DEVOIR 07 : SÉRIES VECTORIELLES

PSI 1 2024-2025 **mardi 15 octobre 2024**

QCM

1 *Polynômes d'endom. : soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $R = X^2+1$ *et* $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$

1.1 $P(f+g) = P(f) + P(g)$

1.2 $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$

1.3 $R(f) = f^2 + 1$

1.4 $(PQ)(f) = Q(f) \circ P(f)$

2 *Polynômes de matrices : soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$

2.1 $(P(A) = 0 \text{ ou } Q(A) = 0) \Longrightarrow (PQ)(A) = 0$

2.2 $(PQ)(A) = 0 \Longrightarrow (P(A) = 0 \text{ ou } Q(A) = 0)$

2.3 $(P(A) = 0 \text{ et } P(0) \neq 0) \Longrightarrow (\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ A^{-1} = Q(A))$

2.4 $\exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\},\ P(A) = 0$

3 *Série : soit deux suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(CV pour converge et DV pour diverge)*

3.1 $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ CV}\right) \Longleftarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n) \text{ CV}\right)$

3.2 $\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ DV}\right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n) \text{ DV}\right)$

3.3 $\sum_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n) \text{ CV} \Longleftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV}$

3.4 $\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ CV} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4 *Série : soit une série réelle* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *convergente*

4.1 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4.2 $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

4.3 $\sum_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge

4.4 $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right) = 0$

Énoncé Énoncer le théorème de dualité suites-séries.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $b_1, \cdots, b_n$ des scalaires. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ (à exprimer en fonction de $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$) tel que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(a_k) = b_k$.

Exercice 1 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et le réel $D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$. En utilisant les propriétés du déterminant, exprimer D en fonction de $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$. En déduire une expression factorisée de D.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Par comparaison série intégrale, montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

b. Montrer, de plus, qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} \left(u_n - 2\sqrt{n}\right) = \ell$, c'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{=} 2\sqrt{n} + \ell + o(1)$.

DEVOIR 07 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 07	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X		X	
2	X		X	X	
3			X		
4	X		X	X	

1.1 Faux : par exemple avec $P = 1$, $id_E \neq 2\,id_E$ **1.2** Vrai : du cours **1.3** Faux : f^2+1 n'a aucun sens, $R(f) = f^2 + id_E$ **1.4** Vrai : $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$ et $P(f)$ et $Q(f)$ commutent.
2.1 Vrai : car $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$ **2.2** Faux : Si $A = E_{1,1}$, on a $A^2 - A = 0$ alors que $A \neq 0$ et $A - I_n \neq 0$
2.3 Vrai : vu en cours **2.4** Vrai : la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n^2})$ est liée donc il existe au moins un polynôme non nul dans $\mathbb{K}_{n^2}[X]$ annulateur de A.
3.1 Faux : $u_n = -v_n = \dfrac{1}{n}$ **3.2** Faux : même exemple **3.3** Vrai : télescopage **3.4** Faux : $u_n = \dfrac{1}{n}$.
4.1 Vrai : cours **4.2** Faux : $u_n = \dfrac{1}{n}$ si n est un carré et $u_n = 0$ sinon **4.3** Vrai : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **4.4** Vrai : le reste d'une série convergente tend vers 0.

Énoncé Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe : $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge$\big) \iff \big(\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge$\big)$.

Preuve Posons $P = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{X-a_i}{a_k-a_i}$. Comme $\deg\Big(\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{X-a_i}{a_k-a_i}\Big) = n-1$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, et que P ainsi défini est une combinaison linéaire de ces polynômes, on sait que $\deg(P) \leqslant n-1$. De plus, en substituant X par $a_1, \cdots, a_n$, on vérifie facilement que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(a_k) = b_k$: voilà pour l'existence !

Si un autre $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifie $\forall k \in [\![1;n]\!],\ Q(a_k) = b_k$, posons $U = P - Q$ de sorte que $U \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ U(a_k) = b_k$. Comme U admet n racines distinctes et que $\deg(U) \leqslant n-1$, on peut conclure que $U = 0$, d'où $P = Q$ ce qui assure l'unicité recherchée.

Exercice 1 Notons A la colonne contenant dans l'ordre a, a^2, a^3. Les colonnes B, C sont définies de même.
Alors $D = \det(B+C, A+C, A+B) = \det(B,A,A) + \cdots + \det(C,C,B)$ (8 termes) en utilisant la multilinéarité.
Mais par alternance (deux fois la même colonne : déterminant nul) : $D = \det(B,C,A) + \det(C,A,B)$.
Par antisymétrie, $\det(B,C,A) = -\det(A,C,B) = \det(C,A,B)$ (2 échanges de colonnes et $(-1)^2 = 1$) : $D = 2\Delta$.
En factorisant par a dans la colonne A, etc... et d'après VANDERMONDE, $D = 2abc(c-a)(c-b)(b-a)$.

Exercice 2 **a.** La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante et continue sur $]0;+\infty[$, et elle est intégrable sur $]0;1]$ donc pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Pour $n \geqslant 1$, on somme ces inégalités pour $k \in [\![1;n]\!]$ et on a, par CHASLES, $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant u_n \leqslant \int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Ainsi $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n}$.
Comme $2\sqrt{n+1} - 2 \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$, par encadrement, il vient $u_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
b. On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$. Alors $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ (en multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$). Ainsi $v_{n+1} - v_n = \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$ ce qui donne par la même astuce $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2}$. Ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{4n^{3/2}}$ (on pouvait bien sûr le montrer par les développements limités) et, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1} - v_n)$ converge absolument donc converge. Par dualité suite/série, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi.