TD 07 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 18 octobre 2024**

7.1 *Mines PSI 2014* Tanguy Sommet

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on définit pour $p \in \mathbb{N}^*$ l'entier $n_p = \text{Min}\left(\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}\right)$.

Donner un équivalent de n_p quand p tend vers $+\infty$.

Bonus : comment démontre-t-on que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$?

7.2 *Centrale Maths1 PSI 2015* Marin De Bonnières

a. Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ qui tend vers 0. On définit $\beta_n = \prod_{k=1}^{n} (1+\alpha_k)$.

La suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

b. On pose $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Prouver que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

c. On pose $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

d. Convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$? Indication : on pourra trouver un équivalent de u_n.

7.3 *École Navale PSI 2016* Hugo Tarlé I

a. Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.

b. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$.

7.4 *E3A PSI 2017* Joseph Dumoulin

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a. Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. Indication : considérer $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ (analogie avec $y' = -y^2$) et utiliser le théorème de Cesaro (dont l'énoncé était rappelé).

7.5 *Centrale Maths1 PSI 2018* Jean-Baptiste Malagnoux

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante telle que $u_0 = 1$. On pose $\forall n \geqslant 1,\ p_n = u_{n-1} - u_n$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $\sum\limits_{n\geqslant 1} p_n$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

b. Sous quelle condition a-t-on l'équivalence : $(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge$) \iff (\sum\limits_{n\geqslant 1} np_n$ converge$)$.

c. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, positive et décroissante. Quelle condition sur f nous donne l'équivalence suivante : $(f$ intégrable sur $\mathbb{R}_+) \iff (t \mapsto tf'(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+)$?

7.6 *OdlT 2018/2019 Mines PSI planche 115II et compléments Centrale PSI planche 169*

a. Trouver un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1)$.

c. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k \dfrac{\ln k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln 2}{k} - \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{\ln k}{k}$.

d. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ (utiliser un développement asymptotique de la série harmonique).

7.7 *Compléments OdlT 2018/2019 IMT PSI planche 442II*

Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n+(-1)^n}\right)$.

7.8 *CCINP PSI 2021* Alexandre Marque et Adèle Robert II

Déterminer la nature des séries suivantes :

a. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} \displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

b. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \displaystyle\int_0^n e^{-t^2n^2}\,dt$.