TD 07 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2024-2025 **vendredi 18 octobre 2024**

7.1 Comme la série harmonique diverge d'après le cours, la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Ainsi, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, la partie $\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et elle admet donc un minimum d'après la propriété fondamentale de l'ordre dans $\mathbb{N}$. On peut donc bien définir $n_p = \text{Min}\big(\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}\big)$.
Par définition de n_p, il vient $H_{n_p} \geqslant p$. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$, on a $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{t}$ qu'on somme pour $k \in [\![2;n_p]\!]$ pour avoir $\displaystyle\sum_{k=2}^{n_p} \dfrac{1}{k} = H_{n_p} - 1 \leqslant \int_1^{n_p} \dfrac{dt}{t} = \ln(n_p)$ avec CHASLES. Ainsi, $\ln(n_p) \leqslant p-1$ et, par croissance de $\exp$, on obtient $n_p \geqslant e^{p-1}$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} n_p = +\infty$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, comme n_p est le plus petit entier de $\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}$, on a $n_p - 1 \notin \{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}$ donc $H_{n_p-1} < p$ ce qui donne l'encadrement $\forall p \in \mathbb{N}^*, H_{n_p-1} < p \leqslant H_{n_p}$.
De plus, $0 \leqslant H_{n_p} - p < H_{n_p} - H_{n_p-1} = \dfrac{1}{n_p}$ or $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \dfrac{1}{n_p} = 0$ d'après ce qui précède donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \big(H_{n_p} - p\big) = 0$. Mais on sait par ailleurs que $H_{n_p} \underset{+\infty}{=} \ln(n_p) + \gamma + o(1)$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \big(p - \ln(n_p) - \gamma\big) = 0$.
Il suffit donc de passer à l'exponentielle et on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} e^{\ln(n_p)-p+\gamma} = 1$ ce qui équivaut à $n_p \underset{+\infty}{\sim} e^{p-\gamma}$.
Bonus : soit $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$. On a $\forall n \geqslant 2,\ u_n - u_{n-1} = H_n - H_{n-1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ donc $u_n - u_{n-1} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'où, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge. Ainsi, par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. En notant $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$, on a donc $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

7.2 **a.** Si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = 0$, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 et $\forall n \geqslant 1,\ b_n = 1$ donc $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 mais $\forall n \geqslant 1,\ b_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{k} = n+1$ donc $(b_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.
On ne peut donc rien conclure sur la convergence de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.
b. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\left|\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right| < 1$ donc $1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} > 0$. De plus, $1 + \dfrac{(-1)^{1-1}}{\sqrt{1}} = 2 > 0$. Par conséquent, on peut considérer $\ln(u_n)$ et on a $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$ or on connaît le développement limité $w_k = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{2k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$. Posons $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ et $b_k = w_k - a_k$ de sorte qu'avec le calcul précédent on a $b_k \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2k} < 0$. Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. Plus précisément, la suite de ses sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang donc elle tend vers $-\infty$. Comme $w_k = a_k + b_k$, par somme, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} w_k$ diverge car $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} a_k$ converge et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} b_k$ diverge et la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$.

Comme $u_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)\right)$ et que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c. Par dualité suite-série, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0}(v_{n+1}-v_n)$ converge. Or $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{n(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ converge donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge (vers un réel qui est en fait la constante d'EULER $\gamma \sim 0,577$).

d. On écrit autrement le développement limité de la question **b**, $w_k \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$. Alors, en posant $c_k = w_k - a_k + \frac{1}{2k}$, ce qui précède montre que $c_k \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$ donc la série $\sum_{k\geqslant 1} c_k$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$, $c = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ de sorte que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ d'après la question **c.**. Comme $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{2}H_n + \sum_{k=1}^{n} c_k$, ce qui précède permet d'écrire $\ln(u_n) \underset{+\infty}{=} a + o(1) - \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{\gamma}{2} + o(1) + c + o(1)$ donc en notant $\ell = a - \frac{\gamma}{2} + c$, il vient $\ln(u_n) \underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2}\ln(n) + \ell + o(1)$. Puisque $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{+\infty}{=} e^{-\frac{\ln(n)}{2}+\ell+o(1)} \underset{+\infty}{=} \frac{e^{\ell}}{\sqrt{n}} e^{o(1)}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{\ell}}{\sqrt{n}} > 0$ car $e^{o(1)} = 1 + o(1)$ et on en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge par comparaison aux séries de RIEMANN.

7.3 **a.** La fonction $\ln^2$ étant continue et croissante sur $[1;+\infty[$, on en déduit que $\forall k \geqslant 2,\ \ln^2(k) \geqslant \int_{k-1}^{k} \ln^2(t)dt$ et $\forall k \geqslant 1,\ \ln^2(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln^2(t)dt$. En sommant ces inégalités pour $k \in [\![2;n]\!]$ ou $k \in [\![1;n]\!]$, on trouve avec la relation de CHASLES : $\forall n \geqslant 1,\ \int_1^n \ln^2(t)dt \leqslant u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \leqslant \int_1^{n+1} \ln^2(t)dt$ car $\ln^2(1) = 0$.

Par intégration par parties, comme les fonctions $u : t \mapsto \ln^2(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$, il vient $\forall x \geqslant 1,\ \int_1^x \ln^2(t)dt = [t\ln^2(t)]_1^x - 2\int_1^x \ln(t)dt = [t\ln^2(t) - 2t\ln(t) + 2t]_1^x$ dont on déduit la relation $\int_1^x \ln^2(t)dt = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x - 2$. Ainsi, comme $n\ln^2(n) - 2n\ln(n) + 2n - 2 \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$ et aussi $(n+1)\ln^2(n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2 \underset{+\infty}{\sim} (n+1)\ln^2(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$ car on sait que $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, on obtient par encadrement l'équivalent $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$.

b. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t\ln^2(t)}$ est dérivable et décroissante sur $]1;+\infty[$ car $\forall t > 1,\ f'(t) = -\frac{2+\ln(t)}{t^2\ln^3(t)} < 0$. Pour $k \geqslant 3$, on a donc $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ d'où, en sommant pour $k \in [\![3;n]\!]$, $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \int_2^n \frac{dt}{t\ln^2(t)}$. Or, $\int_2^n \frac{dt}{t\ln^2(t)} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$ donc $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$. Comme les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ sont majorées, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ converge. Ainsi, la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$ converge par comparaison avec la question **a.**.

7.4 **a.** Par hypothèse, $0 < u_0 < 1$. Soit $n \geqslant 0$ tel que $0 < u_n < 1$, alors $u_{n+1} = u_n(1-u_n) \in]0;1[$ car $(u_n, 1-u_n) \in]0;1[^2$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$. Plus simplement, on aurait pu dire que la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x(1-x)$ est bien définie et à valeurs dans $]0;1[$ car $u_0 \in]0;1[$ et que l'intervalle $]0;1[$ est stable par f.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc elle converge par le théorème de la limite monotone car elle est minorée par 0. Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \in [0;1[$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on obtient $\ell = \ell - \ell^2$ donc $\ell = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b. Pour $n \geqslant 0$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n(1-u_n)} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \dfrac{1}{1-u_n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$. Par le théorème de CESARO, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = 1$. Or, par télescopage, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}$ et on en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{nu_n} - \dfrac{1}{nu_0} \right) = 1$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$ ce qui se traduit par $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

L'équation $(E) \;:\; y' = -y^2$ est une équation de BERNOULLI et on sait qu'il suffit de poser $z = \dfrac{1}{y}$ (pour les fonctions y ne s'annulant pas sur un certain intervalle) pour qu'elle se ramène à $-\dfrac{y'}{y^2} = z' = 1$ qui se résout aisément. Poser $z = \dfrac{1}{y}$ et en calculer la dérivée s'apparente donc, au niveau des suites, au calcul du "taux d'accroissement" $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ qui tend d'ailleurs vers 1 comme dans l'équation $(F) \;:\; z' = 1$.

7.5 **a.** Par dualité suite-série, on sait que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} p_n$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. De plus, comme $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = u_0 - u_n$ après télescopage, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on aura $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On a l'équivalence : $\Big(\sum\limits_{n \geqslant 1} p_n \text{ converge et } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \Big) \iff \Big((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \Big)$.

b. Soit $n \geqslant 1$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} kp_k = \sum\limits_{k=1}^{n} k(u_{k-1} - u_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} ku_{k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} ku_k$ donc, en ré-indexant, on trouve $\sum\limits_{k=1}^{n} kp_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)u_k - \sum\limits_{k=1}^{n} ku_k = u_0 - nu_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_k = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k \Big) - nu_n$.

Ainsi, si $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on a $\big(\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge$\big) \iff \big(\sum\limits_{n \geqslant 1} np_n$ converge$\big)$ et, dans le cas de la convergence, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} np_n$. De plus, si $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = \ell > 0$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n} > 0$ et la série à termes positifs $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. On peut donc être plus précis.

- Si $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, les deux séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} np_n$ divergent.
- Si $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, $\big(\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge$\big) \iff \big(\sum\limits_{n \geqslant 1} np_n$ converge$\big)$ et, s'il y a convergence, on a même $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} np_n$ (revoir cette relation avec les espérances des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$).

c. Soit $x \geqslant 0$, en posant $u : t \mapsto f(t)$ et $v : t :\mapsto t$, les deux fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0;x]$, par intégration par parties, on a $\int_0^x f(t)dt = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)dt$. Si la fonction $t \mapsto tf(t)$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$, la formule précédente montre que $\int_0^{+\infty} f$ converge $\iff \int_0^{+\infty} tf'(t)dt$ converge. Puisque les signes de ces fonctions sont constants, alors (f intégrable sur $\mathbb{R}_+$) $\iff$ ($t \mapsto tf'(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$). Comme à la question **b.**, si $\ell > 0$, alors $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{t}$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

- Si $t \mapsto tf(t)$ admet une limite finie $\ell > 0$ en $+\infty$, f et $t \mapsto tf'(t)$ ne sont pas intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $t \mapsto tf(t)$ admet pour limite 0 en $+\infty$, (f intégrable sur $\mathbb{R}_+$) $\iff$ ($t \mapsto tf'(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$) et, s'il y a convergence, on a même $\int_0^{+\infty} f(t)dt = -\int_0^{+\infty} tf'(t)dt$.

7.6 **a.** $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln(t)}{t^2} = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$, ainsi f est décroissante sur $[e;+\infty[$ donc sur $[3;+\infty[$. Ainsi, $\forall k \geqslant 4$, $\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt (\leqslant f(k-1))$ et, pour $n \geqslant 4$, en sommant ces inégalités pour $k \in [\![4;n]\!]$, comme $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, on a l'encadrement suivant, $\int_4^{n+1} f(t)dt \leqslant u_n - f(2) - f(3) \leqslant \int_3^n f(t)dt \iff \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leqslant u_n - f(2) - f(3) \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}$ car une primitive de f est $t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$. Comme $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, par encadrement, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

b. Posons $d_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ pour $n \geqslant 1$. Il s'agit de montrer que $(d_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $c \in \mathbb{R}$.

<u>Méthode 1</u> : posons, pour tout entier $k \geqslant 1$, $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$. D'après **a.**, on a $\forall k \geqslant 4,\ 0 \leqslant w_k \leqslant f(k-1) - f(k)$. En sommant et par télescopage, on a $0 \leqslant \sum\limits_{k=4}^{n} w_k \leqslant f(3) - f(n) \leqslant f(3)$. Les sommes partielles la série $\sum\limits_{n\geqslant 4} w_n$ sont majorées donc, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 4} w_n$ est à termes positifs, elle converge d'après une propriété du cours. Or, par CHASLES, $\sum\limits_{k=4}^{n} w_k = \int_3^n f(t)dt - u_n + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$ donc $\sum\limits_{k=4}^{n} w_k = \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} - u_n + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$. En notant la somme de la série $W = \sum\limits_{n=4}^{+\infty} w_n$, on a donc $\frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} - u_n + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2} \underset{+\infty}{=} W + o(1)$ ce qui donne le développement asymptotique attendu, $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln^2(3)}{2} - W + o(1) \underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + c + o(1)$ avec $c = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln^2(3)}{2} - W$.

<u>Méthode 2</u> : pour $n \geqslant 4$, $d_n - d_{n-1} = u_n - u_{n-1} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1))^2 = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}dt$. La première inégalité (de droite) de la question **a.** montre que $(d_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante. De plus, la seconde inégalité de la question **a.** (à gauche) montre que $u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \geqslant f(2) + f(3) - \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln 4)^2$. Comme $\frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \geqslant 0$, on en déduit que $d_n \geqslant f(2) + f(3) - \frac{1}{2}(\ln 4)^2$ donc $(d_n)_{n\geqslant 4}$ est minorée donc elle converge (vers c) par le théorème de la limite monotone.

<u>Méthode 3</u> : pour $n \geqslant 2$, $d_n - d_{n-1} = u_n - u_{n-1} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1))^2 = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1))^2$. Or $\ln^2(n) - \ln^2(n-1) = (\ln(n) + \ln(n-1))(\ln(n) - \ln(n-1)) = \left(2\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \times \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ donc $\ln^2(n) - \ln^2(n-1) \underset{+\infty}{=} \left(2\ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{2\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. Ainsi, on obtient $d_n - d_{n-1} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2}(d_n - d_{n-1})$ converge absolument par comparaison à une série de RIEMANN donc, par dualité suite-série, la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ converge (vers c).

Avec les trois méthodes, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = c \in \mathbb{R}$ donc $d_n \underset{+\infty}{=} c + o(1)$ d'où $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{(\ln n)^2}{2} + c + o(1)$ avec $c \in \mathbb{R}$.

c. Pour $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(2k)}{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(2k-1)}{2k-1} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(2k)}{2k} - \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{\ln(k)}{k}$.
Puisque $\ln(2k) = \ln(2) + \ln(k)$, il vient $S_{2n} = \ln(2)\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} - \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{\ln(k)}{k} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$.
Ainsi, d'après ce qui précède, $S_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(2)(\ln(n)+\gamma) + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln(2n))^2 + o(1)$ avec **a.** ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k \ln k}{k}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$ car $\ln(2n)^2 = \ln(2)^2 + 2\ln(2)\ln(n) + \ln(n)^2$. Comme $S_{2n+1} \underset{+\infty}{=} S_{2n} + o(1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$. Comme $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$. Au final, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n} = \dfrac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$.

$\boxed{7.7}$ Comme $n + (-1)^n > 0$ pour $n \geqslant 2$, u_n est bien défini. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n + (-1)^n) = +\infty$ et $\dfrac{1}{n+(-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc, comme $\sin(x) \underset{0}{=} x + O(x^2)$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} (-1)^n\left(\dfrac{1}{n+(-1)^n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$. Mais $\dfrac{1}{n+(-1)^n} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right)$ donc $\dfrac{1}{n+(-1)^n} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} (-1)^n\left(\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
En posant $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{n}$, on a donc $v_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'après le calcul précédent. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ décroît et tend vers 0 et que $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN car $2 > 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge par somme.
Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ est alternée, on aurait pu s'intéresser à la décroissance de $(|u_n|)_{n\geqslant 2}$. Or $(|u_n|)_{n\geqslant 2}$ est positive et tend vers 0 mais elle n'est pas décroissante car $|u_{2n+1}| = \sin\left(\dfrac{1}{2n}\right) > \sin\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) = |u_{2n}|$.

$\boxed{7.8}$ **a.** La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN donc $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ existe pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n^2 \leqslant (n+1)^2$ et que f est positive, on a $\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx \geqslant \int_{(n+1)^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ donc, puisque $\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$, on a $u_n \geqslant u_{n+1}$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, positive, et elle tend vers 0 car, en tant que reste d'une intégrale convergente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 0$. Et on a même $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par conséquent, avec le critère spécial de séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n}\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge.
b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \displaystyle\int_0^n e^{-t^2n^2}dt$ et $x = tn = \varphi(t)$, alors la fonction φ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $[0;n]$ dans $[0;n^2]$ donc, par changement de variable, on a $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{n^2} e^{-x^2}dx$ donc, par CHASLES, $v_n = \dfrac{I}{n} - u_n$ en posant $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (intégrale de GAUSS). Ainsi, on peut écrire

$(-1)^n v_n = \frac{(-1)^n I}{n} - (-1)^n u_n$. Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n I}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge d'après la question précédente. Par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \int_0^n e^{-t^2 n^2} \, dt$ converge.