DEVOIR MAISON 4:MINES PSI 2015 MATHS1

PSI 1 2024/2025 **pour le mardi 05 novembre 2024**

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On définit aussi l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 : $\mathcal{P} = \{(p_n)_{n\geqslant 0} \mid \forall n \geqslant 0,\ p_n \geqslant 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1\}$.

Pour $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$, *on définit* $\mathrm{dist}(P, Q) = \operatorname*{Sup}_{A\subset\mathbb{N}} \left| \sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n \right| = \operatorname*{Sup}_{A\subset\mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(n)p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(n)q_n \right|$ *où* $\mathbf{1}_A(n) = 1$ *si* $n \in A$ *et* $\mathbf{1}_A(n) = 0$ *sinon. On pourra écrire* $P(A)$ *pour* $\sum_{n\in A} p_n$.

Dans tout ce qui suit, on fixe un réel strictement positif λ *et une fonction* h *de* $\mathcal{F}$.

PARTIE 1 : PRÉLIMINAIRES

1 Trouver le réel c tel que la suite $\left(c\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ appartienne à $\mathcal{P}$.

2 Soit p, q deux réels de $[0; 1]$. Calculer $\mathrm{dist}\big((1-p, p, 0, \ldots), (1-q, q, 0, \ldots)\big)$.

3 Soit $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)p_n$ est convergente.

PARTIE 2 : CARACTÉRISATION

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)})_{n\geqslant 0} \in \mathcal{P}$ *défini par* $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.

4 Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} nf(n)p_n^{(\lambda)}$ est convergente.

5 Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante : $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)}$ (1).

Soit $Q = (q_n)_{n\geqslant 0}$ *un élément de* $\mathcal{P}$ *tel que pour tout* $f \in \mathcal{F}$, *on ait l'identité :* $\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)q_n$.

6 En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = P_\lambda$.

PARTIE 3 : RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE STEIN

On note $\mathcal{S}_h$ *l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que, pour tout entier* $n \geqslant 0$, *l'identité suivante soit satisfaite :* $\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$ (2).

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ *la fonction définie pour tout* $n \geqslant 0$ *par* $\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$.

7 Montrer que $\mathcal{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que : $\forall f \in \mathcal{S}_h,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}$ (3).

8 Pour $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$, établir l'identité suivante : $f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}$ (4).

9 En déduire que toute fonction de $\mathcal{S}_h$ est bornée.

PARTIE 4 : PROPRIÉTÉ DE LIPSCHITZ

Pour une fonction f *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on considère* $\Delta f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$.
On veut montrer que pour $f \in \mathcal{S}_h$, *on a* $\operatorname*{Sup}_{n \geqslant 1} |\Delta f(n)| \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} h(k)\right)$ (5).

Pour $m \geqslant 0$, *on considère d'abord le cas particulier où* $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$: $h(m) = 1$ *et* $h(n) = 0$ *si* $n \neq m$.
On note f_m *l'un des éléments de* $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10 Établir, pour $1 \leqslant n \leqslant m$, l'identité suivante : $f_m(n) = -\dfrac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$.

11 Établir une identité analogue pour $n > m$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

12 Montrer que Δf_m est négative sur $\mathbb{N} \setminus \{0, m\}$. *Indication* : on distinguera les cas $1 \leqslant n < m$ et $n > m$.

13 Établir $\Delta f_0(0) = \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} - f_0(0)$ et $\Delta f_m(m) = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$ pour $m > 0$.

14 En déduire que $\operatorname*{Sup}_{n\geqslant 1} \Delta f_m(n) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ *par* $h_+(n) = h(n) - \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} h(k)$.

15 Montrer que $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}$.

16 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{m\geqslant 0} h_+(m) f_m(n)$ est convergente pour tout entier $n \geqslant 1$.

17 Montrer que la fonction f définie pour tout $n \geqslant 1$ par $f(n) = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m(n)$ appartient à $\mathcal{S}_h$.

18 En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $f(n+1) - f(n) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} h(k)\right)$.

En utilisant $-f$ *et* $h_- = \operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} h(k) - h$, *on prouverait de façon analogue que pour tout entier* $n \geqslant 1$, *on a* $-(f(n+1) - f(n)) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\operatorname*{Sup}_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \operatorname*{Inf}_{k\in\mathbb{N}} h(k)\right)$ *et qu'ainsi l'inégalité* (5) *est vraie dans le cas général.*

PARTIE 5 : APPLICATION PROBABILISTE

Soit $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que pour tout entier* $k \in [\![1;n]\!]$, X_k *suit une loi de* Bernoulli *de paramètre* $r_k \in]0,1]$: $\mathbb{P}(X_k = 1) = r_k = 1 - \mathbb{P}(X_k = 0)$.
On pose $\lambda = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k$ *ainsi que* $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ *et, pour tout* $k \in [\![1;n]\!]$, $W_k = S - X_k$.
On identifie la loi de la variable aléatoire S *et l'élément* $(\mathbb{P}(S = k))_{k\geqslant 0}$ *de l'ensemble* $\mathcal{P}$.

19 Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, pour tout $f \in \mathcal{F}$, montrer que $X_k f(S) = X_k f(W_k + 1)$ et que $\mathbb{E}(f(W_k)X_k) = r_k\,\mathbb{E}(f(W_k))$.

20 Soit $h \in \mathcal{F}$ et $f \in \mathcal{S}_h$, établir l'identité suivante : $\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - S f(S)) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k\,\mathbb{E}\left(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\right)$.

21 Établir que $\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) = \operatorname*{Sup}_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S))|$ où f_A est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$.

22 En déduire que $\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) \leqslant \dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k^2$.