DEVOIR MAISON 5 : DUHAMEL-RAABE

PSI 1 2024/2025 **pour le jeudi 07 novembre 2024**

PARTIE 1 : LA RÈGLE DE DUHAMEL-RAABE

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel* λ *vérifiant :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1 Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

2 Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{=} \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où vous déterminerez μ.

3 Cas $\lambda > 1$ que l'on suppose dans les trois prochaines questions. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

3.1 Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geqslant N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

3.2 Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geqslant N$, on ait $u_n \leqslant K v_n$.

3.3 Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

4 On suppose que $0 \leqslant \lambda < 1$. Démontrer comme précédemment que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

PARTIE 2 : APPLICATIONS

1 Pour $n \geqslant 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n \ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 2} x_n$ et $\sum_{n\geqslant 2} y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Duhamel-Raabe.

Pour tout entier $n \geqslant 2$*, on pose*

$$w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$*, on pose (en cas de convergence de l'intégrale)*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}.$$

2 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} w_n$.

3 Étude de $\sum_{n\geqslant 1} I_n$

3.1 Montrer que I_n est bien définie pour tout entier $n \geqslant 1$.

3.2 Établir que $\forall n \geqslant 1,\ I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

3.3 En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} I_n$.