour avoir une nouvelle base $\mathcal{B}' = (w_1, \cdots, w_n)$. On aurait donc, en notant $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w_1, \cdots, w_n)$, $\det(A) + \det(B) = \det(B) = \det_{\mathcal{B}}(w_1, \cdots, w_n) \neq 0$ car $\mathcal{B}'$ est une base or $\det(A + B) = \det_{\mathcal{B}}(v_1 + w_1, \cdots, v_n + w_n) = 0$ car $w_k + v_k = 0$. Encore une fois, c'est absurde, ainsi $A = 0$.

2.207 Posons $E = \Big\{k \in \mathbb{N} \mid \exists (A, B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R}),\ M = AB\Big\}$.
Cet ensemble est inclus dans $\mathbb{N}$ et non vide minoré car $M = I_pM = MI_q$ donc $(p, q) \in E^2$.
Il possède donc une borne inférieure s et on pose $r = \text{rang}(M)$.
Si $k \in E$, $\exists (A, B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{R})$ tel que $M = AB$ or $\text{rang}(AB) \leqslant \text{rang}(A) \implies r \leqslant \text{Min}(p, k) \leqslant k$.
Ainsi, tous les éléments de E sont supérieurs à r ce qui prouve que $s \geqslant r$.
On sait que M est équivalente à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où l'existence de deux matrices inversibles $P \in GL_p(\mathbb{R})$ et $Q \in \times GL_q(\mathbb{R})$ telles que $M = PJ_rQ^{-1}$. En posant $U = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}$, on a $M = AB$ avec $A = PU \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et $B = VQ^{-1} \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$. Ainsi $r \in E$ donc $s \leqslant r$. Au final : $s = \text{rang}(M) = r$.

2.208 La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, on a même $C^2 = I_{2n}$. Comme le rang n'est pas modifié en multipliant par une matrice inversible (comme il ne l'est pas pour une application linéaire en composant par un isomorphisme), on a $\text{rang}(B) = \text{rang}(BC) = \text{rang}(D)$ où $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. En notant $r = \text{rang}(A)$, on sait qu'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ^{-1}$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$ dont le rang vaut clairement $2r$.

Comme les matrices $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ sont inversibles, on a $\text{rang}(B) = 2\text{rang}(A)$.

2.209 **a.** Le polynôme Q vaut $Q = \big(X - (z_1 - z_2)^2\big)\big(X - (z_1 - z_3)^2\big)\big(X - (z_2 - z_3)^2\big) = X^3 - \theta_1X^2 + \theta_2X - \theta_3$.

b. Relations coefficients/racines : $\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $\sigma_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -p$ et $\sigma_3 = z_1z_2z_3 = -q$.
$\theta_1 = (z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = 2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 2\sigma_2 = 6p$.

c. On a vu à l'exercice 1 que ce triangle est équilatéral si et seulement si $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ ce qui équivaut grâce à la question précédente à $p = 0$.

2.210 **a.** Les projections par exemple, soit un sous-espace F de E différent de $\{0_E\}$ et E. On peut écrire

b. Soit f qui commute avec tous les autres éléments de $\mathcal{R}$. f possède une valeur propre complexe (on est en dimension finie) λ. Alors $f-\lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas inversible donc $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$. De plus, si $g \in \mathcal{R}$, $f\circ g = g\circ f$ donc E_λ est stable par g et on a donc $E_\lambda = E$ d'après l'hypothèse : $f = \lambda \mathrm{id}_E$.

c. Les rotations de $\mathbb{R}^2$ sont une partie $\mathcal{R}$ vérifiant les hypothèses car chaque rotation n'a pour sous-espace stable que $\{0_E\}$ et E. Et pourtant aucune d'entre elles n'est une homothétie alors qu'elles commutent.

2.211 • Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_7[X]$ qui vérifient ces conditions, on a $(X-1)^4$ et $(X+1)^4$ qui divisent $P-Q$. Donc 1 et -1 sont racines d'ordre au moins 4 dans le polynôme $P-Q$ et on sait qu'alors $(X-1)^4(X+1)^4$ divise $P-Q \in \mathbb{R}_7[X]$. Comme $(X-1)^4(X+1)^4$ est de degré $8>7$, ceci implique que $P-Q=0$. Il ne peut donc exister au maximum qu'un polynôme $P\in\mathbb{R}_7[X]$ vérifiant ces conditions.

• $(X-1)^4$ divise $P+1$ avec $P\in\mathbb{R}_7[X]$ se transforme en $P+1=(X-1)^4U$ avec $U\in\mathbb{R}_3[X]$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$ avec $P\in\mathbb{R}_7[X]$ se transforme en $P-1=(X+1)^4V$ avec $V\in\mathbb{R}_3[X]$. En soustrayant ces deux conditions, on obtient $2=(X-1)^4U-(X+1)^4V$ qui est une équation de Bézout.

Il y a une solution car les polynômes $(X+1)^4$ et $(X-1)^4$ sont premiers entre eux.

On peut la trouver en écrivant $\big((1+X)-(X-1)\big)^7 = 2^7 = 128 = \sum_{k=0}^{7}(-1)^k\binom{7}{k}(X-1)^k(X+1)^{7-k}$.

$$\begin{aligned}128 &= (X-1)^4\Big[35(X+1)^3-21(X+1)^2(X-1)+7(X+1)(X-1)^2-(X-1)^3\Big]\\ &\quad -(X+1)^4\Big[-(X+1)^3+7(X+1)^2(X-1)-21(X+1)(X-1)^2+35(X-1)^3\Big].\end{aligned}$$

On pose donc $U=\dfrac{1}{64}\Big(35(X+1)^3-21(X+1)^2(X-1)+7(X+1)(X-1)^2-(X-1)^3\Big)$ et $P=(X-1)^4U-1$ et le polynôme P vérifie les deux conditions imposées par construction. Je vous laisse calculer.

• On aurait aussi pu chercher P sous la forme $P=a_7X^7+\cdots+a_1X+a_0$ et transformer "$(X-1)^4$ divise $P+1$" et "$(X+1)^4$ divise $P-1$" en 1 racine d'ordre au moins 4 de $P+1$: $P(1)=-1$, $P'(1)=P''(1)=P'''(1)=0$ et -1 racine d'ordre au moins 4 de $P-1$ c'est-à-dire en $P(-1)=1$, $P'(-1)=P''(-1)=P'''(-1)=0$ ce qui donne un système linéaire huit équations huit inconnues : une paille !

2.212 **a.** $z=1$ n'est pas solution et pour $z\neq 1$, on a $(1+z)^{2n}=(1-z)^{2n} \Longleftrightarrow Z^{2n}=1$ avec $Z=\dfrac{1+z}{1-z}$.

Or $Z^{2n}=1$ équivaut à $\exists k\in[\![0;2n-1]\!]$, $Z=e^{\frac{2ik\pi}{2n}}=e^{\frac{ik\pi}{n}}$. Or $Z\neq -1$ par construction donc $k\neq n$. Ainsi les solutions sont les z tels que $Z=e^{\frac{ik\pi}{n}}$ avec $k\in[\![0;n-1]\!]\cup[\![n+1;2n-1]\!]$. La valeur $k=0$ correspond à $z=0$ et les solutions non nulles sont les $z=\dfrac{Z-1}{Z+1}=\dfrac{e^{\frac{ik\pi}{n}}-1}{e^{\frac{ik\pi}{n}}+1}$ pour $k\in[\![1;n-1]\!]\cup[\![n+1;2n-1]\!]$. En faisant intervenir l'angle moitié, on trouve comme solution $z_k=\dfrac{2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}=i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

b. Le polynôme $P_n=(1+X)^{2n}-(1-X)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}X^{2k+1}=XQ_n$ (les termes de degrés pairs s'éliminent) est de degré $2n-1$ avec $Q_n=2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}X^{2k}$ de degré $2n-2$ dont les racines sont les racines non nulles de P_n. Le produit des racines de Q_n est d'après une formule du cours $(-1)^{2n-2}\dfrac{2\binom{2n}{1}}{2\binom{2n}{2n-1}}$ donc le produit cherché est 1. On pouvait aussi associer les racines deux par deux car si $k\in[\![1;n-1]\!]$, on a $z_kz_{n-k}=i^2\tan(\theta_k)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta_k\right)=-1$ avec $\theta_k=\dfrac{k\pi}{2n}$ car $\tan(x)^{-1}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et $i^2=-1$ et si $k\in[\![n+1;2n-1]\!]$, on a $z_kz_{3n-k}=i^2\tan(\theta_k)\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta_k\right)=-1$.

On aurait aussi pu écrire que $P_n = XQ_n$ avec Q_n de degré pair et de coefficient dominant $4n$ donc le produit des racines non nulles de P_n est $\dfrac{Q_n(0)}{4n}$ or $P'_n = Q_n + XQ'_n$ donc $Q_n(0) = P'_n(0)$ et comme on calcule $P'_n = 2n(1+X)^{2n-1} + 2n(1-X)^{2n-1}$, on trouve $P'_n(0) = 4n$. Le produit cherché est donc à nouveau 1.

2.213 • Si f et p commutent, on sait que le noyau et l'image de p sont stables par f.

• Réciproquement, si c'est le cas, soit x un vecteur de E qu'on décompose $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(p)$ et $z \in \mathrm{Im}\,(p)$, alors $p(x) = z$ donc $f \circ p(x) = f(p(z)) = f(z)$ car $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$.

De plus $p \circ f(x) = p \circ f(y) + p \circ f(z)$ or $y \in \mathrm{Ker}(p)$ donc $f(y) \in \mathrm{Ker}(p)$ par hypothèse donc $p \circ f(y) = 0_E$. Aussi $z \in \mathrm{Im}\,(p)$ donc $f(z) \in \mathrm{Im}\,(p)$ donc $p(f(z)) = f(z)$. On a bien $f \circ p = p \circ f$.

2.214 **a.** $M \neq 0$ car $X \neq 0$ et $Y \neq 0$. Toutes les colonnes de M sont proportionnelles à X donc $\mathrm{rang}\,(M) = 1$.

b. Comme 0 est d'ordre géométrique $n-1$, l'ordre algébrique de 0 est $n-1$ ou n, ce qui fait qu'on a $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M) = \lambda^n - \mathrm{Tr}\,(M)\lambda^{n-1}$ ($X^{n-1} \mid \chi_M$). Or $\mathrm{Tr}\,(M) = \mathrm{Tr}\,(X^tY) = \mathrm{Tr}\,({}^tYX) = (X|Y)$. Ainsi : $\det(\lambda I_n - M) = \lambda^{n-1}(\lambda - (X|Y)) = \lambda^{n-1}\Big(\lambda - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)$.

c. $\det(I_n + M) = (-1)^n \det(-I_n - M) = (-1)^n \chi_M(-1) = (-1)^n(-1)^{n-1}(-1 - (X|Y)) = 1 + {}^tXA^{-1}X$.

De plus, $\det(I_n + M) = \det(I_n + X^tXA^{-1}) = \det((A + X^tX)A^{-1}) = \det(A + X^tX)\det(A^{-1}) = \dfrac{\det(X^tX + A)}{\det(A)}$.

En identifiant les deux formules, on a bien : $\dfrac{\det(X^tX + A)}{\det(A)} = 1 + {}^tXA^{-1}X$.

2.215 $(X-1)^2$ divise $P = aX^{n+1} - bX^n + 1 \iff 1$ est racine au moins double dans $P \iff P(1) = P'(1) = 0$.

Or $P(1) = a - b + 1$ et $P'(1) = (n+1)a - nb$ donc, après résolution du système : $a = n$ et $b = n+1$.

Alors $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = n(X^{n+1} - 1) - (n+1)(X^n - 1) = (X-1)\Big[n\sum\limits_{k=0}^{n} X^k - (n+1)\sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k\Big]$.

Par conséquent : $P = (X-1)\Big[nX^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k\Big] = (X-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1}(X^n - X^k) = (X-1)^2\sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k\Big(\sum\limits_{i=0}^{n-k-1} X^i\Big)$.

Alors $P = (X-1)^2\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{j=k}^{n-1} X^j = (X-1)^2\sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant j \leqslant n-1} X^j = (X-1)^2\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{j} X^j = (X-1)^2\Big(\sum\limits_{j=0}^{n-1}(j+1)X^j\Big)$.

2.216 Notons E l'espace vectoriel tel que $f \in \mathcal{L}(E)$ et posons $n = \dim(E)$. Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$ puisque $\mathrm{rang}\,(f) = 1$ par hypothèse.

<u>Méthode 1</u> (la plus rapide) : soit $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Cette famille est libre dans E, on peut donc la compléter (avec le théorème de la base incomplète) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de E. Par construction, comme $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $f(e_k) = 0_E$, on a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{Tr}\,(f) = \mathrm{Tr}\,(A) = 1$, on a $\alpha_n = 1$ et en effectuant le calcul, on constate que $A^2 = A$ donc que $f^2 = f$.

<u>Méthode 2</u> : on traite deux cas (les deux seuls cas) selon le rapport entre $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$:

<u>Si $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$</u> : soit une base (e_1) de $\mathrm{Im}\,(f)$ et une base $(e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}(f)$, comme $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E. Comme $f(e_1) \in \mathrm{Im}\,(f)$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f(e_1) = \lambda e_1$. De plus, $\forall k \in [\![2; n]\!]$, $f(e_k) = 0_E$. Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda E_{1,1}$. Comme $\mathrm{Tr}\,(f) = \mathrm{Tr}\,(A) = 1$, on a $\lambda = 1$ et $A^2 = A$ donc $f^2 = f$.

<u>Si $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$</u> : on peut prendre (e_1) de $\mathrm{Im}\,(f)$, qu'on complète en une base $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ de $\mathrm{Ker}(f)$, qu'on complète à nouveau en une base $(e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de E. Par construction, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda E_{1,n}$

car $\forall k \in [\![1;n-1]\!],\ f(e_k)=0_E$ et $\exists l \in \mathbb{K},\ f(e_n)=\lambda e_1$ car $\text{Im}(f)=\text{Vect}(e_1)$. Si $n \geqslant 2$, on aurait donc $\text{Tr}(f)=\text{Tr}(A)=0$ et c'est impossible. Si $n=1$, $\text{Tr}(A)=\text{Tr}(f)=1=\lambda$ donc $A^2=A$ d'où $f^2=f$.

Quelle que soit la méthode, la seule possibilité quand $\text{rang}(f)=\text{Tr}(f)=1$ est $f^2=f$ (f est un projecteur).

2.217 Soit σ un tel endomorphisme, alors $\det(\sigma)^2=\det(\sigma^2)=\det(-\text{id}_E)=(-1)^n \geqslant 0$ donc n est pair. Soit donc n pair et $p \in \mathbb{N}$ tel que $n=2p$. Supposons que $p \geqslant 1$, alors :

• il existe $v_1 \neq 0_E$, soit $(a_1,b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_1v_1+b_1\sigma(v_1)=0_E$ (1), alors on compose par σ et il,vient $a_1\sigma(v_1)-b_1v_1=0_E(2)$. On effectue $a_1(1)-b_1(2)$: $(a_1^2+b_1^2)v_1=0_E$ donc $a_1^2+b_1^2=0 \Longrightarrow a_1=b_1=0$. Ainsi $(v_1,\sigma(v_1))$ est libre. Si $p=1$ alors $(v_1,\sigma(v_1))$ est une base de E sinon...

• il existe $v_2 \notin \text{Vect}(v_1,\sigma(v_1))$, soit $(a_1,a_2,b_1,b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a_1v_1+a_2v_2+b_1\sigma(v_1)+b_2\sigma(v_2)=0_E$ (1), alors on compose par σ et $a_1\sigma(v_1)+a_2\sigma(v_2)-b_1v_1-b_2v_2=0_E(2)$. On effectue $a_2(1)-b_2(2)$ et il vient $(a_1a_2+b_1b_2)v_1+(a_2^2+b_2^2)v_2+(a_2b_1-a_1b_2)\sigma(v_1)=0_E$. Or la famille $(v_1,v_2,\sigma(v_1))$ est libre par construction donc $a_2^2+b_2^2=0 \Longrightarrow a_2=b_2=0$ et on obtient $a_1v_1+b_1\sigma(v_1)=0_E \Longrightarrow a_1=b_1=0$ car $(v_1,\sigma(v_1))$ est libre. Ainsi $(v_1,,v_2,\sigma(v_1)),\sigma(v_2))$ est libre. Si $p=2$ alors $(v_1,v_2,\sigma(v_1),\sigma(v_2))$ est une base de E sinon...

Par récurrence, on construit une base $\mathcal{B}=(v_1,\cdots,v_p,\sigma(v_1),\cdots,\sigma(v_p))$ de E et on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma)=\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

2.218 Avec U telle que $u_{i,j}=1$ si $i \geqslant j$ et $u_{i,j}=0$ sinon, on a $A=UV$ en prenant $V={}^tU$ (facile à vérifier).

Posons la matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $n_{i,j}=1$ si $j=i-1$ et 0 sinon. Quand on calcule les puissances de N, la diagonale de 1 se décale jusqu'à disparaître : $N^n=0$. On vérifie qu'on a $V=\sum\limits_{k=0}^{n-1}N^k$ et comme $N^n=0$, la formule $(I_n-N)\sum\limits_{k=0}^{n-1}N^k=I_n-N^n$ (car I_n et N commutent) montre que $(I_n-N)V=I_n$ donc que V est inversible (on le savait déjà car $\det(V)=1\neq 0$) et que $V^{-1}=I_n-N$.

Ainsi $U^{-1}=({}^tV)^{-1}={}^t(V^{-1})=I_n-{}^tN$. Par conséquent, $A^{-1}=(UV)^{-1}=V^{-1}U^{-1}=(I_n-{}^tN)(I_n-N)$ donc $A^{-1}=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{n,n}=1$, $b_{k,k}=2$ si $k \in [\![1;n-1]\!]$, $b_{i,j}=-1$ si $|i-j|=1$ et $b_{i,j}=0$ sinon.

2.219 On peut d'abord s'intéresser aux polynômes de degré 2 puis généraliser.

$P=P(1-X) \Longleftrightarrow aX^2+bX+c=a(1-X)^2+b(1-X)+c \Longleftrightarrow a+b=0$ si $P=aX^2+bX+c \in \mathbb{K}_2[X]$.
Ainsi, les polynômes de $\mathbb{K}_2[X]$ vérifiant la propriété sont ceux qui s'écrivent $P=a(X^2-X)+c$.
On peut aussi les écrire $P=A\Big(X-\dfrac{1}{2}\Big)^2+B$ avec $A=a$ et $B=c-\dfrac{a}{4}$.
On constate, si $P(X)=P(1-X)$, une symétrie orthogonale du graphe de la fonction polynomiale P par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$, ce qui incite à considérer la base de $\mathbb{R}[X]$ qui suit.

La famille $\left(\Big(X-\dfrac{1}{2}\Big)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une base de $\mathbb{K}[X]$ et si on écrit $P=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\Big(X-\dfrac{1}{2}\Big)^n$, alors la propriété se traduit par : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\Big(X-\dfrac{1}{2}\Big)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_n\Big(X-\dfrac{1}{2}\Big)^n$ ce qui donne en composant par $X+\dfrac{1}{2}$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nX^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_nX^n$. L'unicité de l'écriture d'un polynôme amène alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1}=0$.

Les polynômes vérifiant la propriété sont exactement ceux qui s'écrivent $P=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{2n}\Big(X-\dfrac{1}{2}\Big)^{2n}$.

2.220 Tout d'abord si f est une solution, on a $\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Im}\,(u \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(u)$.

• Par conséquent, si $\mathrm{Im}\,(v) \not\subset \mathrm{Im}\,(u)$, il n'y a aucune solution à cette équation.
• Par contre, si $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Im}\,(u)$, soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$, on sait que u induit un isomorphisme noté w entre S et $\mathrm{Im}\,(u)$. On pose $f_0 = w^{-1} \circ v$ qui est bien défini car w^{-1} est défini sur $\mathrm{Im}\,(u)$ donc sur $\mathrm{Im}\,(v)$ par inclusion. Vérifions que f_0 est une solution particulière de l'équation :
$u \circ f_0 = u \circ (w^{-1} \circ v) = (u \circ w^{-1}) \circ v$ or $u \circ w^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,(u)}$ et $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Im}\,(u)$ donc $u \circ f_0 = v$. Ainsi :
$u \circ f = v \iff u \circ f = v = u \circ f_0 \iff u \circ (f - f_0) = 0 \iff \mathrm{Im}\,(f - f_0) \subset \mathrm{Ker}(u) \iff f - f_0 \in \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}(u))$ pour $f \in \mathcal{L}(E)$. Les solutions de l'équation sont donc les endomorphismes de la forme $f = f_0 + g$ avec $g \in \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}(u))$ donc c'est un sous-espace affine de dimension $\dim(E) \times \dim(\mathrm{Ker}(u))$.

On pouvait aussi raisonner matriciellement, soit une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à la décomposition $E = S \oplus \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathcal{B}'$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\,(u) \oplus S'$ et $\mathcal{B}''$ une base quelconque de E, alors on note $F = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$, $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$. D'après le théorème du rang, A est inversible car la matrice de l'isomorphisme w défini ci-dessus dans les bases adéquates. Alors $u \circ f = v \iff UF = V \iff AC = B \iff C = A^{-1}B$ avec D quelconque. Matriciellement, les solutions de $UF = V$ sont les matrices $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ avec $C = A^{-1}B$ fixée et $D \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où $p = \dim(\mathrm{Ker}(u))$ et $n = \dim(E)$.

On pouvait aussi construire f_0 par l'image des vecteurs d'une base comme dans un sujet fait en classe.

2.221 Comme par le théorème fondamental de l'intégration, $F(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0, si f est de classe C^∞, alors $D(f)$ et $F(f)$ le sont aussi. La linéarité de l'intégration et de la dérivation assure la linéarité de D et de F qui sont donc des endomorphismes de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

• $\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ D \circ F(f)(x) = \Big(\displaystyle\int_0^x f(t)dt\Big)' = f(x)$ donc $D \circ F = \mathrm{id}_E$.

• $\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F \circ D(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$ donc $F \circ D \neq \mathrm{id}_E$. on a $F \circ D = \mathrm{id}_E - \varphi$ où φ est l'application qui à f associe la fonction constante valant $f(0)$.

• Si $f \in E$, $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - F) \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt) \implies (f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 0)$ en dérivant et en évaluant en 0 : $f = 0$ par unicité d'une solution au problème de Cauchy. Ainsi $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - F) = \{0\}$.
• Si $f \in E$, $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - D) \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^x)$.
En notant $y_0 : x \mapsto e^x$, on a donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - D) = \mathrm{Vect}(y_0)$.
• D induit un endomorphisme Δ de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus $\Delta^{n+1} = 0$ d'où $(\mathrm{id} - \Delta) \circ \sum\limits_{k=0}^{n} \Delta^k = \mathrm{id} - \Delta^{n+1} = \mathrm{id}$ donc $\mathrm{id} - \Delta$ est inversible et $(\mathrm{id} - \Delta)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \Delta^k$ donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ (\mathrm{id} - \Delta)^{-1}(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

2.222 Par la formule de trigonométrie classique $\cos(x + y) = \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)$, les trois fonctions $f_a : x \mapsto \cos(x + a)$, $f_b : x \mapsto \cos(x + b)$ et $f_c : x \mapsto \cos(x + c)$ font partie du plan engendré par les fonctions $\cos$ et $\sin$: $F = \mathrm{Vect}(f_a, f_b, f_c) \subset P = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ ($\cos$ et $\sin$ sont clairement indépendantes). Comme f_a est non nulle, on a donc $1 \leqslant \dim(F) \leqslant 2$.
Si $\dim(F) = 1$, les trois fonctions sont proportionnelles donc elles s'annulent en même temps ainsi, on a les relations $f_b\Big(\dfrac{\pi}{2} - a\Big) = f_c\Big(\dfrac{\pi}{2} - a\Big) = 0 \iff \sin(a - b) = \sin(a - c) = 0 \iff a \equiv b \equiv c\ [\pi]$. Réciproquement, si $a \equiv b \equiv c\ [\pi]$, on a $f_b = \pm f_a$ et $f_c = \pm f_a$ donc F est une droite.

Conclusion : $a \equiv b \equiv c\ [\pi]$ implique $\dim(F) = 1$ et $\dim(F) = 2$ dans les autres cas.

2.223 Soit F un sous-espace vectoriel stable par u, on note v l'endomorphisme induit par u dans F. Alors $u^n \Longrightarrow v^n = 0$ donc v est nilpotent. Si on note p la dimension de F, alors le polynôme caractéristique de v est X^p (seul 0 est valeur propre d'un endomorphisme nilpotent) ; alors par Cayley-Hamilton, on a $v^p = 0$ donc $\forall x \in F,\ v^p(x) = u^p(x) = 0$ ce qui prouve que $F \subset \mathrm{Ker}(u^p)$.

On sait que la famille des $\Big(\mathrm{Ker}(u^k)\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est croissante, et on a $\dim(\mathrm{Ker}(u^0)) = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u^n)) = n$. Si $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, alors soit $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+2})$, on a $u^{k+2}(x) = u^{k+1}(u(x)) = 0_E$ donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$ puis $u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) = 0_E$ d'où $x \in \mathrm{Ker}(u^{k+1})$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(u^{k+2}) = \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ car l'inclusion $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+2})$ est claire. Par conséquent, la famille des $\Big(\mathrm{Ker}(u^k)\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est strictement croissante, les dimensions augmentent strictement ce qui prouve (avec les cas $k = 0$ et $k = n$), que : $\forall k \in [\![0; n]\!],\ \dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$.
Par inclusion et égalité des dimensions : $F = \mathrm{Ker}(u^p)$. Réciproquement, tous les $\mathrm{Ker}(u^k)$ sont stables par u.
Conclusion : les sous-espaces de E stables par u sont les $n+1$ sous-espaces $\Big(\mathrm{Ker}(u^k)\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

2.224 On peut très bien généraliser l'énoncé en supposant $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$ et en montrant l'équivalence entre (p et q sont des projecteurs de même noyau) et ($p = p \circ q$ et $q = q \circ p$).
($\Longleftarrow$) Si ($p = p \circ q$ et $q = q \circ p$) alors $p^2 = p \circ p = (p \circ q) \circ p = p \circ (q \circ p) = p \circ q = p$ donc p est un projecteur. De même, q est un projecteur. De plus $p = p \circ q \Longrightarrow \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\, p$ et, de même, on obtient $q = q \circ p \Longrightarrow \mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}(q \circ p) = \mathrm{Ker}\, q$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ par double inclusion.
($\Longrightarrow$) Si p et q sont des projecteurs de même noyau, soit $x \in E$, comme $p^2 = p$, il vient $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$ donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, q$ ce qui donne $q(x) - q(p(x)) = 0_E$ d'où $q = q \circ p$. De même $p = p \circ q$.
On aurait aussi pu dire que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - p)$ car p est un projecteur et $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Ker}\, q$ implique $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - p) \subset \mathrm{Ker}\, q \Longleftrightarrow q \circ (\mathrm{id}_E - p) = 0 \Longleftrightarrow q = q \circ p$. Même chose pour $p \circ (\mathrm{id}_E - q) = 0 \Longleftrightarrow p = p \circ q$.

2.225 • Supposons que la famille $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ soit libre dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k U_k = 0$. En évaluant selon chaque terme de cette suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k U_{k,n} = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k P_k(n) = 0$.

Si on pose $Q = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k P_k$, on vient de voir que $\forall n \in \mathbb{N},\ Q(n) = 0$. Q admet donc une infinité de racines et il est nul. Comme $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k P_k = 0$ et que $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre : $\lambda_1 = \cdots, \lambda_p = 0$. La famille $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre.
• Supposons que la famille $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ soit libre dans l'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k P_k = 0$. On évalue ceci en tous les entiers naturels : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k P_k = 0 = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k U_{k,n} = 0$ donc $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k U_k = 0$. Mais comme $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est donc libre.
Par double implication, on peut conclure à l'équivalence entre les libertés des familles $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ et $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$.

2.226 Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $a_n \neq 0$ car P est exactement de degré n. De plus, pour $z \in \mathbb{U}$, on a par inégalité triangulaire $|P(z)| = \Big|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k\Big| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k||z^k| = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| = M'$ car $|z| = 1$. Ceci justifie bien l'existence de $\mathrm{Sup}_{|z|=1} |P(z)|$. Mieux, comme tout complexe z de $\mathbb{U}$ s'écrit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$, on a l'égalité des ensembles

$\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{U}\} = \{|P(e^{i\theta})| \mid \theta \in [0;2\pi]\}$ et la fonction $f : \theta \mapsto |P(e^{i\theta})|$ est continue car composée de $\sqrt{\ }$, $\cos$, $\sin$ et autres fonctions polynomiales. D'après le théorème des bornes atteintes, f est donc bornée sur le segment $[0;2\pi]$ mais elle y atteint ses bornes, ce qui montre que $M = \underset{|z|=1}{\text{Sup}}\, |P(z)| = \underset{|z|=1}{\text{Max}}\, |P(z)|$.

• Pour le cas particulier $n = 1$, on a $P = a_0 + a_1X$ avec $a_1 \neq 0$ et $P(1) = a_0 + a_1$ et $P(-1) = a_0 - a_1$ de sorte que $a_0 = \dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$ et $a_1 = \dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$. Ainsi, $|a_0| \leqslant \dfrac{|P(1)|+|P(-1)|}{2} \leqslant \dfrac{2M}{2} = M$ et $|a_1| \leqslant \dfrac{|P(1)|+|P(-1)|}{2} \leqslant \dfrac{2M}{2} = M$. Comme 1 et -1 sont les racines secondes de l'unité, cela nous fait penser à utiliser les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité dans le cas général.

• Pour n quelconque, soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ la première racine primitive $(n+1)$-ième de l'unité. On va estimer P en les ω^j pour $j \in [\![0;n]\!]$. Pour $j \in [\![0;n]\!]$, $P(\omega^j) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\omega^{jk}$ et, par hypothèse $|P(\omega^j)| \leqslant M = \underset{|z|=1}{\text{Sup}}\, |P(z)|$.

Soit $m \in [\![0;n]\!]$, $\sum\limits_{j=0}^{n} \omega^{-mj}P(\omega^j) = \sum\limits_{j=0}^{n} \omega^{-mj} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\omega^{jk} = \sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{j=0}^{n} \omega^{-mj}\omega^{jk}\Big)a_k$.

Or si $k \in [\![0;n]\!]$ et $k \neq m$, on a $\sum\limits_{j=0}^{n} \omega^{-mj}\omega^{jk} = \sum\limits_{j=0}^{n} \omega^{(k-m)j} = \dfrac{1-\omega^{(k-m)(n+1)}}{1-\omega^{(k-m)}} = 0$ car $\omega^{(k-m)} \neq 1$ et $\omega^{(k-m)(n+1)} = (\omega^{(n+1)})^{k-m} = 1$. Si $k = m$, on a $\sum\limits_{j=0}^{n} \omega^{-kj}\omega^{jk} = n+1$. Ainsi, $\sum\limits_{j=0}^{n} \omega^{-mj}P(\omega^j) = (n+1)a_m$ ce qui implique $(n+1)|a_m| = \Big|\sum\limits_{j=0}^{n} \omega^{-mj}P(\omega^j)\Big| \leqslant \sum\limits_{j=0}^{n} |\omega^{-mj}||P(\omega^j)| \leqslant (n+1)M$ donc $|a_k| \leqslant M$.

2.227 Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, il suffit de montrer que cette famille de $n+1$ polynômes est libre.

<u>Méthode 1</u> : soit $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_iP(X+a_i) = 0$. En utilisant la formule de Taylor, on obtient $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a_i)}{k!}X^k = \sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i\dfrac{P^{(k)}(a_i)}{k!}\Big)X^k = 0 \Longleftrightarrow \forall k \in [\![0;n]\!],\ \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i\dfrac{P^{(k)}(a_i)}{k!} = 0$ (1).
Comme le polynôme P est de degré n, pour chaque entier $k \in [\![0;n]\!]$, le polynôme $P^{(k)}$ est de degré $n-k$; ainsi $(P,P',\cdots,P^{(n)})$ est de degrés échelonnés donc $(P,P',\cdots,P^{(n)})$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Tout polynôme $U \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $U = \sum\limits_{k=0}^{n} u_kP^{(k)}$ et les relations (1) prouvent donc que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_iU(a_i) = 0$ (2).
Pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, soit $L_j = \prod\limits_{i\neq j}(X-a_i)$. Alors $L_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(a_j) \neq 0$. En prenant $U = L_j$ dans (2), $\lambda_jL_j(a_j) = 0 \Longrightarrow \lambda_j = 0$. La famille $\big(P(X+a_i)\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est donc libre : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

<u>Méthode 2</u> : soit $(\lambda_0,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_iP(X+a_i) = 0$. Si on écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} b_kX^k$, $b_n \neq 0$ car P est de degré n et on a $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \sum\limits_{k=0}^{n} b_k(X+a_i)^k = 0$. On inverse cette somme et $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i(X+a_i)^k = 0$. Avec le binôme de Newton, il vient $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \sum\limits_{j=0}^{k} \dbinom{k}{j} a_i^{k-j}X^j = 0$. On inverse encore et on obtient $\sum\limits_{j=0}^{n}\Big(\sum\limits_{k=j}^{n} b_k\dbinom{k}{j}\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_ia_i^{k-j}\Big)X^j = 0$. Comme $(1,X,\cdots,X^n)$ est libre, $\forall j \in [\![0;n]\!]$, $\sum\limits_{k=j}^{n} b_k\dbinom{k}{j}\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_ia_i^{k-j} = 0$.
Pour $j = n$, cela donne $b_n\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ donc $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$ car $b_n \neq 0$.
Pour $j = n-1$, cela donne $nb_{n-1}\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i + b_n\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_ia_i = 0$ donc, grâce à la relation ci-dessus, $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_ia_i = 0$.
Par récurrence, on montre en considérant tous les $j \in [\![0;n]\!]$, que $\forall m \in [\![0;n]\!]$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_ia_i^m = 0$.
Si on pose $V = \big(a_j^i\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ définie par ${}^tL = (\lambda_0\ \cdots\ \lambda_n)$, on a $VL = 0$. Mais

la matrice de VANDERMONDE V est inversible car $\det(V) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i) \neq 0$ car les $a_0, \cdots, a_n$ sont distincts. Ainsi, $V^{-1}VL = L = 0$ et la famille $\big(P(X + a_i)\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.228 Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X - z_k)^n = 0$. Par le binôme de NEWTON, on obtient l'équation $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} z_k^{n-i} X^i = 0$ ce qui donne $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \Big(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k z_k^{n-i} \Big) X^i = 0$. Ainsi, on obtient $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k z_k^{n-i} = 0$. Ceci peut encore écrire $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j z_j^i = 0 \iff VX = 0$ avec ${}^tX = (\lambda_0 \ \cdots \ \lambda_n)$ et $V = (z_j^i)_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Mais on connaît le déterminant de cette matrice de VANDERMONDE : $\det(V) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (z_j - z_i) \neq 0$ car les $z_0, \cdots, z_n$ sont des complexes 2 à 2 distincts. Alors $VX = 0$ implique $X = 0$ (en multipliant par V^{-1}) donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi la famille $\big((X - z_k)^n\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$ car elle contient $n+1$ de ses vecteurs.

2.229 Si $n = 0$, tous les complexes z sont solutions (sauf $z = -i$) si $a = 0$ et il n'y pas de solution si $a \neq 0$ car on a l'équivalence $\dfrac{1+ia}{1-ia} = 1 \iff a = 0$.

On suppose dorénavant que n est un entier supérieur ou égal à 1.

Le problème équivaut à trouver les racines de $P = (1 - ia)(1 + iX)^n - (1 + ia)(1 - iX)^n$ car, pour $z \neq -i$, $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \dfrac{1+ia}{1-ia} \iff (1-ia)(1+iz)^n - (1+ia)(1-iz)^n = 0$ et que, puisque $P(-i) = 2^n(1 - ia) \neq 0$, le complexe $-i$ n'est pas racine de P.

Le coefficient en X^n de P est égal à $\lambda = i^n(1 - ia) - (-i)^n(1 + ia) = i^n\big(1 - ia - (-1)^n(1 + ia)\big)$ donc $\lambda = -2i^{n+1}a$ si n est pair et $\lambda = 2i^n$ si n est impair. P est donc de degré n si (n est pair et $a \neq 0$) ou si n est impair. Par contre, si n est pair et $a = 0$ P est de degré $n - 1$ car le terme en X^{n-1} de P est alors $ni^{n-1} - n(-i)^{n-1} = 2ni^{n-1} \neq 0$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on peut écrire $a = \tan(\theta)$ avec $\theta = \mathrm{Arctan}(a) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi $\dfrac{1+ia}{1-ia} = \dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} = e^{2i\theta}$.

L'équation devient, en posant $Z = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ pour $z \neq -i$, $Z^n = e^{2i\theta} \iff \exists k \in [\![0;n-1]\!],\ Z = e^{\frac{i(\theta+k\pi)}{n}} = e^{i\theta_k}$.

Traitons maintenant les deux cas :

• si (n est pair et $a \neq 0$) ou si n est impair, on sait que P possède n racines d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS : elles vont provenir de chacune des n valeurs de k. Pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, nous avons : $\dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\theta_k} \iff 1 + iz = z_k(1 - iz) \iff z = \dfrac{e^{i\theta_k} - 1}{i(1 + e^{i\theta_k})} = -i\dfrac{e^{i\theta_k} - 1}{e^{i\theta_k} + 1} = \tan\left(\dfrac{\theta_k}{2}\right)$.

Dans ce cas les solutions de l'équation (les racines de P) sont les $\tan\left(\dfrac{\theta + k\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![0;n-1]\!]$.

• si n est pair et $a = 0$ (c'est-à-dire $\theta = 0$) on reprend les mêmes calculs sauf que, comme $1 + iz = -1 + iz$ est impossible, on a $Z \neq -1$ donc k ne peut pas prendre la valeur $\frac{n}{2}$. Dans ce cas les solutions de l'équation (les racines de P) sont les $\tan\left(\dfrac{\theta + k\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![0; \frac{n}{2} - 1]\!] \cup [\![\frac{n}{2} + 1; n-1]\!]$.

2.230 Si $U = X^3 + bX + c$ est à racines multiples, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. On a donc $3\alpha^2 + b = 0 = \alpha^3 + b\alpha + c$ donc $3\alpha^3 = -b\alpha$ d'où $-\dfrac{b\alpha}{3} + b\alpha + c = 0$.

• Si $b \neq 0$, cela donne $\alpha = -\dfrac{3c}{2b}$ donc $\dfrac{27c^2}{4b^2} + b = 0 \iff 27c^2 + 4b^3 = 0$.

• Si $b=0$, on a donc $\alpha=0$, et comme $P(\alpha)=0$, on a aussi $c=0$ donc on a encore $27c^2+4b^3=0$.
Réciproquement, si $27c^2+4b^3=0$, on traite deux cas :
• si $b=0$, on a aussi $c=0$ et $U=X^3$ admet 0 comme racine triple.
• si $b\neq 0$, posons $\alpha=-\dfrac{3c}{2b}$, alors $U(\alpha)=-\Big(\dfrac{3c}{2b}\Big)^3-\dfrac{3c}{2}+c=\dfrac{-27c^3-12cb^3+8cb^3}{8b^3}=-\dfrac{c(27c^2+4b^3)}{8b^3}=0$
et $U'(\alpha)=3\Big(\dfrac{3c}{2b}\Big)^2+b=\dfrac{27c^2}{4b^2}+b=\dfrac{27c^2+4b^3}{4b^2}=0$ donc α est racine au moins double de U.
Conclusion : X^3+bX+c est à racines simples dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $27c^2+4b^3\neq 0$.
Comme $Q(X)=-P(-a-X)$, les racines de Q sont les complexes x tels que $-a-x$ soit racine de P : si x_1, x_2, x_3 sont les racines de P (éventuellement égales), alors $-a-x_1$, $-a-x_2$, $-a-x_3$ sont celles de Q. Or le terme en X^2 est a donc $a=-x_1-x_2-x_3$ donc les racines de Q sont x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+x_2.
• Si P a trois racines réelles x_1, x_2, x_3 négatives, alors x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+x_2 sont aussi réelles et négatives.
Si P a une racine réelle négative (disons x_1) et deux racines conjuguées x_2 et $x_3=\overline{x_2}$ de partie réelle négative, Q a deux racines conjuguées x_1+x_2 et x_1+x_3 et une seule racine réelle $x_2+x_3=2\mathrm{Re}\,(x_2)\leqslant 0$.
• Si les racines réelles de P et Q sont négatives, considérons à nouveau deux cas : si P a trois racines réelles alors x_1, x_2, x_3, x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+x_2 sont négatives donc les racines de P ont une partie réelle (elles le sont) négatives. Si P a une seule racine réelle (disons x_1) et deux racines non réelles conjuguées x_2 et x_3, alors $x_1\leqslant 0$ et $x_2+x_3=2\mathrm{Re}\,(x_2)\leqslant 0$ par hypothèse : les parties réelles des racines de P sont négatives.
<u>Il devait y avoir une autre question</u> : montrer que ces conditions sont équivalentes à a, b, c, $ab-c$ positifs. En effet, si a, b, c, $ab-c$ sont positifs, alors $Q=X^3+2aX^2+(a^2+b)X+ab-c$ et $P=X^3+aX^2+bX+c$ sont à coefficients positifs et unitaires donc ne peuvent pas avoir de racine réelle strictement positives ce qui prouve que leur(s) racine(s) réelle(s) sont négatives.
Réciproquement, si les racines de P sont de partie réelle négative, alors $a=-(x_1+x_2+x_3)$ est de partie réelle positive donc $a>0$. De plus $b=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3$ est positif en considérant les deux cas (P a trois racines réelles ou une seule) et $c=-x_1x_2x_3\geqslant 0$ (même chose). Enfin $ab-c=-(x_2+x_3)(x_1+x_3)(x_1+x_2)\geqslant 0$.

2.231 Si $x\in I_k$, alors $\exists y\in E,\ x=f^k(y)$ donc $f(x)=f^{k+1}(y)=f^k(f(y))\in I_k$: I_k est stable par f.

Si $x\in N_k$, alors $f^k(x)=0_E$ donc $f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=f(0_E)=0_E$ donc $f(x)\in N_k$: N_k est stable par f.
Si $x\in N_k$, alors $f^k(x)=0_E$ donc $f^{k+1}(x)=0_E$ comme avant et on a montré que $N_k\subset N_{k+1}$.
Si $\mathrm{Ker}(f^k)=\mathrm{Ker}(f^{k+1})$ pour $k\in[\![0;n-1]\!]$, alors soit $x\in\mathrm{Ker}(f^{k+2})$, on a $f^{k+2}(x)=f^{k+1}(u(x))=0_E$ donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(f^{k+1})=\mathrm{Ker}(f^k)$ puis $f^{k+1}(x)=f^k(u(x))=0_E$ d'où $x\in\mathrm{Ker}(f^{k+1})$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f^{k+2})=\mathrm{Ker}(f^{k+1})$ car l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^{k+1})\subset\mathrm{Ker}(f^{k+2})$ a déjà été établie. Par conséquent, la famille des $\Big(\mathrm{Ker}(f^k)\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est strictement croissante. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f^0))=0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^n))=n$ par hypothèse et que les dimensions des $\dim(\mathrm{Ker}(f^k))$ augmentent strictement, on a $\forall k\in[\![0;n]\!],\ \dim(\mathrm{Ker}(u^k))=k$.
On en déduit avec la formule du rang que $\forall k\in[\![0;n]\!],\ \dim(\mathrm{Im}\,(f^k))=n-k$.
Soit F un sous-espace vectoriel stable par f, on note g l'endomorphisme induit par f dans F. Alors, comme $f^n=0$, on a aussi $g^n=0$ donc g est nilpotent. Si on note p la dimension de F, alors le polynôme caractéristique de g est X^p (seul 0 est valeur propre d'un endomorphisme nilpotent) ; par Cayley-Hamilton, on a $g^p=0$ donc $\forall x\in F,\ g^p(x)=f^p(x)=0$ ce qui prouve que $F\subset\mathrm{Ker}(f^p)$.
Par inclusion et égalité des dimensions : $F=\mathrm{Ker}(f^p)$. Réciproquement, tous les $\mathrm{Ker}(f^k)$ sont stables par f.
Conclusion : les sous-espaces de E stables par f sont les $n+1$ sous-espaces $\Big(\mathrm{Ker}(f^k)\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Si on a $I_i = N_j$ avec $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$, par égalité des dimensions, on a forcément $i+j=n$. Réciproquement, si $j \in [\![0;n]\!]$, comme $f^n = f^j \circ f^{n-j} = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(f^{n-j}) \subset \mathrm{Ker}(f^j)$ donc $I_{n-j} \subset N_j$. l'égalité des dimensions montre alors que $I_{n-j} = N_j$. De plus, si $j > n$, on a $f^j = 0$ donc $N_j = E = I_0$ et si $i > n$, $I_i = \{0_E\} = N_0$.
Au final, les $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $I_i = N_j$ sont les $(k,0)$ ou les $(0,k)$ avec $k \geqslant n$ et les $(n-j,j)$ avec $j \in [\![1;n-1]\!]$.

2.232 Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$ et $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a) = 0_E$ (1). On suppose que $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$ et on note r le plus petit indice k tel que $\lambda_k \neq 0$. On applique alors f^{n-1-r} à la relation (1) et $f^{n-1-r}\Big(\sum\limits_{k=r}^{n-1} \lambda_k f^k(a)\Big) = f(0_E) = 0_E = \lambda_r f^{n-1}(a)$. Mais comme $f^{n-1}(a) \neq 0_E$, on obtient $\lambda_r = 0$ ce qui est une contradiction. Ainsi $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$ et la famille $B = \big(a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a)\big)$ est libre et comme elle comporte n vecteurs dans E de dimension n, B est une base de E. La matrice de f dans la base B est clairement $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs).
Si $g \in F = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$, g est un polynôme en f et commute donc naturellement avec f.
Réciproquement, si $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f, exprimons la vecteur $g(a) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(a)$ dans la base B (avec $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$). Alors, pour $j \in [\![0;n-1]\!]$, on a $g \circ f^j = f^j \circ g$ par une récurrence immédiate donc $g(f^j(a)) = f^j \circ g(a) = f^j\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(a)\Big) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^j \circ f^k(a) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(f^j(a))$. Les deux endomorphismes g et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k$ coïncident donc sur la base B : ils sont donc égaux et $g = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k \in F$.
Par double inclusion, les endomorphismes qui commutent avec f sont exactement ceux qui sont dans F.
Remarque : si on suppose que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$, en évaluant en a cette relation, on obtient $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(a) = 0_E$ donc $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ car B est libre. on en déduit que $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est aussi libre donc F (le commutant de f qui est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$) est un espace de dimension n.

2.233 Dans le calcul de $P(x) = \det(A + xJ)$, on effectue les opérations de Gauss $C_k \longleftarrow C_k - C_1$ pour $k \in [\![2;n]\!]$ et les x disparaissent de toutes les cases exceptés sur la première colonne. Ensuite, on développe le déterminant selon la première colonne et on obtient $P(x) = (a+x)\Delta_{1,1} + \sum\limits_{2=1}^{n} (-1)^{i+1}(c+x)\Delta_{i,1}$ où les $\Delta_{i,1}$ sont les mineurs associés aux cases $(i,1)$ qui sont des constantes (relativement à x) d'après ce qui précède. Ainsi, la formule précédente montre que le degré du polynôme P est inférieur ou égal à 1.

Or on a $P(-b) = \det(A - bJ) = \prod\limits_{k=1}^{n} (a-b) = (a-b)^n$ car $A - bJ$ est triangulaire inférieure avec des $a-b$ sur la diagonale. De même, $P(-c) = (a-c)^n$. On connaît deux valeurs (puisque $b \neq c$) du polynôme P et comme $\deg(P) \leqslant 1$, P est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange associé et sait qu'alors :

$$P = P(-b)\frac{X+c}{-b+c} + P(-c)\frac{X+b}{-c+b} = \frac{(a-c)^n(X+b) - (a-b)^n(X+c)}{b-c}.$$

Mais comme $\det(A) = P(0)$, cela donne $\det(A) = \dfrac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$.

2.234 Les solutions de (E_0) : $y'(x) + xy(x) = 0$ sont les fonctions $y : x \to \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_n : \mathbb{R}_{2n}[X] \to \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ définie par $g_n(P) = P' + XP$. g_n est clairement linéaire et si P est de degré $k \geqslant 0$, alors $\deg(g_n(P)) = k+1$ donc $g_n(P) \neq 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, g_n = \{0\}$ donc g_n est injective. Soit P_n (resp. I_n) le sous-espace de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$) formé des polynômes pairs (resp. impairs). Alors $g_n(P_n) = \mathrm{Vect}(g_n(X^0), \cdots, g_n(X^{2n}))$ car $P_n = \mathrm{Vect}(X^0, \cdots, X^{2n})$.
Or, si $k \geqslant 1$, $g_n(X^{2k}) = X^{2k+1} + 2kX^{2k-1} \in I_n$ donc $g_n(P_n) = \mathrm{Vect}(X, \cdots, X^{2n+1} + 2nX^{2n-1}) = I_n$.

Soit P un polynôme impair (de degré $2n+1$), alors $P \in I_n$ donc il existe un unique (par injectivité de g_n) polynôme $u(P)$ pair dans P_n tel que $g_n(u(P)) = P \iff u(P)' + Xu(P) = P$. Les polynômes Q de degré $d > 2n$ ne peuvent pas vérifier $Q' + XQ = P$ (comparer les degrés) donc l'équation $y'(x) + xy(x) = P(x)$ admet une unique solution polynomiale $u(P)$ et cette solution polynomiale est paire et de degré $\deg P - 1$.

Par exemple si $P = 1$, l'équation $y' + xy = 1$ admet pour solutions, par méthode de variation de la constante, les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \left(\lambda + \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mais aucune solution n'est polynomiale puisque si P est de degré $k \geqslant 0$, alors $\deg(g_n(P)) = k+1$. Les résultats ne persistent pas si P est pair.

Soit $n \geqslant 0$ fixé, on définit $f \in \mathcal{L}(I_n)$ par $f(P) = Xu(P)$. La linéarité est claire car celle de u provient de la linéarité de g_n. La base canonique de I_n est $(X, X^3, \cdots, X^{2n+1})$. Posons $Q_k = f(X^{2k+1})$, par définition on a $Q_k = XP_k$ avec $P_k' + XP_k = X^{2k+1}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ Q_{k+1}(x) = xP_{k+1}(X) = \int_0^x (tP_{k+1}(t))' dt$ car $(XP_{k+1})(0) = 0$.

L'astuce est que $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left(P_k(t)e^{\frac{t^2}{2}}\right)' = \left(P_k'(t) + tP_k(t)\right)e^{\frac{t^2}{2}} = t^{2k+1}e^{\frac{t^2}{2}}$. Alors, par parties : $P_{k+1}(x)e^{\frac{x^2}{2}} = \int_0^x (P_{k+1}(t)e^{\frac{t^2}{2}})' dt = \int_0^x t^{2k+3}e^{\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^x t^{2k+2}(te^{\frac{t^2}{2}}) dt = \left[t^{2k+2}e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x - (2k+2)\int_0^x t^{2k+1}e^{\frac{t^2}{2}} dt$.

Par conséquent : $P_{k+1}(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x^{2k+2}e^{\frac{x^2}{2}} - (2k+2)P_k(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ ce qui donne $P_{k+1} = X^{2k+2} - (2k+2)P_k$.

Comme $P_0 = 1$, $P_1 = X^2 - 2$, $P_2 = X^4 - 4X^2 + 8$, $P_3 = X^6 - 6X^4 + 24X^2 - 48$ et on montre par récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ P_k = (k)! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i 2^i}{(k-i)!} X^{2k-2i}$.

Alors $Q_k = f(X^{2k+1}) = XP_k = (k)! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i 2^i}{(k-i)!} X^{2k-2i+1}$ donne la matrice voulue.

2.235 Φ est clairement linéaire et on suppose que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ (avec $m \geqslant 1$, on traite le cas général car l'énoncé n'est pas clair). Si $h \in \mathrm{Im}(\Phi)$, alors il existe g tel que $h = g \circ f$ donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, h$. Réciproquement, soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tel que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, h$, alors soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$ qu'on complète en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Puisque $n = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rang}\, f$ par la formule du rang, on a $p = n - r$ en notant $r = \mathrm{rang}\, f$. On sait qu'en posant $F = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$, F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ donc f induit un isomorphisme entre F et $\mathrm{Im}\, f$. Ainsi $(f(e_{p+1}), \cdots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$ qu'on complète en une base $(f(e_{p+1}), \cdots, f(e_n), f_1, \cdots, f_{m-n+p})$ de $\mathbb{R}^m$. Soit donc $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire définie par $\forall k \in [\![p+1; n]\!],\ g(f(e_k)) = h(e_k)$ et $\forall k \in [\![1; m-n+p]\!],\ g(f_k) = 0$. Alors g est bien définie par l'image d'une base et $\forall k \in [\![1; p]\!],\ g(f(e_k)) = h(e_k)$ car $f(e_k) = h(e_k) = 0$ par construction ; de plus $\forall k \in [\![p+1; n]\!],\ g(f(e_k)) = h(e_k)$ par définition de g. Ainsi $g \circ f$ et h coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$: elles sont égales. On en déduit que $h \in \mathrm{Im}\,(\Phi)$.

On vient de montrer par double inclusion que $\mathrm{Im}\,(\Phi) = \{h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, h\}$.

Avec les notations précédentes, si on définit $\theta : \mathrm{Im}\,(\Phi) \to (\mathbb{R}^m)^{n-p}$ par $\theta(h) = (h(e_{p+1}), \cdots, h(e_n))$, alors θ est linéaire, injective car $h(e_1) = \cdots = h(e_p) = 0$ puisque $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, h$ donc $\theta(h) = 0 \Longrightarrow h = 0$, de plus θ est surjective car si $(v_{p+1}, \cdots, v_n) \in (\mathbb{R}^m)^{n-p}$, l'application $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ définie par $\forall k \in [\![1; p]\!],\ h(e_k) = 0$ et $\forall k \in [\![p+1; n]\!],\ h(e_k) = v_k$ est bien dans $\mathrm{Im}\,(\Phi)$ car $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, h$.

On en déduit que $\dim(\mathrm{Im}\,(\Phi)) = \dim((\mathbb{R}^m)^{n-p}) = m(n-p) = m\, \mathrm{rang}\,(f)$.

On pouvait aussi le voir matriciellement comme dans la planche Mines 117I.

2.236 Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$ donc α^2 est aussi racine de P. Par récurrence, on montre alors que $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha^{2^n}$ est racine de P. Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \notin \mathbb{U}$, la suite $\left(|\alpha|^{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$ contient une infinité de valeurs donc $\left(\alpha^{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$ aussi. P possède donc une infinité de racines et ce ne peut donc être que $P = 0$. Nous venons d'établir que si $P \neq 0$, alors une racine de P est donc nulle ou de module 1.

Dorénavant $P \neq 0$ et $P(X^2) = P(X)P(X+1)$; si α est racine de P, comme $P\left((\alpha-1)^2\right) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$, $(\alpha-1)^2$ est aussi racine de P : on en déduit que $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha - 1| = 1$. Si $|\alpha| = |\alpha - 1| = 1$, on a $\alpha = -j$ ou $\alpha = -j^2$ (faire un dessin pour visualiser l'intersection des deux cercles d'équation $|z| = 1$ et $|z-1| = 1$). Mais si $\alpha = -j$, alors $(-j-1)^2 = j$ est aussi racine de P ce qui est faux. De même $-j^2$ ne peut pas être racine de P. Il ne reste donc que $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ comme racine possible de P. Comme $P(X^2) = P(X)P(X+1)$, le coefficient dominant λ de P vérifie $\lambda^2 = \lambda$ donc $\lambda = 1$. Ainsi, il existe deux entiers n et m tels que $P = X^n(X-1)^m$. $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ devient maintenant $X^{2n}(X^2-1)^m = X^n(X-1)^m(X+1)^nX^m$ c'est-à-dire $X^{2n}(X-1)^m(X+1)^m = X^{n+m}(X-1)^m(X+1)^n$ donc $n = m$ par unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles.

Vérifions que si $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n(X-1)^n$ est solution : on a bien $X^{2n}(X^2-1)^n = X^n(X-1)^n(X+1)^n(X+1-1)^n$.

Les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ sont $P = 0$ et les $P_n = X^n(X-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2.237 **a.** En notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M, on cherche si u est un projecteur ou une symétrie, donc on calcule M^2 et on trouve aisément $M^2 = M$. Ainsi, $u^2 = u$ et u est un projecteur.

$I_3 - M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - u)$ est un plan d'après la formule du rang. En résolvant $MX = X$, on trouve que F est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Comme on sait que $G = \mathrm{Ker}\, u$ est un supplémentaire de F, G est une droite et comme $(1,1,-1) \in \mathrm{Ker}(u)$, on conclut que $G = \mathrm{Vect}((1,1,-1))$.

b. Si $M = AB$, alors $\mathrm{Im}\,(M) \subset \mathrm{Im}\,(A)$ et donc $\mathrm{rang}\,(M) = 2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \leqslant 2$ car pour une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rang}\,(P) \leqslant n$ et $\mathrm{rang}\,(P) \leqslant p$. On en déduit que $\mathrm{rang}\,(A) = 2$ et que, par inclusion et égalité des dimensions , $\mathrm{Im}\,(M) = \mathrm{Im}\,(A)$. Les colonnes de A sont donc des images par M. Autant prendre les plus simples, c'est-à-dire les colonnes de M. Il suffit donc de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vérification simple). Ou alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (tout aussi simple).

c. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $M = AB$ (on vient de voir qu'il n'y avait pas unicité d'un tel couple (A,B)). Comme $M^2 = M$, $ABAB = AB$ qu'on peut aussi écrire $A(BA - I_2)B = 0$.

Notons $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ les applications linéaires canoniquement associées à A et B.

On a déjà vu que $\mathrm{rang}\,(M) = \mathrm{rang}\,(AB) \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \leqslant 2$ donc $\mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(v) = 2$ donc v est injective car son rang est égal à la dimension de son espace de départ. Or $v \circ (w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ w = 0$, ainsi $(w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ w = 0$ car $\{0\} \subset \mathrm{Im}\,((w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ w) \subset \mathrm{Ker}(v) = \{0\}$. Mais on a aussi $\mathrm{rang}\,(M) = \mathrm{rang}\,(AB) \leqslant \mathrm{rang}\,(B) \leqslant 2$ d'où $\mathrm{rang}\,(B) = \mathrm{rang}\,(w) = 2$ donc w est surjective car son rang est égal à la dimension de son espace d'arrivée. Alors $(w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \circ w = 0$ d'où $w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = 0$ car $\mathrm{Im}\,(w) = \mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Ker}(w \circ v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \subset \mathbb{R}^2$. On conclut donc que $w \circ v = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ce qui montre que $BA = I_2$.

2.238 Si on avait $f(I_n)=0$, pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on aurait $f(A)=f(AI_n)=f(A)f(I_n)=0$ et f serait nulle ce qui est exclus : ainsi $f(I_n)\neq 0$.

Si on avait $f(0_n)\neq 0$ (0_n étant la matrice nulle), on aurait $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(0_n)=f(A0_n)=f(A)f(0_n)$ donc $f(A)=1$ et f serait constante ce qui est exclus : ainsi $f(0_n)=0$.

• Si A est inversible, on a donc $f(I_n)=f(AA^{-1})=f(A)f(A^{-1})\neq 0$ donc $f(A)\neq 0$.

• Si A n'est pas inversible, $r=\operatorname{rang}A<n$ et $\dim(\operatorname{Ker}A)=n-r>0$ par le théorème du rang. Soit $(e_1,\cdots,e_{n-r})$ une base de $\operatorname{Ker}A$, qu'on complète en une base $e=(e_1,\cdots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On sait alors que $F=\operatorname{Vect}(e_{n-r+1},\cdots,e_n)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}A$ et donc que A induit un isomorphisme entre F et $\operatorname{Im}A$. Ainsi en posant $f_k=Ae_{n-r+k}$ pour $k\in[\![1;r]\!]$, la famille $f=(f_1,\cdots,f_r)$ est une base de $\operatorname{Im}A$ qu'on complète en une base $(f_1,\cdots,f_n)$ de $\mathbb{R}^n$. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à e et Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à f, on a par formule de changement de base : $A=QNP^{-1}$ avec $N=\begin{pmatrix}0_{r,n-r} & I_r\\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r}\end{pmatrix}$. Il est clair que N est nilpotente (d'indice $p\leqslant n$) et on a donc $f(0_n)=f(N^p)=f(N)^p=0$ ce qui donne $f(N)=0$ puis $f(A)=f(Q)f(N)f(P^{-1})=0$.

On conclut donc à l'équivalence souhaitée par double implication.

2.239 $Q(\zeta_1)+\ldots+Q(\zeta_p)=\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\zeta_i^k=\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}\zeta_i^k\Big)b_k$. On peut prendre $\zeta_2=e^{\frac{2i\pi}{p}}$ et $\zeta_i=\zeta_2^{i-1}$. Alors, pour $k\in[\![1;n]\!]$, on a $\sum\limits_{i=1}^{p}\zeta_i^k=\dfrac{1-\zeta_2^{kp}}{1-\zeta_2^k}=0$ car $\zeta_2^k\neq 0$ puisque $n\in[\![1;p-1]\!]$ et $\zeta_2^{kp}=(\zeta_2^p)^k=1$.

Ainsi, il ne reste que $\sum\limits_{i=1}^{p}Q(\zeta_i)=pb_0$ car $\sum\limits_{i=1}^{p}\zeta_1^k=\sum\limits_{i=1}^{p}1=p$.

D'abord M existe car $z\to|Q(z)|$ (en tant que composée d'une fonction polynomiale et de la fonction module qui sont continues) est continue sur le compact S_1. Par définition de M car tous les ζ_i appartiennent à S_1, et par inégalité triangulaire : $|pb_0|=|Q(\zeta_1)+\ldots+Q(\zeta_p)|\leqslant|Q(\zeta_1)|+\ldots+|Q(\zeta_p)|\leqslant pM$ donc $|b_0|\leqslant M$.

De même, pour $j\in[\![1;n]\!]$: $\sum\limits_{i=1}^{p}\zeta_i^{-j}Q(z_i)=\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\zeta_i^{k-j}=\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}\zeta_i^{k-j}\Big)b_k=pb_j$. À nouveau, en majorant par inégalité triangulaire : $|pb_j|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{p}|Q(z_i)|\leqslant pM$ car $|\zeta_i^{-j}|=1$. On déduit encore que $|b_j|\leqslant M$.

On pose $Q=\prod\limits_{k=1}^{n}(X-z_k)$ de sorte que $b_n=1$ et, avec $p=n+1$, on a $|b_n|\leqslant M$ donc $M\geqslant 1$.

Je ne vois pas d'interprétation géométrique particulière à donner !!!!

Pour $n=1$, $Q=X-z_1$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}|Q(e^{it})|^2d\theta=\int_0^{2\pi}\big((\cos\theta-\rho_1\cos\alpha_1)^2+(\sin\theta-\rho_1\sin\alpha_1)^2\big)d\theta$ avec $z_1=\rho_1e^{i\alpha_1}$.

Après calculs, on trouve $\displaystyle\int_0^{2\pi}|Q(e^{it})|^2d\theta=2\pi(1+\rho_1^2)$. Si on suppose que $\forall z\in S_1=\mathbb{U}$, $\prod\limits_{k=1}^{n}|z-z_k|<1$, alors $M=\underset{z\in S_1}{\operatorname{Max}}|Q(z)|<1$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}|Q(e^{it})|^2d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}M^2d\theta=2\pi M^2<2\pi$ ce qui est absurde. Ainsi, $M\geqslant 1$.

Plus généralement, si $Q(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kz^k$ avec $b_n=1$, alors $\overline{Q(z)}=Q(\overline{z})=\sum\limits_{k=0}^{n}\overline{b_k}\overline{z}^k$. Alors, on développe $|Q(z)|^2=\Big(\sum\limits_{p=0}^{n}b_pz^p\Big)\Big(\sum\limits_{q=0}^{n}\overline{b_q}\overline{z}^q\Big)$ pour obtenir $|Q(z)|^2=\sum\limits_{k=0}^{n}|b_k|^2|z|^{2k}+S$ où S contient des termes du type $b_p\overline{b_q}z^p(\overline{z})^q$ avec $p\neq q$. Si par exemple $p>q$, ce terme vaut $b_p\overline{b_q}|z|^{2q}z^{p-q}$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}b_p\overline{b_q}e^{(p-q)i\theta}d\theta=0$.

Par linéarité de l'intégrale, comme $\displaystyle\int_0^{2\pi}|b_k|^2d\theta=2\pi|b_k|^2$, on obtient $\displaystyle\int_0^{2\pi}|Q(e^{it})|^2d\theta=\sum\limits_{k=0}^{n}|b_k|^2\geqslant 1$ et on conclut avec le même argument que précédemment que $M \geqslant 1$.

2.240 • $C(A)$ est le commutant de A : on a vu en cours que c'était une sous-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (il y a I_n, c'est stable par somme, multiplication par un scalaire et produit).
• Si M inversible et $AM = MA$, on multiplie par M^{-1} à gauche, à droite et $M^{-1}A = AM^{-1}$: $M^{-1} \in C(A)$.
• Soit $M \in C(D)$, soit u et d les endomorphismes canoniquement associés à M et D, alors $u \circ d = d \circ u$. Or d admet n valeurs propres distinctes deux à deux donc tous les sous-espaces propres de d sont les droites vectorielles $D_k = \mathrm{Vect}(e_k)$ (où $(e_1, \cdots, e_n)$ est la base canonique) qui sont stables par u. Ainsi, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\exists \alpha_k \in \mathbb{R}$, $u(e_k) = \alpha_k e_k$ car $u(e_k) \in D_k$. Ceci justifie M est aussi diagonale. $C(D)$ est donc le sous-espace des matrices diagonales (elles commutent clairement avec D).
On aurait pu aussi le faire par calcul matriciel direct $DM = MD \Longrightarrow M$ diagonale en identifiant.
Comme $C(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales : $\dim(C(D)) = n$.
Il est clair que les D^k commutent avec D. De plus, si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k D^k = 0$ (1), alors soit le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k$. La relation (1) montre que les λ_i sont des racines de P, qui est de degré inférieur ou égal à n. Ainsi $P = 0$ donc $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.
On aurait pu écrire le système et reconnaître une matrice de Vandermonde inversible donc un système de Cramer. On pouvait enfin dire que $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est annulateur de D donc les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de D sont des racines de P ce qui montre que $P = 0 \Longrightarrow \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.
Dans tous les cas : $(I_n, D, \cdots, D^{n-1})$ est libre donc c'est bien une base de $C(D)$ car $\dim(C(D)) = n$.
• Comme $C(A) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\dim(C(A)) = 4 \Longleftrightarrow C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche donc les A qui commutent avec toutes les autres. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $AE_{1,1} = E_{1,1}A \Longrightarrow b = c$; $AE_{2,1} = E_{2,1}A \Longrightarrow (a = d$ et $b = 0)$.
Ainsi $A = aI_2$. La réciproque est claire. Par conséquent : $\dim(C(A)) = 4 \Longleftrightarrow (A, I_2)$ liée.
• Si $A = \lambda I_2$, alors $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\dim(C(A)) = 4 \geqslant 2$.
Si (A, I_2) libre, alors cette famille étant libre dans $C(A)$, $\dim(C(A)) \geqslant 2$.
• $F = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $G = \mathrm{Vect}(E_{2,1}, E_{2,2})$ sont deux plans supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $C(A)$ est de dimension 3, $\dim(F \cap C(A)) \geqslant 1$ et $\dim(G \cap C(A)) \geqslant 1$ d'après Grassmann. Il existe donc quatre réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que les deux matrices $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0$ sont éléments de $C(A)$.
Or $AB = BA \Longleftrightarrow (\beta c = \alpha c = 0$ et $\alpha b + \beta d = \beta a)$. Comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on en déduit que $c = 0$.
De même, $AC = CA \Longleftrightarrow (\gamma b = \delta b = 0$ et $\gamma a + \delta c = \gamma d)$. Comme $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$, on a $b = 0$.
La matrice A est donc diagonale, si elle n'était pas scalaire ($A \neq \lambda I_2$), on a vu que en **c.** que $C(A)$ serait de dimension $n = 2$, non ! Ainsi, $a = d$ et A est proportionnelle à la matrice I_2. NON car alors $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
• Si $A = \lambda I_2$, alors $C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une base de $C(A)$.
Sinon, $\dim(C(A)) = 2$ d'après ce qui précède donc (I_2, A) est une base de $C(A)$.

2.241 <u>Méthode 1</u> : il suffit d'écrire $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k^2 - 2k = 6\binom{k}{3} + 3k(k-1) + k = 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$.
Ensuite, pour un entier p, on a $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \dfrac{n!}{(n-k)!(k-p)!p!} = \dfrac{n!(n-p)!}{(n-p)!p!(n-k)!(k-p)!} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.
Ainsi, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3 = 6 \sum\limits_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{3} + 6 \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{1}$ qu'on transforme avec les égalités précédentes : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3 = 6\binom{n}{3} \sum\limits_{k=3}^{n} \binom{n-3}{k-3} + 6\binom{n}{2} \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} + \binom{n}{1} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$. Or, avec le binôme de Newton, on a $\sum\limits_{k=3}^{n} \binom{n-3}{k-3} = 2^{n-3}$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} = 2^{n-2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$.
On obtient donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3 = 6\binom{n}{3} 2^{n-3} + 6\binom{n}{2} 2^{n-2} + \binom{n}{1} 2^{n-1} = n^2(n+3)2^{n-3}$.
<u>Méthode 2</u> : on a $(1+X)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$, on dérive et on multiplie par X et $nX(1+X)^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} X^k$.

On recommence : $nX(nX+1)(1+X)^{n-2} = (n(1+X)^{n-1} + n(n-1)X(1+X)^{n-2})X = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}X^k$. On continue $n((nX+1)(1+X)^{n-2} + nX(1+X)^{n-2} + (n-2)X(nX+1)(1+X)^{n-3})X = \sum\limits_{k=0}^{n} k^3\binom{n}{k}X^k$ et on évalue en 1 pour avoir à nouveau $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3\binom{n}{k} = n((n+1)2^{n-2} + n2^{n-2} + (n-2)(n+1)2^{n-3}) = n^2(n+3)2^{n-3}$.

2.242 Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par $f(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$. L'application f est clairement linéaire donc l'énoncé se transforme en "Montrer que $(a_0 \neq 0) \Longleftrightarrow (\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ \exists! P \in \mathbb{K}[X],\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = Q) \Longleftrightarrow f \in GL(\mathbb{R}[X])$".

Si $a_0 \neq 0$, comme $f(P) = a_0 P + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k P^{(k)}$ et que $\deg\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k P^{(k)}\Big) < \deg(P)$, on a $\deg(f(P)) = \deg(P)$. Par conséquent, f est injective car $f(P) = 0 \Longrightarrow \deg(f(P)) = -\infty \Longrightarrow \deg(P) = -\infty \Longrightarrow P = 0$. Si on fixe $p \in \mathbb{N}$ et qu'on induit l'endomorphisme f dans $\mathbb{K}_p[X]$, c'est-à-dire qu'on considère $f_p : \mathbb{R}_p[X] \to \mathbb{R}_p[X]$ définie par $f_p(P) = f(P)$, on obtient un endomorphisme injectif f_p de $\mathbb{R}_p[X]$ qui est donc un automorphisme (en dimension finie). On a $f(0) = 0$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q \neq 0$, notons $p = \deg(Q) \in \mathbb{N}$, alors par la bijectivité de f_p, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_p[X]$ tel que $Q = f_p(P) = f(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$. On conclut que f est surjective. L'injectivité de f montre que f est bien un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Si $a_0 = 0$, comme $f(1) = 0$, $1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $1 \neq 0$ et f n'est pas injective donc pas un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, par contraposée, on a bien montré que $f \in GL(\mathbb{R}[X]) \Longrightarrow a_0 \neq 0$.

Par double implication, on a établi que $(a_0 \neq 0) \Longleftrightarrow (\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ \exists! P \in \mathbb{K}[X],\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = Q)$.

2.243 Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k (X - z_k)^n = 0$. Par le binôme de NEWTON, on obtient l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-z_k)^{n-i}X^i = 0 = \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k z_k^{n-i}\Big)X^i = 0$. Ainsi, $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k z_k^{n-i} = 0$. Ceci peut encore écrire $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j z_j^i = 0 \Longleftrightarrow VX = 0$ avec ${}^tX = (\lambda_0 \cdots \lambda_n)$ et $V = (z_j^i)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Mais on connaît le déterminant de cette matrice de VANDERMONDE : $\det(V) = \prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (z_j - z_i) \neq 0$ car les $z_0, \cdots, z_n$ sont 2 à 2 distincts. Alors $VX = 0$ implique $X = 0$ (en multipliant par V^{-1}) donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi $\big((X - z_k)^n\big)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$ car elle contient $n+1$ de ses vecteurs.
On pouvait aussi écrire la matrice de la famille $\big((X - z_k)^n\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dans la base $(X^n, \cdots, 1)$ et montrer que son déterminant est non nul en se ramenant à VANDERMONDE ; on conclut de même.

2.244 L'orthocentre H du triangle ABC vérifie $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$.
Si $z = 0$, le triangle ABC est réduit à l'origine et son orthocentre est aussi l'origine : OK ! Si $z \neq 0$:
Si $O = H$, on a $\dfrac{z^3 - z^2}{z} \in i\mathbb{R}$, $\dfrac{z^3 - z}{z^2} \in i\mathbb{R}$ et $\dfrac{z^2 - z}{z^3} \in i\mathbb{R}$. Ainsi $z^2 - z \in i\mathbb{R}$, $z - \dfrac{1}{z} \in i\mathbb{R}$ et $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} \in i\mathbb{R}$.
En écrivant $z = x + iy$ sous forme cartésienne avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la première condition devient $x^2 - y^2 - x = 0$, la seconde se ramène à $x - \dfrac{x}{x^2 + y^2} = 0$ et la troisième (qui est inutile en fait puisque $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AC}$ suffit à caractériser l'orthocentre) à $\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = 0$. Si $x = 0$, on a $y = 0$: exclu ici.
Ainsi : $x^2 - y^2 - x = x^2 + y^2 - 1 = 0$. En sommant on obtient $2x^2 - x - 1 = 0 \Longleftrightarrow \big(x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\big)$.
Les solutions sont donc $x = 1$, $y = 0$ (NON) et $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (et on obtient le triangle équilatéral

formés avec les points d'affixes $1, j, j^2$ dont l'orthocentre est bien O). Au final : $S = \{0, j, j^2\}$.
On aurait aussi pu traduire : $z - \dfrac{1}{z} \in i\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} - \dfrac{1}{\overline{z}} = -z + \dfrac{1}{z} \Longleftrightarrow \dfrac{(z+\overline{z})(|z|^2-1)}{|z|^2} = 0$ et on a deux cas :

- $z \in i\,\mathbb{R}$, alors $z^2 - z \in i\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow z^2 \in i\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = 0$ (car $(ix)^2 = -x^2 \in i\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow x = 0$) !
- $|z| = 1$, alors $z^2 - z \in i\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z}^2 - \overline{z} = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z} = z - z^2 \Longleftrightarrow z^4 - z^3 - z + 1 = (z-1)(z^3-1) = 0 \Longleftrightarrow z^3 = 1$.

2.245 Par définition de la division euclidienne, comme $\deg(D) = 4$, l'application f va bien de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_6[X]$, alors $P_1 = DQ_1 + f(P_1)$ et $P_2 = DQ_2 + f(P_2)$ de sorte que l'on obtient $P_1 + \lambda P_2 = D(Q_1 + \lambda Q_2) + f(P_1) + \lambda f(P_2)$. Comme $\deg(f(P_1) + \lambda f(P_2)) \leqslant \mathrm{Max}(f(P_1), f(P_2)) \leqslant 3$, le polynôme $f(P_1) + \lambda f(P_2)$ est bien le reste de la division euclidienne de $P_1 + \lambda P_2$ par D.
Ainsi : $f(P_1 + \lambda P_2) = f(P_1) + \lambda f(P_2)$ et f est bien linéaire.

- $1 = D \times 0 + 1$ et $\deg(1) = 0 < \deg(D) = 4$ donc $f(1) = 1$. De même : $f(X) = X$, $f(X^2) = X^2$ et $f(X^3) = X^3$.
- $X^4 = D \times 1 + (-X^3 - X^2 - X - 1)$ et $\deg(-X^3 - X^2 - X - 1) = 3 < \deg(D) = 4$ donc $f(X^4) = -X^3 - X^2 - X - 1$.
- $X^5 = D \times (X-1) + 1$ et $\deg(1) = 0 < \deg(D) = 4$ donc $f(X^5) = 1$. $X^6 = D \times (X^2 - X) + X$ donc $f(X^4) = X$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{can6,can3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme la famille $(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$ est de degrés échelonnés de 0 à 3 et que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3), f(X^4), f(X^5), f(X^6))$, il vient $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3) = \mathbb{R}_3[X]$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$. Or il est clair que $f(D) = f(XD) = f(X^2D) = 0$ donc, comme (D, XD, X^2D) est libre : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(D, XD, X^2D)$.

2.246 Pour $k \in [\![1;n]\!]$, $f^k = f_k \circ \mathrm{id}_E = f_k \circ \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_k \circ f_i = f_k^2$ donc f_k est un projecteur. Soit $x \in E$, $\mathrm{id}_E(x) = x = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\Big)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \in \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_k)$. Comme $E \supset \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_k)$ est clair : $E = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_k)$.
Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_i)$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0_E$. Appliquons, pour $k \in [\![1;n]\!]$, l'application f_k à cette relation, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} f_k(x_i) = 0_E$. Comme $x_i \in \mathrm{Im}\,(f_i)$, $\exists y_i \in E$, $x_i = f_i(y_i)$ et $f_k(x_i) = f_k \circ f_i(y_i) = 0_E$ si $i \neq k$. Ainsi, il ne reste que $f_k(x_k) = 0_E$ or $f_k(x_k) = x_k$ car $\mathrm{Im}\,(f_k) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f_k)$ et on a bien $x_k = 0_E$.
On pouvait aussi dire que $\mathrm{rang}\,(f_k) = \mathrm{Tr}\,(f_k)$ car f_k est un projecteur donc, par linéarité de la trace : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Tr}\,(f_k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{id}_E) = \dim(E)$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{rang}\,(f_k) = \dim(E) \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \dim\big(\mathrm{Im}\,(f_k)\big) = \dim\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_k)\Big)$.
Par les deux méthodes, la somme est directe et on a $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(f_k)$.

2.247 • Si u est injectif, alors u^m l'est aussi par composée pour tout entier m donc $K_m = \{0_E\}$ et $I_m = E$.
Soit $m \geqslant 1$, si $x \in K_m$, alors $u^m(x) = 0_E$ donc $u^{m+1}(x) = u(u^m(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in K_{m+1}$ d'où l'inclusion $K_m \subset K_{m+1}$. Si $x \in I_{m+1}$ alors il existe $y \in E$ tel que $x = u^{m+1}(y) = u^m(u(y)) \in I_m$: $I_{m+1} \subset I_m$.
• Si u n'est pas injectif, alors $K_m \neq \{0_E\}$ donc $\dim(K_m) \geqslant 1$ alors que $\dim(K_0) = 0$ car $u^0 = \mathrm{id}_E$. Si on avait $\forall p \in [\![0;n]\!]$, $K_p \neq K_{p+1}$, alors par les inclusions précédentes, on aurait $\dim(K_{p+1}) \geqslant \dim(K_p) + 1$ et par une récurrence facile : $\forall p \in [\![0;n+1]\!]$, $\dim(K_p) \geqslant p$ ce qui donnerait $\dim(K_{n+1}) \geqslant n+1$ qui est impossible. Ainsi : $\exists p \in [\![0;n]\!]$, $K_p = K_{p+1}$. Pour un tel entier p, par le théorème du rang, on a donc $\dim(I_p) = \dim(I_{p+1})$ et on conclut à $I_p = I_{p+1}$ avec l'inclusion précédente.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$, supposons que $K_p = K_{p+q-1}$. Comme avant, $K_p \subset K_{p+q}$. Réciproquement, soit $x \in K_{p+q}$, alors $u^{p+q}(x) = u^{p+1}(u^{q-1}(x)) = 0_E$ donc $u^{q-1}(x) \in K_{p+1} = K_p$ donc $u^p(u^{q-1}(x)) = u^{p+q-1}(x) = 0_E$ donc $x \in K_{p+q-1} = K_p$ par hypothèse de récurrence. Puisque $K_{p+1} = K_p$, on a bien $\forall q \in \mathbb{N}$, $K_p = K_{p+q}$.
Il est classique que $\forall q \in \mathbb{N}$, $I_{p+q} \subset I_p$. D'après le théorème du rang, on a $\dim(I_p) = \dim(I_{p+q})$ puisque $K_p = K_{p+q}$. Par inclusion et égalité des dimensions, il vient $\forall q \in \mathbb{N}$, $I_p = I_{p+q}$.
Puisqu'on a $\dim(E) = \dim(K_p) + \dim(I_p)$ par le théorème du rang, il suffit de vérifier que $K_p \cap I_p = \{0_E\}$. Si $x \in K_p \cap I_p$, on a $u^p(x) = 0_E$ et $\exists y \in E$, $x = u^p(y)$. Alors $u^{2p}(y) = u^p(u^p(y)) = u^p(x) = 0_E$ donc $y \in K_{2p} = K_p$ et on a $x = u^p(y) = 0_E$. Au final, on a bien $E = K_p \oplus I_p$.

2.248 **a.** • Si $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E, forcément, on a $f^2(x_0) \neq 0_E$.

• Réciproquement, soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$ et $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $(1)\ :\ ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_E$. On applique f^2 à la relation (1) et il reste $af^2(x_0) = 0_E$ car $f^3(x_0) = f^4(x_0) = 0_E$ puisque $f^3 = 0$. Ainsi, comme $f^2(x_0) \neq 0_E$, il vient $a = 0$. On applique maintenant f à (1) et il reste $bf^2(x_0) = 0_E$ dont on déduit à nouveau que $b = 0$. (1) se résume alors à $cf^2(x_0) = 0_E$ d'où $c = 0$ à nouveau. Par conséquent, $a = b = c = 0$ et $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est libre et comme $\dim(E) = 3$ et que $\mathcal{B}$ a trois vecteurs, $\mathcal{B}$ une base de E.
La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc : $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de $E \Longleftrightarrow f^2(x_0) \neq 0_E$.

b. Par construction de $\mathcal{B}$ et car $f^3(x_0) = f(f^2(x_0)) = 0_E$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, alors $g \circ f = f \circ g$ équivaut matriciellement à $BA = AB$. Or, par calcul matriciel, on a l'équivalence : $AB = BA \Longleftrightarrow b_{1,2} = b_{1,3} = b_{2,3} = b_{1,1} - b_{2,2} = b_{2,2} - b_{3,3} = b_{2,1} - b_{3,2} = 0$.

Ainsi : $f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ \alpha & \mu & \lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow B = \lambda I_3 + \mu A + \alpha A^2 \Longleftrightarrow g = \lambda \text{id}_E + \mu f + \alpha f^2$.

On en déduit qu'en notant $\mathcal{C}(f)$ le commutant de f défini par $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$, on a $\mathcal{C}(f) \subset \text{Vect}(\text{id}_E, f, f^2)$. Réciproquement, s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $g = a\text{id}_E + bf + cf^2$, alors $g \circ f = af + bf^2 + cf^3 = f \circ g$ donc $g \in \mathcal{C}(f)$. Par double inclusion, on a donc $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(\text{id}_E, f, f^2)$. Si $a\text{id}_E + bf + cf^2 = 0$, on a $(1)\ :\ ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0_E$ en évaluant en x_0 et on sait qu'alors $a = b = c = 0$ donc la famille (id_E, f, f^2) est libre. Ainsi, (id_E, f, f^2) est une base de $\mathcal{C}(f)$ et $\dim(\mathcal{C}(f)) = 3$.

2.249 On développe et $\Delta = ye^z + ze^x + xe^y - ze^y - xe^z - ye^x$. On pose $b = z - y > 0$ et $a = y - x > 0$ de sorte que $\Delta = (x + a)e^{x+a+b} + (x + a + b)e^x + xe^{x+a} - (x + a + b)e^{x+a} - xe^{x+a+b} - (x + a)e^x$. Ou utilise la relation $e^{x+a} = e^x e^a$ par exemple pour avoir $\Delta = (ae^a e^b - ae^a - be^a + b)e^x$.
La fonction $\varphi_a : b \mapsto ae^a e^b - ae^a - be^a + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi'_a(b) = ae^a e^b - e^a + 1$, $\varphi''_a(b) = ae^a e^b$ donc φ'_a est croissante, vaut $\varphi_a(0) = (a - 1)e^a + 1$ en 0. Or en utilisant les séries entières, on obtient $\varphi_a(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^{n+1}}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n!} + 1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}\Big)a^n > 0$ si $a > 0$ donc φ'_a est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, φ_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi_a(0) = 0$ donc $\varphi_a > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\Delta > 0$.

2.250 La trigonométrie montre que $(f_1, f_2, f_3) \in F^3$ où $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$ car $f_1 = \sin(a)\cos + \cos(a)\sin$, $f_2 = \sin(b)\cos + \cos(b)\sin$, $f_3 = \sin(c)\cos + \cos(c)\sin$. Or F est un plan donc (f_1, f_2, f_3) est liée.

2.251 Dans le calcul de $P(x) = \det(A + xJ)$, on effectue les opérations de Gauss $C_k \longleftarrow C_k - C_1$ pour $k \in [\![2; n]\!]$ et les x disparaissent de toutes les cases exceptés sur la première colonne. Ensuite, on développe le déterminant selon la première colonne et on obtient $P(x) = (a + x)\Delta_{1,1} + \sum\limits_{2=1}^{n} (-1)^{i+1}(c + x)\Delta_{i,1}$ où les $\Delta_{i,1}$ sont les mineurs associés aux cases $(i, 1)$ qui sont des constantes (relativement à x) d'après ce qui précède. Ainsi, la formule précédente montre que le degré du polynôme P est inférieur ou égal à 1.

Or $P(-b) = \det(A - bJ) = \prod\limits_{k=1}^{n} (a - b) = (a - b)^n$ car $A - bJ$ est triangulaire inférieure avec des $a - b$ sur la diagonale. De même, $P(-c) = (a - c)^n$.

• Si $b \neq c$, on connaît deux valeurs du polynôme P et comme $\deg(P) \leqslant 1$, P est donc le polynôme d'interpolation de Lagrange : $P = P(-b)\dfrac{X + c}{-b + c} + P(-c)\dfrac{X + b}{-c + b} = \dfrac{(a - c)^n(X + b) - (a - b)^n(X + c)}{b - c}$.

Mais comme $\det(A) = P(0)$, cela donne $\det(A) = \dfrac{b(a - c)^n - c(a - b)^n}{b - c}$.

• Si $b = c$, soit $f : h \mapsto \begin{vmatrix} a & b+h & \dots & b+h \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+h \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$. Comme f est polynomiale, en effectuant un DL à l'ordre 1 en h du numérateur, $\det(A) = f(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{b(a-b-h)^n - (b+h)(a-b)^n}{-h} = (a-b)^n + n(a-b)^{n-1}$.

2.252 Si on pose $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $B = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, alors $\overline{A} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} X^n$ et $\overline{B} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{b_n} X^n$ de sorte que l'on a $\overline{AB} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a_k}\overline{b_{n-k}} \Big) X^n$ et $AB = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big) X^n$ donc $\overline{AB} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \Big)} X^n$. Les propriétés de morphismes d'algèbre de la conjugaison (stabilité par somme et produit) montrent que $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$.

On en déduit, par produit, que, si $A = \lambda \prod\limits_{k=1}^{n} (X - z_k)$, alors $\overline{A} = \overline{\lambda} \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \overline{z_k})$.

Il est clair que $Q = \dfrac{P + \overline{P}}{2}$ et $R = \dfrac{P - \overline{P}}{2i}$ (formules d'EULER) car $P = Q + iR$ et $\overline{P} = Q - iR$.

Soit $P = Q + iR$ dont toutes les racines sont à partie imaginaire négative qu'on écrit $P = \lambda \prod\limits_{k=1}^{n} (X - z_k)$ (avec des répétitions de racines possibles) et $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = |\lambda| \prod\limits_{k=1}^{n} |z - z_k|$ et $|\overline{P}(z)| = |\overline{\lambda}| \prod\limits_{k=1}^{n} |z - \overline{z_k}|$. Soit un complexe z dont la partie imaginaire est strictement positive. Alors $|\lambda| = |\overline{\lambda}| > 0$ et $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $|z - z_k| \geqslant |z - \overline{z_k}|$ (faire un dessin ; égalité seulement si z_k est réel) donc, par produit $|P(z)| = |\overline{P}(z)|$ si tous les z_k sont réels et $|P(z)| > |\overline{P}(z)|$ dans le cas contraire.

• Si les z_k sont réels, $Q = \mathrm{Re}\,(\lambda) \prod\limits_{k=1}^{n} (X - z_k)$ et $R = \mathrm{Im}(\lambda) \prod\limits_{k=1}^{n} (X - z_k)$: Q, R n'ont que des racines réelles.

• Si au moins un des z_k a une partie imaginaire strictement négative, alors $Q(z) = \dfrac{P(z) + \overline{P}(z)}{2} \neq 0$ et $R(z) = \dfrac{P(z) - \overline{P}(z)}{2i} \neq 0$ (sinon $P(z) = \pm \overline{P}(z)$ donc $|P(z)| = |\overline{P}(z)|$). De même que si z est un complexe de partie imaginaire strictement négative, alors $|P(z)| \leqslant |\overline{P}(z)|$ et, à nouveau : $Q(z) \neq 0$ et $R(z) \neq 0$.

On conclut que toutes les racines de Q et de R sont réelles, ce qui garantit que Q et R sont scindés dans $\mathbb{R}$.

2.253 On trouve $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \dbinom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$.

2.254 Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P(X + a_i) = 0$. En utilisant la formule de TAYLOR, on obtient $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a_i)}{k!} X^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \dfrac{P^{(k)}(a_i)}{k!} \Big) X^k = 0 \iff \forall k \in [\![0; n]\!]$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \dfrac{P^{(k)}(a_i)}{k!} = 0$ (1).

Comme le polynôme P est de degré n, pour chaque entier $k \in [\![0; n]\!]$, le polynôme $P^{(k)}$ est de degré $n - k$; ainsi $(P, P', \cdots, P^{(n)})$ est de degrés échelonnés donc $(P, P', \cdots, P^{(n)})$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Tout polynôme $U \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $U = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k P^{(k)}$ et les relations (1) prouvent donc que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i U(a_i) = 0$ (2).

Pour tout $j \in [\![0; n]\!]$, soit $L_j = \prod\limits_{i \neq j} (X - a_i)$. Alors $L_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(a_j) \neq 0$. En prenant $U = L_j$ dans (2), $\lambda_j L_j(a_j) = 0 \Longrightarrow \lambda_j = 0$. La famille $\big(P(X + a_i)\big)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est donc libre : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.255 Posons $S_0 = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$, $S_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor n-2/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$; ce qui revient à partitionner les termes $\binom{n}{k}$ de la n-ième ligne du triangle de PASCAL selon la congruence modulo 3 de k. Alors, par le binôme de NEWTON, on a $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = S_0 + S_1 + S_2$, $(1+j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k = S_0 + jS_1 + j^2 S_2$ car $j^k = 1 \iff k \equiv 0[3]$, $j^k = j \iff k \equiv 1[3]$ et $j^k = j^2 \iff k \equiv 2[3]$. De plus, on a la relation $(1+j^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k} = S_0 + j^2 S_1 + j^4 S_2 = S_0 + j^2 S_1 + jS_2$ car $j^4 = j$. Par conséquent, puisque $1+j+j^2 = 0$, il vient $S_0 = \dfrac{2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3} = \dfrac{2^n + (-1)^n (j^n + j^{2n})}{3} = \dfrac{2^n + 2(-1)^n \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{3}$.

2.256 Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X - z_k)^n = 0$. Par le binôme de NEWTON, on obtient l'équation $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} z_k^{n-i} X^i = 0$ ce qui donne $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} \Big(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k z_k^{n-i} \Big) X^i = 0$. Ainsi, on obtient $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k z_k^{n-i} = 0$. Ceci peut encore écrire $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j z_j^i = 0 \iff VX = 0$ avec ${}^tX = (\lambda_0 \cdots \lambda_n)$ et $V = (z_j^i)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Mais on connaît le déterminant de cette matrice de VANDERMONDE : $\det(V) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (z_j - z_i) \neq 0$ car les $z_0, \cdots, z_n$ sont des complexes 2 à 2 distincts. Alors $VX = 0$ implique $X = 0$ (en multipliant par V^{-1}) donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi la famille $\big((X - z_k)^n\big)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$ car elle contient $n+1$ de ses vecteurs.

2.257 **a.** Si α est une racine commune de P et Q, alors il existe P_1 et Q_1 dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que $P = (X-\alpha)P_1$ et $Q = (X-\alpha)Q_1$ et on a $Q_1 P - P_1 Q = 0$ donc le couple $(U,V) = (Q_1, -P_1)$ convient.
L'application φ associe à un couple $(U,V) \in (\mathbb{C}_1[X])^2$ le polynôme $UP + VQ$ et, par propriété des degrés, $\deg(UP+VQ) \leqslant \mathrm{Max}(\deg(UP), \deg(VQ)) = \mathrm{Max}(\deg U + \deg P, \deg V + \deg Q) \leqslant 3$ donc φ va bien de $(\mathbb{C}_1[X])^2$ dans $\mathbb{C}_3[X]$, et sa linéarité est claire : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_1[X]^2, \mathbb{C}_3[X])$.
Posons $P = aX^2+bX+c$ et $Q = a'X^2+b'X+c'$, comme $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),(0,1),(0,X))$ est une base de $(\mathbb{C}_1[X])^2$, que $\varphi(1,0) = aX^2+bX+c+$, $\varphi(X,0) = aX^3+bX^2+cX$, $\varphi(0,1) = a'X^2+b'X+c'$ et $\varphi(0,X) = a'X^3+b'X^2+c'X$, en posant $\mathcal{B}_0 = (1,X,X^2,X^3)$ la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} c & 0 & c' & 0 \\ b & c & b' & c' \\ a & b & a' & b' \\ 0 & a & 0 & a' \end{pmatrix}$.
Si P et Q admettent une racine commune, d'après ce qui précède $\exists (U,V) \neq (0,0)$ et $(U,V) \in (\mathbb{C}_1[X])^2$ tel que $\varphi(U,V) = 0$ donc φ n'est pas injective donc pas un isomorphisme. Réciproquement, si P et Q n'admettent aucune racine commune, soit $(U,V) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $UP + VQ = 0$, comme $Q|VQ = -UP$ et que P et Q sont premiers entre eux, on a par le lemme de GAUSS $Q|U$ ce qui montre que $U = 0$ car $\deg(Q) = 2$ et $\deg(U) \leqslant 1$.
De même, $V = 0$ et φ est injective. L'arithmétique des polynômes est hors programme, on fait autrement.
• Si Q admet deux racines complexes distinctes α et β, alors $Q(\alpha) = 0$ et $P(\alpha) \neq 0$ donc $U(\alpha) = 0$ car $U(\alpha)P(\alpha) + V(\alpha)Q(\alpha) = 0$. On obtient de même $U(\beta) = 0$ ce qui fait deux racines distinctes pour $U \in \mathbb{C}_1[X]$: $U = 0$. Ainsi $UP + VQ = VQ = 0$ et $Q \neq 0$, donc $V = 0$ car $\mathbb{C}[X]$ est un anneau intègre ! C'est pas faux !
• Si Q admet une racine double α, comme avant $U(\alpha) = 0$ donc $U = \lambda(X-\alpha)$ et, comme $Q = \mu(X-\alpha)^2$, on simplifie $\lambda(X-\alpha)P + \mu(X-\alpha)^2 V = 0$ pour avoir $\lambda P + \mu(X-\alpha)V = 0$ et $P(\alpha) = 0$ ce qui est absurde.
Ainsi $\varphi(U,V) = 0 \Longrightarrow (U,V) = (0,0)$ donc φ est injective. Comme $\dim\big(\mathbb{C}_1[X]^2\big) = \dim\big(\mathbb{C}_3[X]\big) = 4$:
$\big(P$ et Q ont une racine commune$\big) \iff \big(\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{(0,0)\}\big) \iff \big(\varphi$ n'est pas un isomorphisme$\big) \iff$

A n'est pas inversible $\iff \det(A) = 0 \iff c^2a'^2 + a^2c'^2 + acb'^2 + a'c'b^2 - 2aa'cc' - bca'b' - abb'c' = 0$.

2.258 Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P(X+1)) = \deg(P(X-1)) = \deg(2P) = \deg(P)$ donc $\deg(f(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant n$ car $\deg(f(P)) \leqslant \mathrm{Max}(\deg(P(X+1), \deg(P(X-1), \deg(2P))$ et on a bien $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, la linéarité est facile donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. $f(1) = f(X) = 0$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 2$ et rang $(f) \leqslant n+1-2 = n-1$ d'après la formule du rang. Soit $k \geqslant 2$, alors $f(X^k) = (X+1)^k + (X-1)^k - 2X^k = \sum\limits_{i=0}^{k-2}\left(\binom{k}{i} + (-1)^{k-i}\binom{k}{i}\right)X^i = k(k-1)X^{k-2} + \ldots.$ donc $\deg(f(X^k) = k-2$. Ainsi, comme $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (la base canonique), on a $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2, \cdots, f(X^n)) = \mathrm{Vect}(f(X^2), \cdots, f(X^n))$ qui est de dimension $n-1$ car ces $n-1$ polynômes forment une famille libre puisqu'ils constituent une famille de polynômes de degrés échelonnés. Par conséquent, rang $(f) = n-1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

Le sous-espace $X^2\,\mathbb{R}_{n-2}[X]$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. D'après le théorème du rang, l'endomorphisme f induit un isomorphisme entre $X^2\,\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Ainsi, pour tout polynôme $Q \in \mathrm{Im}\,(f)$, il existe un unique $P \in X^2\,\mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $Q = f(P)$. Or $P \in X^2\,\mathbb{R}_{n-2}[X]$ se traduit par $P(0) = P'(0) = 0$ ce qui emporte le résultat.

2.259 Soit E de dimension p et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Soit x_0 un vecteur de E tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrons que $\mathcal{F} = (x_0, \cdots, u^{n-1}(x_0))$ est libre. Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k u^k(x_0) = 0_E$ $(*)$. Si on avait $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \cdots, 0)$, on pourrait définir $r = \mathrm{Min}(k \in [\![0; n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0)$. En composant la relation $(*)$ par u^{n-1-r}, on aurait $\lambda_r u^{n-1}(x_0) = 0_E$; absurde car $\lambda_r \neq 0$ et $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Ainsi, $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$ et $\mathcal{F}$ est libre. Le cardinal de $\mathcal{F}$ est donc inférieur à la dimension de E : $n \leqslant \dim(E)$. Si $n = \dim(E)$, la famille $\mathcal{F}$ ci-dessus est donc une base de E. Clairement, si $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $P(u) \circ u = u \circ P(u)$ (les puissances de u commutent avec u). Réciproquement, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = u \circ v$. Comme $v(x_0) \in E$, il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1})$ tel que $v(x_0) = a_0x_0 + a_1u(x_0) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(x_0)$. Pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$, en composant cette dernière relation par u^k, on obtient la relation suivante :

$$u^k \circ v(x_0) = v \circ u^k(x_0) = v(u^k(x_0)) = a_0u^k(x_0) + a_1u^{k+1}(x_0) + \cdots + a_{n-1}u^{n+k-1}(x_0).$$

Ceci se traduit par le fait que les endomorphismes v et $w = a_0\mathrm{id}_E + a_1u + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}$ coïncident en tout vecteur de la base $\mathcal{F}$. Par théorème, $v = w = \sum\limits_{k=0}^{n-1}a_ku^k = P(u)$ en posant $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kX^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. On vient donc de montrer $C(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, \cdots, u^{n-1})$ par double inclusion en notant $C(u)$ le commutant de u. Or cette famille $\mathcal{B} = (\mathrm{id}_E, \ldots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ car si $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_ku^k = 0$, en évaluant en x_0, on a $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ car $\mathcal{F}$ est libre.
Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $C(u)$ (qui est aussi une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$) donc $\dim(C(u)) = n$.

2.260 Soit P de degré n supérieur ou égal à 2, alors $P = aX^n + bX^{n-1} + xX^{n-1} + \ldots.$ (dans les pointillés il y a des termes de degré strictement inférieurs à $n-2$) donc $\phi(P) = a((X+1)^n + (X-1)^n - 2X^n) + b((X+1)^{n-1} + (X-1)^{n-1} - 2X^{n-1}) + c((X+1)^{n-2} + (X-1)^{n-2} - 2X^{n-2}) + \ldots$ et il ne reste après calculs que $\phi(P) = 2a\binom{n}{2}X^{n-2}$ donc $\deg(\phi(P)) = \deg(P) - 2$. D'autre part, si $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$, on a $\phi(P) = a(X+1) + b + a(X-1) + b - 2aX - 2b = 0$.

Comme la linéarité de ϕ est claire, $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ et $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{R}_1[X]$ d'après ce qui précède.

Considérons, pour tout entier $n \geqslant 2$, la restriction $\phi_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$. ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et, en lui appliquant le théorème du rang, on a $n+1 = 2+\mathrm{rang}(\phi_n)$ car $\mathsf{Ker}(\phi_n) = \mathsf{Ker}(\phi) = \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi, comme on a l'inclusion $\mathrm{Im}(\phi_n) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$, par égalité des dimensions, on en déduit que $\mathrm{Im}(\phi_n) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Soit maintenant un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on note $p = \deg(Q)$, alors $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ si $n = q+2$ et on a donc $Q \in \mathrm{Im}(\phi_n) \subset \mathrm{Im}(\phi)$. Par conséquent, ϕ est surjectif.

2.261 La matrice nulle vérifie cette propriété et si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont pour sommes communes de leurs rangées s et s' respectivement et si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors la matrice $\alpha A + B$ a la même somme dans toutes ses rangées, et c'est $\alpha s + s'$ clairement donc $\alpha A + B \in \mathcal{M}$. Ainsi $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

Soit $(A, B, C) \in E \times F \times G$ tel que $A + B + C = 0$. En notant J la matrice avec des 1 partout, on a $C = \lambda J$ donc $\mathrm{Tr}\,(C) = n\lambda$. Or $\mathrm{Tr}\,(B) = 0$ car B a des 0 sur sa diagonale. Ainsi $\mathrm{Tr}\,(A+B+C) = n\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ et $C = 0$. Il vient alors $A = -B$ qui est à la fois une matrice symétrique et antisymétrique, ${}^tA = A = -A$ donc $A = B = 0$. Les trois sous-espaces sont donc en somme directe.

Soit $M \in \mathcal{M}$, on pose $D = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $B = \dfrac{M - {}^tM}{2}$, alors D est symétrique, B est antisymétrique et $M = D + B$. On pose $C = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(D)}{n} J$, alors par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}\,(C) = \mathrm{Tr}\,(D)$. On pose enfin $A = D - C$ de sorte que $M = A + B + C$. Il reste à voir que $A \in E$. On a déjà A symétrique car D et J le sont. Enfin, $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(D) - \mathrm{Tr}\,(C) = 0$ et on a bien $A \in E$. On a bien prouvé que $\mathcal{M} = E \oplus F \oplus G$.

2.262 Soit $a \in \mathbb{R}$, posons $R = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(ka)$ et $I = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(ka)$, alors $R + iI = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{ika} = \sum\limits_{k=0}^{n} (e^{ia})^k$.

- Si $a \equiv 0\ [2\pi]$, alors $e^{ia} = 1$ donc $R + iI = n+1$ donc $R = n+1$ et $I = 0$.
- Si $a \not\equiv 0\ [2\pi]$, $e^{ia} \neq 1$ donc $R + iI = \dfrac{e^{i(n+1)a} - 1}{e^{ia} - 1} = \dfrac{e^{\frac{i(n+1)a}{2}}}{e^{\frac{ia}{2}}} \dfrac{e^{\frac{i(n+1)a}{2}} - e^{\frac{-i(n+1)a}{2}}}{e^{\frac{ia}{2}} - e^{\frac{-ia}{2}}} = e^{\frac{ina}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{i(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{ia}{2}\right)}$.

En identifiant, $R = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(ka) = \cos\left(\frac{ina}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{i(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{ia}{2}\right)}$ et $I = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(ka) = \sin\left(\frac{ina}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{i(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{ia}{2}\right)}$.

2.263 On note D_n ce déterminant de taille n. Alors $D_1 = 2\cos(\theta)$ et $D_2 = 4\cos^2(\theta) - 1$. Pour $n \geqslant 1$, en développant D_{n+2} par rapport à la dernière colonne, puis le second déterminant par rapport à la dernière ligne, on obtient $D_{n+2} = 2\cos(\theta) D_{n+1} - D_n$. Cette relation est aussi vraie pour $n = 0$ si on pose $D_0 = 1$. On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $(E_c)\ :\ z^2 - 2\cos(\theta) z + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta)$. On traite alors trois cas :

- Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, 1 est racine double de (E_c) donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathsf{fan} \in \mathbb{N},\ D_n = an + b$ donc, comme $D_0 = 1$ et $D_1 = 2$. $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = n+1$.
- Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, -1 est racine double de (E_c) donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ D_n = (-1)^n(an+b)$ donc, comme $D_0 = 1$ et $D_1 = -2$. $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = (-1)^n(n+1)$.
- Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, les racines de $(-E_c)$ sont classiquement $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = \overline{z_1} = e^{-i\theta}$ donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ D_n = ae^{in\theta} + be^{-in\theta}$ donc, comme $D_0 = a + b = 1$ et $D_1 = ae^{i\theta} + be^{-i\theta} = 2\cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \dfrac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{2i\sin(\theta)} = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

2.264 ($\Longrightarrow$) Soit $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathsf{Ker}(f)$, alors il existe un vecteur $z \in E$ tel que $x = f(z)$ et $f(x) = 0_E$. Ainsi $f(f(z)) = 0_E$ donc $z \in \mathsf{Ker}(f \circ f) = \mathsf{Ker}(f)$ donc $f(z) = x = 0_E$. D'où $\mathrm{Im}(f) \cap \mathsf{Ker}(f) = \{0_E\}$.

($\Longleftarrow$) On a toujours $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ f)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$, alors $f(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ ce qui montre que $f(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et on a la seconde inclusion.

Par double implication, on a établi que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(E)$ par la formule du rang et $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont en somme directe d'après ce qui précède. Ainsi, on peut en déduire d'après le cours que $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

On pose g l'endomorphisme induit par f dans $\mathrm{Im}\,(f)$. Comme on est dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, g est trigonalisable donc il existe une base $\mathcal{B}''$ de $\mathrm{Im}\,(f)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(g) = T$ est triangulaire supérieure. Si on prend une base $\mathcal{B}'$ de $\mathrm{Ker}(f)$ et qu'on les compose pour obtenir une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{p,p} & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & T_{n-p,n-p} \end{pmatrix}$. De plus, comme $\mathrm{Im}\,(f)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$, le théorème du rang nous apprend que g est un automorphisme de $\mathrm{Im}\,(f)$ donc T est aussi inversible.

2.265 $\mathrm{Im}\,(u)$ est toujours stable par u pour un endomorphisme u d'une espace E. En effet, soit $y \in \mathrm{Im}\,(u)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ donc $u(y) = u^2(x) = u(u(x)) \in \mathrm{Im}\,(u)$: $\mathrm{Im}\,(u)$ est bien stable par u.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u)$, $\exists x \in E,\ y = u(x)$ donc $u^2(y) = u^3(x) = -u(x) = -y$ car $u^3 + u = 0$.

Comme $\mathrm{Im}\,(u)$ est stable par u, on peut définir l'endomorphisme v induit par u dans $\mathrm{Im}\,(u)$ (v va donc de $\mathrm{Im}\,(u)$ dans $\mathrm{Im}\,(u)$). D'après le théorème du rang, on sait que u induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans $\mathrm{Im}\,(u)$. Il suffit donc de vérifier que $\mathrm{Im}\,(u)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$. La formule du rang nous dit que $\dim(\mathrm{Im}\,(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E)$. Or si $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}\,(u)$, on a $u(x) = 0_E$ et $\exists z \in E,\ x = u(z)$ donc $x = u(z) = -u^3(z) = -u^2(x) = -u(0_E) = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires et v est bien un automorphisme de $\mathrm{Im}\,(u)$.

D'après le calcul précédent, $v^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,(u)}$. Ainsi, $\det(v^2) = \det(-\mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,(u)}) = (-1)^{\mathrm{rang}\,(u)} = (\det(v))^2$. Comme on est dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\det(v)^2 \geqslant 0$ donc $(-1)^{\mathrm{rang}\,(u)} = 1$ et rang $-$ u) est pair.

2.266 Si $f_1 = 0$ ou $f_2 = 0$ ou $f_3 = 0$, $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 = 0$. Supposons donc maintenant que les trois endomorphismes f_1, f_2, f_3 sont non nuls donc tous les trois nilpotents d'indice 2. Comme ces endomorphismes commutent, on a $f^2 = f_1^2 \circ f_2^2 \circ f_3^2 = 0$ donc f est aussi nilpotent d'indice 1 (donc $f = 0$) ou 2.

Comme $f_1^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(f_1) \subset \mathrm{Ker}(f_1)$ donc $\mathrm{rang}\,(f_1) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f_1))$. De plus $\mathrm{Ker}(f_1) \neq E$ et, par la formule du rang on a $\mathrm{rang}\,(f_1) + \dim(\mathrm{Ker}(f_1)) = 3$, donc forcément $\dim(\mathrm{Ker}(f_1)) = 2$ et $\mathrm{rang}\,(f_1) = 1$. De même, $\mathrm{rang}\,(f_2) = \mathrm{rang}\,(f_3) = 1$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f_1)$, $\mathrm{Ker}(f_2)$ et $\mathrm{Ker}(f_3)$ sont donc des plans.

• Si $\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Ker}(f_3)$, soit un vecteur $x \in E$, alors $f_2 \circ f_3(x) \in \mathrm{Im}\,(f_2) \subset \mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Ker}(f_1)$ donc $f_1 \circ f_2 \circ f_3(x) = 0_E$. On a bien établi dans ce cas que $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = 0$.

• Si les trois plans $\mathrm{Ker}(f_1)$, $\mathrm{Ker}(f_2)$ et $\mathrm{Ker}(f_3)$ ne sont pas égaux, on a par exemple $E = \mathrm{Ker}(f_1) + \mathrm{Ker}(f_2)$. Soit $x \in E$, alors $x = a + b$ avec $f_1(a) = f_2(b) = 0_E$. Ainsi, comme $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, on a $f_1 \circ f_2(x) = 0_E$ car $f_2 \circ f_1(a) = f_1 \circ f_2(b) = 0_E$. On compose par f_3 et on a bien $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = 0$.

2.267 Il est clair que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (la linéarité est classique). Par construction, on a l'inclusion $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}(X, X^2)$. Réciproquement, si $Q = aX + bX^2 \in \mathrm{Vect}(X, X^2)$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$), alors en posant $P = \frac{b}{2}(X-1) - \frac{a}{2}(X-3)$ (interpolation de Lagrange), on a $f(P) = Q$ donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$.

Comme (X, X^2) est libre dans $\mathbb{R}[X]$, $P \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $P(1) = P(3) = 0$ ce qui se traduit par le fait que 1 et 3 sont racines de P ou encore par le fait que $(X-1)(X-3)$ divise P. Par conséquent : $\mathrm{Ker}(f) = (X-1)X-3)\,\mathbb{R}[X]$ (multiples de $(X-1)(X-3)$)).

2.268 Par la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$. De plus, soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0_E$. Ainsi, $f^3(y) - 2af^2(y) + a^2f(y) = 0_E$ donc $a^2x = 0_E$ ce qui implique $x = 0_E$ car $a \neq 0$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe et la formule du rang ci-dessus montre finalement qu'ils sont supplémentaires dans E.

2.269 Comme Tr est une forme linéaire non nulle (car $\mathrm{Tr}\,(I_n) = n \neq 0$), $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$ est un hyperplan de E donc un sous-espace vectoriel de E. Si $n = 1$, $N = \{0\}$ donc N est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Vect}(N) = \{0\}$. Par contre, dès que $n \geqslant 2$, $A = E_{1,2}$ et $B = E_{2,1}$ sont nilpotents alors que $M = A + B$ vérifie $M^2 = E_{1,1} + E_{2,2}$ donc M n'est pas nilpotent. Ainsi, N n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
• Une matrice nilpotente A n'a que 0 comme valeur propre donc, comme elle est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = 0$. Comme la fonction Tr est linéaire, toute matrice M de $\mathrm{Vect}(N)$ a donc une trace nulle, ainsi $\mathrm{Vect}(N) \subset H$.
• Réciproquement, on sait qu'une base de H est la famille $\mathcal{B}$ à $n^2 - 1$ "vecteurs" contenant les $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et les $E_{1,1} - E_{j,j}$ avec $j \in [\![2; n]\!]$. Toutes les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ vérifient $E_{i,j}^2 = 0$ donc $E_{i,j} \in N$. Par exemple pour $j = 2$ et $n = 2$, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec les trois dernières matrices qui sont nilpotentes. Ainsi, en général, toutes les $E_{1,1} - E_{j,j}$ sont dans $\mathrm{Vect}(N)$. Comme $\mathcal{B}$ est incluse dans $\mathrm{Vect}(N)$, par combinaison linéaire, $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = H \subset \mathrm{Vect}(N)$.
En conclusion, on a l'égalité $\mathrm{Vect}(N) = H$.

2.270 **a.** Soit $x \in E$, comme $O_x = \{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ (orbite de x) est fini, l'application $\varphi : \mathbb{N} \to O_x$ telle que $\varphi(m) = u^m(x)$ ne peut pas être injective car $\mathbb{N}$ est infini et O_x est fini par hypothèse. Ainsi, il existe deux entiers naturels $p < q$ tels que $u^p(x) = u^q(x) = u^p(u^{q-p}(x))$. Or u est bijectif, donc u^p aussi d'où $u^{q-p}(x) = x$. En posant $k = q - p \in \mathbb{N}^*$, on a bien $u^k(x) = x$.

b. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour $i \in [\![1; n]\!]$, d'après **a.**, il existe $k_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{k_i}(e_i) = e_i$. Posons $N = \mathrm{ppcm}(k_1, \cdots, k_n)$, alors N est un multiple de k_i, donc $u^N(e_i) = u^{k_i} \circ \cdots \circ u^{k_i}(e_i) = \cdots = e_i$. Comme les endomorphismes u^N et id_E coïncident sur la base $\mathcal{B}$, ils sont égaux donc $u^N = \mathrm{id}_E$.

c. • Le résultat de **a.** n'est plus vérifié si on ne suppose plus u bijectif. En effet, en prenant un projecteur p de E tel que $p \neq \mathrm{id}_E$ (par exemple $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$). Pour tout x de E, on a $O_x = \{p^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x\}$ si $x \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $O_x = \{p^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x, p(x)\}$ sinon mais dans les deux cas $\{p^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Pourtant, si $x \neq 0_E \in \mathrm{Ker}(p)$ (et il existe des vecteurs non nuls dans $\mathrm{Ker}(p)$ par hypothèse), on n'a aucun entier $k \geqslant 1$ tel que $p^k(x) = x$ car $\forall k \geqslant 1,\ p^k(x) = 0_E$. Si p était inversible, comme $p^2 = p$, on aurait $p^{-1} \circ p^2 = p^{-1} \circ p$ donc $p = \mathrm{id}_E$: NON ! Ainsi p n'est pas inversible.
• Le résultat de **b.** n'est plus vérifié si on ne suppose plus u bijectif. En effet, si $u \notin GL(E)$ et si on avait $u^N = \mathrm{id}_E$ avec $N \geqslant 1$, $u \circ u^{N-1} = u^{N-1} \circ u = \mathrm{id}_E$ donc $u^{-1} = u^{N-1}$: NON ! Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $u^N \neq \mathrm{id}_E$.

2.271 Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$ donc α^2 est aussi racine de P. Par récurrence, on montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est racine de P. Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \notin \mathbb{U}$, la suite $\left(|\alpha|^{2^n}\right)_{n \geqslant 0}$ contient une infinité de valeurs donc $\left(\alpha^{2^n}\right)_{n \geqslant 0}$ aussi. P possède donc une infinité de racines et ce ne peut donc être que $P = 0$. Nous venons d'établir que si $P \neq 0$, alors une racine de P est donc nulle ou de module 1.

Dorénavant $P \neq 0$ et $P(X^2) = P(X)P(X+1)$; si α est racine de P, comme $P((\alpha-1)^2) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$, $(\alpha-1)^2$ est aussi racine de P : on en déduit que $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha-1| = 1$. Si $|\alpha| = |\alpha-1| = 1$, on a $\alpha = -j$ ou $\alpha = -j^2$ (faire un dessin pour visualiser l'intersection des deux cercles d'équation $|z| = 1$ et $|z-1| = 1$). Mais si $\alpha = -j$, alors $(-j-1)^2 = j$ est aussi racine de P ce qui est faux. De même $-j^2$ ne peut pas être racine de P. Il ne reste donc que $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ comme racine possible de P. Comme $P(X^2) = P(X)P(X+1)$, le coefficient dominant λ de P vérifie $\lambda^2 = \lambda$ donc $\lambda = 1$. Ainsi, il existe deux entiers n et m tels que $P = X^n(X-1)^m$. $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ devient maintenant $X^{2n}(X^2-1)^m = X^n(X-1)^m(X+1)^nX^m$ c'est-à-dire $X^{2n}(X-1)^m(X+1)^m = X^{n+m}(X-1)^m(X+1)^n$ donc $n = m$ par unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles.
Vérifions que si $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n(X-1)^n$ est solution : on a bien $X^{2n}(X^2-1)^n = X^n(X-1)^n(X+1)^n(X+1-1)^n$.
Les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ sont $P = 0$ et les $P_n = X^n(X-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2.272 **a.** Il est clair que $\mathrm{Ker}(M) \subset \mathrm{Ker}({}^tMM)$. Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}({}^tMM)$, alors ${}^tMMX = 0$ donc ${}^tX{}^tMMX = ||MX||^2 = 0$ donc $MX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(M)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}({}^tMM) \subset \mathrm{Ker}(M)$. Par double inclusion, on a bien $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}({}^tMM)$.
b. Comme les r colonnes de A forment une famille libre car A est inversible, les r premières colonnes de M forment aussi une famille libre donc le rang de M, étant égal au nombre maximal de ses colonnes formant une famille libre, vérifie bien $\mathrm{rang}\,(M) \geqslant r$.
c. Méthode 1 : Supposons $\mathrm{rang}\,(M) = r$. Soit $Y \in \mathbb{R}^{n-r}$. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R}^r \to \mathrm{Im}\,(M)$ définie par $\varphi(X) = M\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$. φ est linéaire et si $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $AX = 0$, $CX = 0$ donc $X = 0$ car A est inversible. Ainsi, φ est injective donc c'est un isomorphisme car $\dim(\mathrm{Im}\,(M)) = r = \dim(\mathbb{R}^r)$. Ainsi, comme $M\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\,(M)$, il existe $X \in \mathbb{R}^r$ tel que $M\begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix} = \varphi(X) = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}$. Alors $BY = AX \Longleftrightarrow X = A^{-1}BY$ puis $DY = CX = CA^{-1}BY$. Comme cette relation $(D - CA^{-1}B)Y = 0$ est vraie pour tout vecteur colonne $Y \in \mathbb{R}^{n-r}$, on en déduit que $D = CA^{-1}B$.
Réciproquement, si $D = CA^{-1}B$, pour $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ($X \in \mathbb{R}^r$, $Y \in \mathbb{R}^{n-r}$), on a $MZ = \begin{pmatrix} AX+BY \\ CA^{-1}(AX+BY) \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Im}\,(M) \subset F = \left\{ \begin{pmatrix} V \\ CA^{-1}V \end{pmatrix} \;\middle|\; V \in \mathbb{R}^r \right\}$. Mais, l'application $\psi : \mathbb{R}^r \to F$ définie par $\psi(V) = \begin{pmatrix} V \\ CA^{-1}V \end{pmatrix}$ est clairement linéaire et bijective donc $\dim(F) = r$.
Ainsi, $\mathrm{rang}\,(M) \leqslant r$ ce qui prouve que $\mathrm{rang}\,(M) = r$ d'après la question **b.**.
Méthode 2 : Comme les matrices $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ sont inversibles et que l'on a $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$, on a classiquement par blocs $\mathrm{rang}\,(M) = r + \mathrm{rang}\,(D - CA^{-1}B)$ ce qui justifie directement que $\mathrm{rang}\,(M) = r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

2.273 **a.** f va de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans E et elle est linéaire par linéarité de la trace : f est un endomorphisme de E.
Si $f(M) = 0$, alors $M = -\mathrm{Tr}\,(M)A$ or $f(A) = (\mathrm{Tr}\,(A)+1)A$ donc $f(M) = -(\mathrm{Tr}\,(A)+1)\mathrm{Tr}\,(M)A = 0$ implique $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$ car $A \neq 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A) + 1 \neq 0$. Ainsi, $M = 0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$ ce qui fait de f un endomorphisme injectif donc un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dimension finie).
b. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $f(M) = 0$, alors $M = -\mathrm{Tr}\,(M)A \in \mathrm{Vect}(A)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Vect}(A)$. Comme $f(A) = (\mathrm{Tr}\,(A)+1)A = 0$, $A \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, $\mathrm{rang}\,(f) = n^2 - 1$ par la formule du rang. Or, si $N \in \mathrm{Im}\,(f)$, il existe $M \in E$ telle que $N = f(M) = M + \mathrm{Tr}\,(M)A$, par conséquent $\mathrm{Tr}\,(N) = \mathrm{Tr}\,(M) + \mathrm{Tr}\,(M)\mathrm{Tr}\,(A) = (1+\mathrm{Tr}\,(A))\mathrm{Tr}\,(M) = 0$: $\mathrm{Im}\,(f) \subset \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$.
Or Tr est une forme linéaire non nulle sur E, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,)$ est un hyperplan de E : $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}\,))$.

Par inclusion et égalité des dimensions, on a bien $\mathrm{Im}\,(f) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(M) = 0\}$.
c. On traite donc deux cas :
• Si $\mathrm{Tr}\,(A) \neq -1$, $M + \mathrm{Tr}\,(M)A = B \iff f(M) = B \iff M = f^{-1}(B)$ donc il existe une unique solution M de cette équation. Or $\mathrm{Tr}\,(M) + \mathrm{Tr}\,(M)\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,(B)$ donc $\mathrm{Tr}\,(M) = \dfrac{\mathrm{Tr}\,(B)}{1+\mathrm{Tr}\,(A)}$ et l'unique solution est donc la matrice $M = B - \mathrm{Tr}\,(M)A = B - \dfrac{\mathrm{Tr}\,(B)}{1+\mathrm{Tr}\,(A)}A$. Au passage, on a montré que $f^{-1} : M \mapsto M - \dfrac{\mathrm{Tr}\,(M)}{1+\mathrm{Tr}\,(A)}A$.
• Si $\mathrm{Tr}\,(A) = -1$, il y a à nouveau deux cas :
  • Si $\mathrm{Tr}\,(B) \neq 0$, il n'y a aucune solution de $M + \mathrm{Tr}\,(M)A = f(M) = B$ car $B \notin \mathrm{Im}\,(f)$ d'après **b.**.
  • Si $\mathrm{Tr}\,(B) = 0$, comme $M = B$ est clairement solution, $M+\mathrm{Tr}\,(M)A = f(M) = B \iff f(M) = f(B)$ donc $f(M) = B \iff M - B \in \mathrm{Ker}(f) \iff M - B \in \mathrm{Vect}(A)$ d'après **b.** donc les solutions de $M+\mathrm{Tr}\,(M)A = B$ sont les matrices de la forme $B + \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.274 Posons $E = \Big\{k \in \mathbb{N} \mid \exists (A,B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{K}),\ M = AB\Big\}$.
Cet ensemble est inclus dans $\mathbb{N}$ et il est non vide car $M = I_pM = MI_q$ donc $(p,q) \in E^2$.
Il possède donc un minimum qu'on note s et on pose $r = \mathrm{rang}\,(M)$. On sait que $r \leqslant p$ et $r \leqslant q$.
Si $k \in E$, $\exists (A,B) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{k,q}(\mathbb{K})$ tel que $M = AB$ or $\mathrm{rang}\,(AB) \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \Longrightarrow r \leqslant \mathrm{Min}(p,k) \leqslant k$.
Ainsi, tous les éléments de E sont supérieurs à r ce qui prouve que $s \geqslant r$.
On sait que M est équivalente (hors programme) à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}p, q(\mathbb{K})$ d'où l'existence de deux matrices inversibles $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_q(\mathbb{K})$ telles que $M = PJ_rQ^{-1}$. Avec $U = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ et $V = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, on a $M = AB$ avec $A = PU \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ et $B = VQ^{-1} \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ car $UV = J_r$.
Ainsi $r \in E$ donc $s \leqslant r$. Au final : $s = \mathrm{rang}\,(M) = r$.

2.275 **a.** Comme $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, on peut écrire $P = a_1X + \cdots + a_pX^p$ de degré $p \geqslant 1$ tel que $a_1 = P'(0) \neq 0$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$, on a donc $f(x) = 0_E$ et $\exists y \in E$, $x = f(y)$. Ainsi $f^2(y) = 0_E$. Par hypothèse, $P(f) = a_1f + \cdots + a_pf^p = 0$ qu'on applique en y pour avoir $0_E = a_1f(y)$ puisque $\forall k \geqslant 2$, $f^k(y) = 0_E$. Ainsi, comme $a_1 \neq 0$, on a $f(y) = x = 0_E$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont donc en somme directe. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(E)$ par la formule du rang (voilà l'apport de la dimension finie), on conclut que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E si E est de dimension finie.

b. Avec les mêmes notations et le même raisonnement, on sait déjà que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe.
Soit $x \in E$, alors $P(f)(x) = 0_E$ donc $a_1f(x) + \cdots + a_pf^p(x) = f(a_1x + a_2f(x) + \cdots + a_pf^{p-1}(x)) = 0_E$ ce qui prouve que $a_1x+a_2f(x)+\cdots+a_pf^{p-1}(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $a_1 \neq 0$, $y = x+\frac{a_2}{a_1}f(x)+\cdots+\frac{a_p}{a_1}f^{p-1}(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
Mais $z = -\frac{a_2}{a_1}f(x) - \cdots - \frac{a_p}{a_1}f^{p-1}(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ car $z = f\Big(-\frac{a_2}{a_1}x - \cdots - \frac{a_p}{a_1}f^{p-2}(x)\Big)$ et on a $x = y + z$. On vient d'établir que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}\,(f)$.

Même en dimension infinie, avec les conditions de l'énoncé, $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E.

2.276 **a.** ($\Longleftarrow$) Soit $x \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$, alors il existe un vecteur $z \in E$ tel que $x = f(z)$ et $f(x) = 0_E$. Ainsi $f(f(z)) = 0_E$ donc $z \in \mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(z) = x = 0_E$. D'où $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
($\Longrightarrow$) On a toujours $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ f)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$, alors $f(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ ce qui montre que $f(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et on a la seconde inclusion.
Par double implication, on a établi que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
b. C'est du cours sur les projecteurs. Si $f^2 = f$, pour un vecteur $x \in E$, on a $x = x - f(x) + f(x)$ avec $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ car $f = f^2$ et $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}\,(f)$. De plus, $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ d'après la question **a.**. On a bien $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$.

2.277 **a.** $(I_n+M)(M^2-M^3)=M^2+M^3-M^3-M^4=M^2-M^4=0$. Ainsi, si I_n+M est inversible, on multiplie cette relation à gauche par $(I_n+M)^{-1}$ et on trouve $M^2-M^3=0$ donc $M^2=M^3$.

b. Par calculs, on trouve $-X^3+X^2=(-X^2+2X-2)(X+1)+2$ et, en divisant cette relation par 2, on obtient $(-X^3+X^2)U+(X+1)V=1$ avec $U=\dfrac{1}{2}$ et $V=\dfrac{X^2-2X+2}{2}$.

c. Supposons que $M^2=M^3$, alors en remplaçant X par M ci-dessus, on a $(I_n+M)\Big(\dfrac{M^2-2M+2I_n}{2}\Big)=I_n$ donc I_n+M est inversible et $(I_n+M)^{-1}=\dfrac{M^2-2M+2I_n}{2}$.

2.278 **a.** G est une droite (engendrée par un seul vecteur non nul) et F est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ donc F est un hyperplan de $\mathbb{C}^n$. F et G sont donc des sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ et $\dim(F)+\dim(G)=n$. Or si $x=(x_1,\cdots,x_n)\in F\cap G$, alors $x=1=\cdots=x_n$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k=0$ donc $x=0$. Ainsi, $F\cap G=\{0\}$ et on sait que ceci implique dans notre cas que $\mathbb{C}^n=F\oplus G$.

b. On note p la projection sur F parallèlement à G et $q=\mathrm{id}_E-p$ la projection sur G parallèlement à F. Soit $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$, on l'écrit (à faire par analyse/synthèse) $x=\dfrac{1}{n}(s,\cdots,s)+\Big(x_1-\dfrac{s}{n},\cdots,x_n-\dfrac{s}{n}\Big)$ avec $\dfrac{1}{n}(s,\cdots,s)\in G$ et $\Big(x_1-\dfrac{s}{n},\cdots,x_n-\dfrac{s}{n}\Big)\in F$ si $s=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Ainsi, par définition d'une projection, on a $p(x)=\Big(x_1-\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n},\cdots,x_n-\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\Big)$ et $q(x)=\dfrac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n,\cdots,x_1+\cdots+x_n)$.