CHAPITRE 4
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

⊙ L'analyse fonctionnelle linéaire, en tant que théorie générale, s'est créée au début du XX^{e} siècle, autour des problèmes posés par les équations intégrales. Entre 1904 et 1906, DAVID HILBERT est amené à étudier des développements en séries de fonctions orthogonales, ainsi que des formes quadratiques à une infinité de variables. À sa suite, FRIGYES RIESZ et ERNST FISCHER étudient les fonctions de carré intégrable et la convergence en moyenne quadratique, puis RIESZ introduit les espaces L^p pour $1 < p < +\infty$ et la moyenne d'ordre p. Toutefois, ce n'est que vers 1920 que la notion d'espace normé abstrait est dégagée, principalement par STEFAN BANACH, et ce n'est qu'en 1929-1930 que JOHN VON NEUMANN propose une présentation axiomatique des espaces de HILBERT. BANACH, dans sa thèse de 1920 intitulée“Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, écrit : “L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.”

Par la suite, les espaces vectoriels normés ont été étudiés de manière autonome, notamment du point de vue de leur géométrie. Parallèlement, l'obligation, en théorie des équations aux dérivées partielles par exemple, de considérer des espaces de fonctions dont la topologie n'est pas déduite d'une norme a motivé l'introduction d'une structure plus générale: celle d'espace vectoriel topologique. Toutefois, en raison de la spécificité des problèmes et des méthodes, les espaces vectoriels normés ne doivent pas être considérés comme de simples cas particuliers d'espaces vectoriels topologiques. De plus, les espaces vectoriels topologiques les plus importants peuvent être construits en un certain sens à l'aide d'espaces vectoriels normés, et bénéficient donc pour leur étude des propriétés de ces derniers. En retour, les espaces vectoriels topologiques interviennent dans l'étude des espaces normés, notamment pour tout ce qui concerne les convergences faibles.

Dans la seconde moitié du XX^{e} siècle, l'évolution de la théorie est considérable, particulièrement en ce qui concerne la géométrie des espaces de BANACH et ses liens avec les ensembles d'opérateurs que l'on peut définir entre les espaces étudiés.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

Cette section (avec l'autre partie de ce cours) vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.

Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

1 : Normes

Contenus	Capacités & Commentaires
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.	Normes usuelles $\|\| \|\|_1$, $\|\| \|\|_2$ et $\|\| \|\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
Espace vectoriel normé.	Norme $\|\| \|\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs
Norme associée à un produit scalaire sur	dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\mathsf{Sup}(kA) = k\,\mathsf{Sup}(A)$ pour A partie non
un espace préhilbertien réel.	vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme.	
Boule ouverte, boule fermée, sphère.	
Partie convexe.	Convexité des boules.
Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	

2 : Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Contenus	Capacités & Commentaires
Convergence et divergence d'une suite.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
Unicité de la limite. Opérations sur les limites.	
Une suite convergente est bornée.	
Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	

3 : Comparaison des normes

Contenus	Capacités & Commentaires
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.
	Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
	La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme.
	On se limite en pratique à des exemples élémentaires.

4 : Espaces vectoriels normés de dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme.
	La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

PARTIE 4.1 : NORMES

⊙ La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

4.1.1 : Définitions et exemples

REMARQUE 4.1 : Dans chaque espace vectoriel, on a besoin d'outils pour évaluer la "taille" d'un vecteur. En effet dans $\mathbb{R}$ nous avons la valeur absolue, dans $\mathbb{C}$ le module ou même la norme euclidienne habituelle dans le plan et dans l'espace usuels. Généralisons les propriétés de ces notions.

DÉFINITION 4.1 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **norme** *sur E est une application N définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois axiomes suivants :*

(C_1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ *(axiome de séparation),*

(C_2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x)$ *(homogénéité),*

(C_3) $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Un **espace vectoriel normé** *est un espace vectoriel E muni d'une norme.*

REMARQUE 4.2 : • $N(0_E) = N(0.x) = 0$ *donc il y a équivalence dans l'axiome de séparation.*

• *L'inégalité triangulaire permet aussi de minorer :* $\forall (x,y) \in E^2,\ |N(x)-N(y)| \leqslant N(x-y) \leqslant N(x)+N(y)$.

• *En général :* $\forall n \geqslant 1,\ \forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n,\ N\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| N(x_k)$.

• *Tout sous-espace F d'un espace vectoriel normé E en est aussi un pour la* **norme induite** $N_F : F \to \mathbb{R}_+$ *qui est définie comme toute* **application induite** *par $N_F(x) = N(x)$ seulement si $x \in F$.*

REMARQUE 4.3 : Soit (E, N) un espace vectoriel normé. L'application $d : (x,y) \in E^2 \mapsto N(y-x)$ est la **distance** *sr E associée à la norme N. Elle est une distance parce que c'est une application de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ telle que :*

(C_1) $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$ *(séparation),*

(C_2) $\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie),*

(C_3) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ *(inégalité triangulaire).*

DÉFINITION 4.2 :
Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ *: soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$; on définit trois normes sur $\mathbb{K}^n$ en posant :*

• $||x||_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$ • $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ *(la norme euclidienne canonique)* • $||x||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|$.

REMARQUE 4.4 : Soit un espace euclidien E (ou même plus généralement d'un espace préhilbertien réel) avec un produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$, l'application $||\,.\,|| : E \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme qu'on appelle la **norme euclidienne associée à ce produit scalaire**.

EXEMPLE 4.1 : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, on peut définir (associées à $\mathcal{B}$) trois normes en posant, pour tout vecteur $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$:

$$N_1(x) = ||(x_1, \cdots, x_n)||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ N_2(x) = ||(x_1, \ldots, x_n)||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \text{ et } N_\infty(x) = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|.$$

PROPOSITION D'HOMOGÉNÉITÉ DES BORNES SUPÉRIEURES 4.1 :
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide majorée et $k \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{Sup}(kA) = k\,\mathrm{Sup}(A)$.

REMARQUE 4.5 : Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et non majorée, on a encore $\mathrm{Sup}(kA) = k\,\mathrm{Sup}(A)$.

DÉFINITION 4.3 :
Normes usuelles sur les espaces de fonctions *: soit I un "vrai" intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$:*
- $||f||_1 = \int_I |f(t)|dt$ *(***norme de la convergence en moyenne***) sur* $L^1(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$.
- $||f||_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}$ *(***norme de la conv. en moyenne quadratique***) sur* $L^2(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$.
- $||f||_\infty = \underset{x \in I}{\mathrm{Sup}}\,|f(x)|$ *(***norme de la convergence uniforme***) sur* $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ *(fonctions bornées).*

REMARQUE 4.6 : Exemples de normes sur les polynômes :
- *Si* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$*, on pose* $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $N_2(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2}$ *et* $N_\infty(P) = \underset{0 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |a_k|$.
- *Si* $P \in \mathbb{K}[X]$*, on pose* $||P||_1 = \int_0^1 |P(t)|dt$, $||P||_2 = \sqrt{\int_0^1 |P(t)|^2 dt}$ *et* $||P||_\infty = \underset{t \in [0;1]}{\mathrm{Sup}} |P(t)|$.

EXEMPLE 4.2 : Vérifier que $||P|| = \underset{t \in [0;1]}{\mathrm{Max}} |P(t) - P'(t)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

REMARQUE 4.7 : Exemples de normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a les trois normes :

$$||A||_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|,\ ||A||_2 = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}\left({}^t\overline{A}A\right)} \text{ et } ||A||_\infty = \underset{1 \leqslant i,j \leqslant n}{\mathrm{Max}} |a_{i,j}|.$$

EXERCICE CLASSIQUE 4.3 : Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||A||_s = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

a. Montrer que $||\,.\,||_s$ est une norme d'algèbre : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $||AB||_s \leqslant ||A||_s\,||B||_s$.
b. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant ||A||_s$.
c. Est-ce une norme euclidienne ?

REMARQUE 4.8 : Exemples de normes sur des espaces de suites :
- *sur* $\ell^\infty(\mathbb{K})$*, ensemble des suites bornées :* $||(u_n)||_\infty = \underset{n \in \mathbb{N}}{\mathrm{Sup}} |u_n|$.
- *sur* $\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\right\}$ *(suites sommables) :* $||(u_n)||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
- *sur* $\ell^2(\mathbb{K}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\right\}$ *(suites de carré sommable) :* $||(u_n)||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$.

EN PRATIQUE : Si on a un espace E et une application $N : E \to \mathbb{R}_+$, pour montrer que N est une norme :
- *On revient à la définition en montrant la séparation, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Pour la séparation, les mêmes arguments reviennent toujours :*
  - *- la somme (ou maximum) de réels positifs est nul si et seulement s'ils sont tous nuls.*
  - *- un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ ayant au moins $n+1$ racines distinctes est nul.*
  - *- une fonction f continue sur I non réduit à un point telle que $\int_I |f| = 0$ est nulle.*
- *On reconnaît N comme la norme induite sur E d'une norme connue.*
- *On trouve un produit scalaire sur E tel que N soit la norme euclidienne associée.*

4.1.2 : Boules, parties bornées et convexes

DÉFINITION 4.4 :
Soit $(E, ||\,.\,||)$ *un espace vectoriel normé,* $a \in E$ *et* $r \in \mathbb{R}_+$ *; on définit :*

- *la* **boule ouverte de centre** a **et de rayon** $r > 0$ *par* $B(a, r) = \{x \in E \mid ||x - a|| < r\}$,
- *la* **boule fermée de centre** a **et de rayon** $r \geqslant 0$ *par* $B_f(a, r) = \{x \in E \mid ||x - a|| \leqslant r\}$,
- *la* **sphère de centre** a **et de rayon** $r \geqslant 0$ *par* $S(a, r) = \{x \in E \mid ||x - a|| = r\}$.

$B(0_E, 1)$ *et* $B_f(0_E, 1)$ *sont appelées les* **boules unités** *ouverte et fermée,* $S(0_E, 1)$ *la* **sphère unité**.
On dit qu'un vecteur $a \in E$ *est un* **vecteur unitaire** *(ou normé) si* $||a|| = 1$.

REMARQUE 4.9 : • Dans $\mathbb{R}$ *les boules sont les intervalles bornés ouverts ou fermés.*
- *Dans* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$*, il faut visualiser les boules unités pour les normes usuelles introduites précédemment.*
- *Si* $x \in E$ *n'est pas le vecteur nul, alors* $\frac{1}{||x||}.x$ *(noté* $\frac{x}{||x||}$*) est toujours unitaire.*

DÉFINITION 4.5 :
Soit $(E, ||\,.\,||)$ *un espace normé,* A *une partie de* E *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* A *:*
- A *est* **bornée** *si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ A \subset B_f(0_E, M)$ *ou encore* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall a \in A,\ ||a|| \leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **bornée** *si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B_f(0_E, M)$ *ou* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n|| \leqslant M$.

REMARQUE 4.10 : • Toutes les boules sont bornées.
- *Toute partie d'une partie bornée est elle-même bornée.*
- *Une partie est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule de centre quelconque.*
- *Toute réunion de* 2 *parties bornées (ou d'un nombre fini de parties bornées) est bornée.*
- *Toute suite extraite d'une suite bornée est elle-même bornée.*
- *On peut prendre les boules ouvertes dans les définitions précédentes (de rayon* $M > 0$*).*

EN PRATIQUE : Soit A *une partie de* E *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'élément de* E*, pour montrer que :*
- A *est bornée, on peut trouver* $M \geqslant 0$ *tel que* $\forall x \in A,\ ||x|| \leqslant M$.
- A *ne l'est pas, il suffit de trouver* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||x_n|| = +\infty$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, on peut trouver* $M \geqslant 0$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n|| \leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne l'est pas, il suffit de trouver* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_{\varphi(n)}|| = +\infty$.

EXEMPLE 4.4 : Justifier que $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ (hyperbole) n'est pas bornée.

DÉFINITION 4.6 :
Soit E *un espace vectoriel et* C *une partie de* E*, on dit que* C *est un* **convexe** *(ou que c'est une partie convexe de* E*) si :* $\forall (x, y) \in C^2,\ \forall t \in [0; 1],\ tx + (1 - t)y \in C$ *(autrement dit* $[x; y] \subset C$*).*

EXEMPLE 4.5 : Prouver que $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 1\}$ est convexe.

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 4.11</u> : Dans $\mathbb{R}$, c'est un théorème classique que les convexes sont exactement les intervalles et il y en a 10 types (a, b réels et $a < b$) : $[a;a] = \{a\}$ (singleton), $[a;b]$ ("vrai" segment), $]a;b]$, $[a;b[$, $]a;b[$, $[a;+\infty[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b]$, $]-\infty;b[$ et $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DES CONVEXES 4.2 :
Dans un espace quelconque, l'intersection de deux convexes est encore un convexe. Plus généralement, toute intersection d'un nombre fini de convexes en est encore un.
Dans un espace vectoriel normé, toute boule est convexe.

EN PRATIQUE : Soit C une partie de E, pour montrer que :
- C *est convexe, on peut établir que si* $(x,y) \in C^2$ *et* $t \in [0;1]$ *:* $tx + (1-t)y$ *est dans* C.
- C *est convexe, on peut constater que c'est un sous-espace de* E.
- C *est convexe, on peut le voir comme l'intersection de deux convexes.*
- C *est convexe si* $E = \mathbb{R}$, *montrer que* C *est un intervalle.*
- C *n'est pas convexe, trouver* $x \neq y$ *dans* C *et* $t \in]0;1[$ *tels que* $tx + (1-t)y \notin C$.

DÉFINITION 4.7 :
Soit $(E, ||.||)$ *un espace vectoriel normé,* X *un ensemble quelconque et* $f : X \to E$ *; on dit que* f **est bornée sur** X *si* $f(X)$ *est une partie bornée de* E *c'est-à-dire si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\ ||f(x)|| \leqslant M$.

On note $\mathcal{B}(X,E)$ *l'ensemble des applications bornées sur* X *et à valeurs dans* E.

PROPOSITION SUR LA NORME INFINIE 4.3 :
Soit $(E, ||.||)$ **un espace vectoriel normé et** X **un ensemble quelconque non vide, alors** $\mathcal{B}(X,E)$ **est un espace vectoriel normé pour la norme infinie définie par :** $\forall f \in \mathcal{B}(X,E),\ ||f||_\infty = \underset{x \in X}{\mathrm{Sup}}\, ||f(x)||$.

<u>REMARQUE 4.12</u> : $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre et, si* f *et* g *sont bornées sur* X *:* $||f \times g||_\infty \leqslant ||f||_\infty\, ||g||_\infty$.

<u>EXEMPLE 4.6</u> : Calculer $||\sin||_\infty$, $||\cos||_\infty$, $||\sin + \cos||_\infty$ et $||\sin \times \cos||_\infty$.

EN PRATIQUE : Soit une fonction $f : X \to E$, pour montrer que :
- f *est bornée, on peut trouver* $M \geqslant 0$ *tel que* $\forall x \in X,\ ||f(x)|| \leqslant M$.
- $f = (f_1, \cdots, f_n)$ *(fonctions coordonnées dans une base* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *de* E *supposé de dimension finie) est bornée, établir que chaque* f_k *est bornée pour* $k \in [\![1;n]\!]$.
- f *n'est pas bornée, il suffit de trouver* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} ||f(x_n)|| = +\infty$.

<u>EXEMPLE 4.7</u> : Justifier que la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas bornée sur son ensemble de définition.

PARTIE 4.2 : SUITES DANS UN EVN

ORAL BLANC 4.8 : Centrale PSI 2014 Valentine. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\Big(\prod_{k=n+1}^{2n} k\Big)^{\frac{1}{n}}$.

EN PRATIQUE : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, pour montrer que (quand l'ordre est essentiel) :
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, on établit* $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ *ou* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ *(si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$*).*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, on trouve* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tendent vers* ℓ *avec* $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, on prouve que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et majorée.*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$*, on trouve* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $+\infty$ *et telle que* $v_n \leqslant u_n$.

REMARQUE 4.13 : Il faut aussi se souvenir de l'étude des :
- suites récurrentes d'ordre 1 définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
- suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ *avec* $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

EXERCICE 4.9 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.
b. La série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n - \ell)$ est-elle absolument convergente ?

4.2.1 : Suites convergentes

DÉFINITION 4.8 :
Soit $(E, ||\,.\,||)$ *un espace vectoriel normé,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* E *et* $\ell \in E$*. On dit que* **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ *(ou tend vers* ℓ*) si* $\lim_{n\to\infty} ||u_n - \ell|| = 0$ *(en tant que suite à valeurs réelles) ; c'est-à-dire si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite dans* E*, on dit que* **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente**.
Dans le cas contraire, on dit que **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est divergente**.

REMARQUE 4.14 : • On peut remplacer $||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon$ *par* $||u_n - \ell|| < \varepsilon$ *sans changer la notion.*
- *Par contre, on ne peut pas prendre* $\varepsilon = 0$ *sinon on ne garde que les suites stationnaires.*

PROPOSITION SUR L'UNICITÉ DE LA LIMITE DES SUITES 4.4 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite de** $E^{\mathbb{N}}$ **convergente, le vecteur** ℓ **de la définition est alors unique.**

DÉFINITION 4.9 :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente de* $E^{\mathbb{N}}$*, on note* $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in E$ **la limite de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 4.10 **:** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A^n}{n}$. Indication : calculer $(A - I_3)^2$.

REMARQUE 4.15 : La nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépendent de la norme.

EXEMPLE 4.11 **:** Dans $\mathbb{R}[X]$ muni des deux normes $N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\mathrm{Max}}\, |a_k|$, si on pose $P_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{X^k}{k}$ pour $n \geqslant 0$, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour l'une mais diverge pour l'autre.

4.2.2 : Opérations sur les limites

DÉFINITION 4.10 :
Soit $\big(E, ||\,.\,||\big)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E^{\mathbb{N}}$, on dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** *de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.*

REMARQUE 4.16 : Une application φ comme ci-dessus vérifie par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$.

PROPOSITION : TOUTE SUITE CONVERGENTE EST BORNÉE ET CONVERGENCE DES SUITES EXTRAITES D'UNE SUITE CONVERGENTE 4.5 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $E^{\mathbb{N}}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

REMARQUE 4.17 : En pratique, on montre souvent qu'une suite est divergente en trouvant deux de ses suites extraites qui convergent vers des limites différentes.

La réciproque de la première proposition est fausse avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est divergente.

PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES LIMITES 4.6 :
Soit $\big(E, ||\,.\,||\big)$ un espace vectoriel normé :

- **Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $E^{\mathbb{N}}$ convergentes et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\alpha u_n + \beta v_n\big) = \alpha\big(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\big) + \beta\big(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\big)$.**
- **Si la suite de vecteurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et la suite de scalaires $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n$ convergent, alors $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n u_n = \big(\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n\big) \times \big(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\big)$.**
- **L'ensemble des suites convergentes de $E^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ sur lequel l'application $\lim\limits_{n\to+\infty} : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est linéaire.**

REMARQUE 4.18 : • Les limites infinies n'ont de sens que pour les suites à valeurs réelles.

- *Les produits et quotients de suites n'ont pas de sens pour deux suites à valeurs vectorielles.*
- *Ne pas écrire $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ sans vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.*

PARTIE 4.3 : NORMES ÉQUIVALENTES

4.3.1 : Définitions et exemples

REMARQUE 4.19 : Comparons la convergence d'une même suite pour deux normes N_1 et N_2 telles qu'il existe $k > 0$ pour lequel $\forall x \in E,\ N_2(x) \leqslant kN_1(x)$ (on dit que N_1 **domine** *N_2).*

- *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée pour N_1, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée pour N_2.*
- *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui tend vers ℓ pour N_1 alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ pour N_2.*
- *Soit A une partie de E bornée pour N_1, alors A est aussi bornée pour N_2.*

DÉFINITION 4.11 :
Soit E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.
On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** *s'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.*

REMARQUE 4.20 : Comme $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a $\big(\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1\big) \iff \Big(\frac{1}{\beta}N_2 \leqslant N_1 \leqslant \frac{1}{\alpha}N_2\Big)$; l'équivalence entre les normes est symétrique, réflexive et transitive : c'est une relation d'équivalence !!!!!

PROPOSITION 4.7 :
Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, $A \subset E$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

- (A **est bornée pour** N_1) $\iff$ (A **est bornée pour** N_2).
- $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée pour** $N_1\big) \iff \big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée pour** $N_2\big)$.
- $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente pour** $N_1\big) \iff \big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente pour** $N_2\big)$.

EXEMPLE FONDAMENTAL 4.12 :

- Comparaison des normes sur $\mathbb{K}^n$: on a $||x||_\infty \leqslant ||x||_1 \leqslant n||x||_\infty$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant \sqrt{n}||x||_\infty$ et $||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||x||_2$ (inégalités optimales).
- Comparaison des normes sur $C^0([a;b], \mathbb{K})$: on a $||f||_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,||f||_2$, $||f||_1 \leqslant (b-a)||f||_\infty$ et $||f||_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,||f||_\infty$ mais deux de ces normes ne sont pas équivalentes.
- Il existe des normes non comparables : sur $\mathbb{K}[X]$, les normes N_∞ et $||\,.\,||_1$.

ORAL BLANC 4.13 : Pour $f \in E = C^1([0;1], \mathbb{R})$, $N_1(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ et $N_2(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty$. Justifier que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et que N_1 et $||\,.\,||_\infty$ ne sont pas équivalentes. Montrer que N_1 et N_2 le sont. Trouver les constantes optimales entre N_1 et N_2.

REMARQUE 4.21 : Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 et $k \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\big(N_2 \leqslant kN_1\big) \iff \big(B_1(0_E, 1) \subset B_2(0_E, k)\big)$ *(B_1, B_2 désignent les boules ouvertes pour N_1, N_2).*
- $\big(N_2 \leqslant kN_1\big) \iff \big(B_{1,f}(0_E, 1) \subset B_{2,f}(0_E, k)\big)$ *($B_{1,f}, B_{2,f}$ désignent les boules fermées pour N_1, N_2).*

EXEMPLE 4.14 : Montrer que les normes $||\,.\,||_1$, $||\,.\,||_2$ et $||\,.\,||_\infty$ ne sont pas équivalentes deux à deux sur $\ell^1(\mathbb{R})$ (familles sommables réelles indexées par $\mathbb{N}$).

4.3.2 : En dimension finie

PROPOSITION SUR LA CONVERGENCE DES SUITES COORDONNEÉS 4.8 :
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, N_∞ la norme infinie associée à cette base, c'est-à-dire $N_\infty\Big(\sum\limits_{k=1}^{p} x_k e_k\Big) = \underset{1\leqslant k\leqslant p}{\mathrm{Max}} |x_k|$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(n) e_k$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_∞ si et seulement si les p suites $\big(u_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \big(u_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_∞, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \big(\lim\limits_{n\to\infty} u_k(n)\big) e_k$.

THÉORÈME D'ÉQUIVALENCE DES NORMES EN DIMENSION FINIE 4.9 :
Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes.
La notion de convergence et les limites des suites ne dépendent pas de la norme employée.

Démonstration : Hors programme.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}$.

- Si $p = 0$ alors la seule norme sur E est l'application nulle.
- Si $p > 0$, soit une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ de E et N_∞ la norme associée à $\mathcal{B}$. Soit N une autre norme sur E.

Pour $x \in E$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k e_k$, on a $N(x) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{p} |x_k| N(e_k)$ donc $N(x) \leqslant \beta N_\infty(x)$ avec $\beta = \sum\limits_{k=1}^{p} N(e_k)$.

Supposons que N ne domine pas N_∞ : $\forall \alpha > 0,\ \exists x \in E,\ N_\infty(x) > \alpha N(x)$.

Avec $\alpha = n$ pour $n \in \mathbb{N}$, on peut ainsi définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ N_\infty(x_n) > n N(x_n)$. Comme $x_n \neq 0_E$, en divisant par $N_\infty(x_n) > 0$ et en posant $y_n = \dfrac{x_n}{N_\infty(x_n)}$, on a $N_\infty(y_n) = 1$ et $N(y_n) < \dfrac{1}{n}$ donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0_E pour la norme N.

Les suites composantes $(y_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, (y_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées car $N_\infty(y_n) = 1$.

Puisque $(y_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(y_{1,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Puisque $(y_{2,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car extraite de la suite bornée $(y_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$, il en existe une suite extraite $(y_{2,\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. De plus, la suite extraite $(y_{1,\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle aussi convergente car extraite de $(y_{1,\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ déjà convergente.

Ainsi, on a construit une extraction commune aux suites $(y_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les deux suites extraites convergent. En poursuivant ce processus, on peut construire $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les suites $(y_{1,\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, (y_{p,\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Notons $\ell_1, \cdots, \ell_p$ leurs limites respectives. La suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente pour la norme N_∞ d'après la proposition précédente et sa limite vaut $\ell = \sum\limits_{k=1}^{n} \ell_k e_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $y_{\psi(n)} = (y_{\psi(n)} - \ell) + \ell$, on a $N_\infty(y_{\psi(n)}) = 1 \leqslant N_\infty(y_{\psi(n)} - \ell) + N_\infty(\ell)$ donc $N_\infty(\ell) \geqslant 1 - N_\infty(y_{\psi(n)} - \ell)$. De plus, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $|y_{k,\psi(n)}| \leqslant 1$ donc, à la limite, $|\ell_k| \leqslant 1$ ce qui montre que $N_\infty(\ell) \leqslant 1$. Ainsi, $1 - N_\infty(y_{\psi(n)} - \ell) \leqslant N_\infty(\ell) \leqslant 1$ et, par encadrement, on a $N_\infty(\ell) = 1$. Or $N \leqslant \beta N_\infty$ donc, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $N(y_{\psi(n)} - \ell) \leqslant \beta N_\infty(y_{\psi(n)} - \ell)$ et on en déduit que la suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ aussi pour la norme N. Mais on sait déjà que $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0_E pour la norme N donc par unicité de la limite $\ell = 0_E$. Or $N_\infty(\ell) = 1$ ce qui est absurde.

EXEMPLE 4.15 : Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*,\ N(AB) \leqslant k N(A) N(B)$.

EN PRATIQUE : Soit E un espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes de E, pour montrer que :

- *N_1 et N_2 sont équivalentes, on l'assure si E est de dimension finie.*
- *N_1 et N_2 sont équivalentes, on trouve $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$ (on peut se restreindre par homogénéité à des vecteurs vérifiant $N_1(x) = 1$).*
- *N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on trouve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty$ (N_1 ne domine pas N_2) ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} = +\infty$ (N_2 ne domine pas N_1).*

THÉORÈME DE PASSAGE PAR LES SUITES COORDONNÉES 4.10 :
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(n)e_k$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les p suites $\big(u_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \big(u_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \big(\lim\limits_{n\to\infty} u_k(n)\big)e_k$.

<u>REMARQUE 4.22</u> : • *$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ le font.*

- *Une suite de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ converge si et seulement si les $n+1$ suites de coefficients le font.*
- *Une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge si et seulement si les n^2 suites de ses coefficients convergent.*

<u>EXERCICE CONCOURS 4.16</u> : Mines MP.

Calculer, si $\alpha \in \mathbb{R}$, la limite de $(A_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

EN PRATIQUE : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace E normé (on précise la norme en dimension infinie, on choisit une norme bien adaptée en dimension finie), alors pour montrer que :

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on établit : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, montrer que toutes les suites coordonnées (dans une certaine base en dimension finie) convergent vers les coordonnées correspondantes de ℓ.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, trouver une suite extraite qui diverge ou trouver deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, exprimer u_n en fonction d'autres suites vectorielles ou scalaires convergentes et utiliser la stabilité des suites convergentes par opérations linéaires.*

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 4.23</u> : On pose, pour $p \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^n}{n!}$.

- *La série converge absolument ce qui assure l'existence de $\exp(A)$.*
- *Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$, alors $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_p})$.*
- *Si A et B commutent : $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Ainsi $\exp(A) \in GL_p(\mathbb{K})$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.*
- *Si $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $\exp\left(PAP^{-1}\right) = P\exp(A)P^{-1}$. Le calcul de $\exp(A)$ si A est diagonalisable est facile.*
- *Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\big(\exp(A)\big) = \exp\big(\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\big)$ et $\det\big(\exp(A)\big) = \exp\big(\mathrm{tr}(A)\big)$.*

COMPÉTENCES

- Montrer qu'une application N sur un espace vectoriel E est une norme.
- Reconnaître des normes classiques comme les normes 1, 2, ∞ et euclidiennes.
- Maîtriser le langage sur les parties : boules, sphères, bornées, convexes.
- Comprendre les généralisations des propriétés des suites réelles aux suites de vecteurs.
- Prouver qu'une norme domine une autre norme en trouvant éventuellement la constante optimale.
- Établir que deux normes sont équivalentes ou pas en dimension infinie.
- Utiliser des suites particulières pour montrer qu'une norme ne domine pas une autre norme.
- Étudier les convergences des suites en se ramenant aux suites coordonnées en dimension finie.