CHAPITRE 4
ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PARTIE 4.1 : NORMES

DÉFINITION 4.1 :
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Une* **norme** *sur* E *est une application* N *définie sur* E *et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les trois axiomes suivants :*

(C_1) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ *(axiome de séparation),*

(C_2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x)$ *(homogénéité),*

(C_3) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Un **espace vectoriel normé** *est un espace vectoriel* E *muni d'une norme.*

REMARQUE 4.1 : • $N(0_E) = N(0.x) = 0$ *donc il y a équivalence dans l'axiome de séparation.*

• *L'inégalité triangulaire permet aussi de minorer :* $\forall (x, y) \in E^2,\ |N(x)-N(y)| \leqslant N(x-y) \leqslant N(x)+N(y)$.

• *En général :* $\forall n \geqslant 1,\ \forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n,\ N\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| N(x_k)$.

• *Tout sous-espace* F *d'un espace vectoriel normé* E *en est aussi un pour la* **norme induite** $N_F : F \to \mathbb{R}_+$ *qui est définie comme toute* **application induite** *par* $N_F(x) = N(x)$ *seulement si* $x \in F$.

DÉFINITION 4.2 :
Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ *: soit* $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *; on définit trois normes sur* $\mathbb{K}^n$ *en posant :*

• $||x||_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$ • $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ *(la norme euclidienne canonique)* • $||x||_\infty = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|$.

REMARQUE 4.2 : Soit un espace euclidien E *(ou même plus généralement d'un espace préhilbertien réel) avec un produit scalaire* $(\,.\,|\,.\,)$*, l'application* $||\,.\,|| : E \to \mathbb{R}_+$ *définie par* $\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$ *est une norme qu'on appelle la* **norme euclidienne associée à ce produit scalaire**.

EXEMPLE 4.1 : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, on peut définir (associées à $\mathcal{B}$) trois normes en posant, pour tout vecteur $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$:

$$N_1(x) = ||(x_1, \cdots, x_n)||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,\ N_2(x) = ||(x_1, \ldots, x_n)||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \text{ et } N_\infty(x) = \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|.$$

DÉFINITION 4.3 :
Normes usuelles sur les espaces de fonctions *: soit* I *un "vrai" intervalle et* $f : I \to \mathbb{K}$ *:*

• $||f||_1 = \int_I |f(t)| dt$ *(***norme de la convergence en moyenne***) sur* $L^1(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$.

• $||f||_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}$ *(***norme de la conv. en moyenne quadratique***) sur* $L^2(I, \mathbb{K}) \cap C^0(I, \mathbb{K})$.

• $||f||_\infty = \underset{x \in I}{\mathrm{Sup}} |f(x)|$ *(***norme de la convergence uniforme***) sur* $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ *(fonctions bornées).*

REMARQUE 4.3 : Exemples de normes sur des espaces de suites :

- *sur* $\ell^\infty(\mathbb{K})$, *ensemble des suites bornées :* $||(u_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
- *sur* $\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\right\}$ *(suites sommables) :* $||(u_n)||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
- *sur* $\ell^2(\mathbb{K}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\right\}$ *(suites de carré sommable) :* $||(u_n)||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$.

DÉFINITION 4.4 :
Soit $(E, ||.||)$ *un espace vectoriel normé,* $a \in E$ *et* $r \in \mathbb{R}_+$ *; on définit :*

- *la* **boule ouverte de centre** a **et de rayon** $r > 0$ *par* $B(a, r) = \left\{x \in E \mid ||x - a|| < r\right\}$,
- *la* **boule fermée de centre** a **et de rayon** $r \geqslant 0$ *par* $B_f(a, r) = \left\{x \in E \mid ||x - a|| \leqslant r\right\}$,
- *la* **sphère de centre** a **et de rayon** $r \geqslant 0$ *par* $S(a, r) = \left\{x \in E \mid ||x - a|| = r\right\}$.

$B(0_E, 1)$ *et* $B_f(0_E, 1)$ *sont appelées les* **boules unités** *ouverte et fermée,* $S(0_E, 1)$ *la* **sphère unité**.

On dit qu'un vecteur $a \in E$ *est un* **vecteur unitaire** *(ou normé) si* $||a|| = 1$.

REMARQUE 4.4 : • *Dans* $\mathbb{R}$, *les boules sont les intervalles bornés ouverts ou fermés.*
• *Dans* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$, *il faut visualiser les boules unités pour les normes usuelles introduites précédemment.*
• *Si* $x \in E$ *n'est pas le vecteur nul, alors* $\frac{1}{||x||}.x$ *(noté* $\frac{x}{||x||}$*) est toujours unitaire.*

DÉFINITION 4.5 :
Soit $(E, ||.||)$ *un espace normé,* A *une partie de* E *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ *une suite d'éléments de* A *:*

- A *est* **bornée** *si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ A \subset B_f(0_E, M)$ *ou encore* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall a \in A,\ ||a|| \leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **bornée** *si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B_f(0_E, M)$ *ou* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ ||u_n|| \leqslant M$.

DÉFINITION 4.6 :
Soit E *un espace vectoriel et* C *une partie de* E, *on dit que* C *est un* **convexe** *(ou que c'est une partie convexe de* E*) si :* $\forall (x, y) \in C^2,\ \forall t \in [0; 1],\ tx + (1 - t)y \in C$ *(autrement dit* $[x; y] \subset C$*).*

REMARQUE FONDAMENTALE 4.5 : Dans $\mathbb{R}$, *les convexes sont exactement les intervalles.*

PROPOSITION 4.1 :
Dans un espace quelconque, l'intersection de deux convexes est encore un convexe. Plus généralement, toute intersection d'un nombre fini de convexes en est encore un.
Dans un espace vectoriel normé, toute boule est convexe.

DÉFINITION 4.7 :
Soit $(E, ||.||)$ *un espace vectoriel normé,* X *un ensemble quelconque et* $f : X \to E$ *; on dit que* f **est bornée sur** X *si* $f(X)$ *est une partie bornée de* E *c'est-à-dire si* $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\ ||f(x)|| \leqslant M$.
On note $\mathcal{B}(X, E)$ *l'ensemble des applications bornées sur* X *et à valeurs dans* E.

PROPOSITION 4.2 :
Soit $(E, ||.||)$ **un espace vectoriel normé et** X **un ensemble quelconque, alors** $\mathcal{B}(X, E)$ **est un espace vectoriel normé pour la norme infinie définie par :** $\forall f \in \mathcal{B}(X, E),\ ||f||_\infty = \sup_{x\in X} ||f(x)||$.

REMARQUE 4.6 : $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre et, si* f *et* g *sont bornées sur* X *:* $||f \times g||_\infty \leqslant ||f||_\infty\, ||g||_\infty$.

PARTIE 4.2 : SUITES DANS UN EVN

REMARQUE 4.7 : Il faut aussi se souvenir de l'étude des :

- *suites récurrentes d'ordre 1 définies par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
- *suites récurrentes linéaires d'ordre 2 définies par* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

DÉFINITION 4.8 :
Soit $\big(E, ||\,.\,||\big)$ *un espace vectoriel normé,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* E *et* $\ell \in E$. *On dit que* **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ *(ou tend vers* ℓ*) si* $\lim\limits_{n\to\infty} ||u_n - \ell|| = 0$ *(en tant que suite à valeurs réelles) ; c'est-à-dire si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n - \ell|| \leqslant \varepsilon$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite dans* E*, on dit que* **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente**.
Dans le cas contraire, on dit que **la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est divergente**.

PROPOSITION 4.3 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite de** $E^{\mathbb{N}}$ **convergente, le vecteur** ℓ **de la définition est alors unique.**

DÉFINITION 4.9 :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente de* $E^{\mathbb{N}}$*, on note* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \in E$ **la limite de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

REMARQUE 4.8 : La nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dépendent de la norme.*

DÉFINITION 4.10 :
Soit $\big(E, ||\,.\,||\big)$ *un espace vectoriel normé et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $E^{\mathbb{N}}$*, on dit que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* **suite extraite** *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

PROPOSITION 4.4 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite convergente de** $E^{\mathbb{N}}$**, alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée.**
Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

REMARQUE 4.9 : En pratique, on montre souvent qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente en trouvant deux suites extraites de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui convergent vers des limites différentes.*

PROPOSITION 4.5 :
Soit $\big(E, ||\,.\,||\big)$ **un espace vectoriel normé :**

- **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **sont deux suites de** $E^{\mathbb{N}}$ **convergentes et** $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$**, alors la suite** $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\alpha u_n + \beta v_n\big) = \alpha\big(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\big) + \beta\big(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\big)$.
- **Si la suite de vecteurs** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ **et la suite de scalaires** $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n$ **convergent, alors** $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **aussi et** $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n u_n = \big(\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n\big) \times \big(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\big)$.
- **L'ensemble des suites convergentes de** $E^{\mathbb{N}}$ **est un sous-espace vectoriel de** $E^{\mathbb{N}}$ **sur lequel l'application** $\lim\limits_{n\to+\infty} : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **est une forme linéaire.**

REMARQUE 4.10 : Ne pas écrire $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ *sans vérifier les convergences.*

PARTIE 4.3 : NORMES ÉQUIVALENTES

DÉFINITION 4.11 :
Soit E *un espace vectoriel,* N_1 *et* N_2 *deux normes sur* E.
On dit que N_1 *et* N_2 *sont* **équivalentes** *s'il existe* $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *tel que* $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.

REMARQUE 4.11 : Comme $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, *on a* $\big(\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1\big) \iff \Big(\frac{1}{\beta} N_2 \leqslant N_1 \leqslant \frac{1}{\alpha} N_2\Big)$ *;*
l'équivalence entre les normes est symétrique, réflexive et transitive : c'est une relation d'équivalence !!!!!

PROPOSITION 4.6 :
Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, $A \subset E$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
- $(A$ **est bornée pour** $N_1) \iff (A$ **est bornée pour** $N_2)$.
- $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée pour** $N_1\big) \iff \big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée pour** $N_2\big)$.
- $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente pour** $N_1\big) \iff \big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente pour** $N_2\big)$.

EXEMPLE FONDAMENTAL 4.2 :
- Comparaison des normes sur $\mathbb{K}^n$: on a $||x||_\infty \leqslant ||x||_1 \leqslant n||x||_\infty$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant \sqrt{n}||x||_\infty$ et $||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||x||_2$ (inégalités optimales).
- Comparaison des normes sur $C^0([a;b], \mathbb{K})$: on a $||f||_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,||f||_2$, $||f||_1 \leqslant (b-a)||f||_\infty$ et $||f||_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,||f||_\infty$ mais deux de ces normes ne sont pas équivalentes.
- Il existe des normes non comparables : sur $\mathbb{K}[X]$, les normes N_∞ et $||\,.\,||_1$.

REMARQUE 4.12 : Soit E *un espace vectoriel muni de deux normes* N_1 *et* N_2 *et* $k \in \mathbb{R}_+^*$ *:*
- $\big(N_2 \leqslant kN_1\big) \iff \big(B_1(0_E, 1) \subset B_2(0_E, k)\big)$ *(*B_1, B_2 *désignent les boules ouvertes pour* N_1, N_2*).*
- $\big(N_2 \leqslant kN_1\big) \iff \big(B_{1,f}(0_E, 1) \subset B_{2,f}(0_E, k)\big)$ *(*$B_{1,f}, B_{2,f}$ *désignent les boules fermées pour* N_1, N_2*).*

THÉORÈME 4.7 :
Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes.
La notion de convergence et les limites des suites ne dépendent pas de la norme employée.

THÉORÈME 4.8 :
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(n) e_k$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les p suites $\big(u_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \big(u_p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \big(\lim\limits_{n\to\infty} u_k(n)\big) e_k$.

REMARQUE 4.13 : • $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si* $\big(\mathrm{Re}\,(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *le font.*
- *Une suite de polynômes de* $\mathbb{K}_n[X]$ *converge si et seulement si les* $n+1$ *suites de coefficients le font.*
- *Une suite de matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *converge si et seulement si les* n^2 *suites de ses coefficients convergent.*

REMARQUE FONDAMENTALE 4.14 : Pour $p \geqslant 1$ *et* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, *la suite* $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)_{k\geqslant 0}$ *converge vers une matrice qu'on note* $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. *Si* $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$, *alors* $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_p})$.