ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 3 SÉRIES NUMÉRIQUES

3.1 Séries à termes positifs

3.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1-u_n$.

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Trouver $k \in]0\,;1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant kx_n$. En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$.

3.2 <u>*Mines PSI 2008 d'après RMS*</u> On suppose que la série de terme général $a_n > 0$ est divergente. Soit, pour tout entier n, $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{S_n}$. Déterminer la nature de la série de terme général b_n.

3.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général u_n converge.

Étudier la nature des séries de termes généraux $\dfrac{u_n}{R_n}$ et $\dfrac{u_n}{R_{n-1}}$.

3.4 Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissante de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation simple entre $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1})$. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature et que, quand elles convergent, elles ont la même somme.

b. En déduire l'existence et la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n+1}{n(n+1)^2}$.

3.5 Soit $a > 0$, on pose $u_n = n! \prod\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ quand $a \neq 1$?

b. Montrer que : $\forall x \in]0\,;1],\ \ln(1+x) \geqslant x - x^2$.

c. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ quand $a = 1$.

3.6 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = b_n + \dfrac{a_n}{b_n}$.

a. Justifier que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b. Montrer que : $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

3.7 <u>*Règle de* DUHAMEL-RAABE</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

a. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha < 1$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

c. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ alors $\exists A \in \mathbb{R},\ u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\alpha}$.

d. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

3.8 Soit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes strictement positifs telles que les $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est divergente, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

3.9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

b. Même question avec $v_n = \dfrac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n}$. On pourra étudier $\ln(1-v_n)$ dans le cadre de la divergence.

3.10 _X MP_ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, décroissante, de limite nulle. On suppose que la suite de terme général $v_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - nu_n$ est bornée. Montrer que la série de terme général u_n converge.

Indication : montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis s'intéresser au reste de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_n - u_{n+1})$.

3.11 _Mines PSI 2007 d'après RMS_ Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

Donner un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

3.12 _Centrale PSI 2012_ On se donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

a. Étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de u_0.

b. Soit $u_0 \in]-1\,;0[$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$ pour déduire avec l'exercice 8.3 un équivalent de u_n.

Dorénavant, on se place dans le cas où $u_0 > 0$ et on pose, pour tout entier n, le réel $v_n = \dfrac{1}{2^n} \ln\big(u_n\big)$.

c. Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}u_0}$.

En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\alpha > 0$.

d. Montrer que si $p \in \mathbb{N}$ est fixé : $\forall n \geqslant p,\ v_n - v_p \leqslant \dfrac{1}{2^p u_p}$. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} e^{2^n \alpha}$.

3.13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Que peut-on dire de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$?

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.

c. Exploiter $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ pour montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

d. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$ grâce à Cesaro.

3.14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Que peut-on dire de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$?

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

c. Exploiter $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ pour montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

d. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$ grâce à Cesaro.

3.15 _Critère de Cauchy_ Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs, on suppose que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+$.

a. Montrer que si $\ell > 1$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

b. Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

c. Observer que, lorsque $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

3.16 Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application bijective.

a. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sigma(n)^2}$.

b. Même question pour $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sigma(n)}$.

3.17 <u>*Centrale PSI 2013*</u> Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^a} \displaystyle\int_0^n \dfrac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b} dt$ quand cette intégrale existe.

a. Déterminer les réels b tels que u_n existe pour tout entier $n \geqslant 1$.

b. Dans les cas précédents, déterminer la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

3.2 Séries à termes quelconques

3.18 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Dans tout cet exercice, on se donne deux réels α et β.

a. À quelle condition la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge ? Si c'est le cas, quel est le signe de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$?

b. À quelle condition la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\beta}$ converge ? Si c'est le cas, montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\beta} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\beta-1)n^{\beta-1}}$.

c. Sous ces conditions, quand la série de terme général $w_n = \dfrac{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\beta}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}}$ converge-t-elle ?

3.19 Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente ; établir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z_n}{n}$ est convergente.

3.20 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k)$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{k}$.
Montrer que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et en déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

3.21 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$.

a. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ R_n + R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k(k+1)}$. En déduire un équivalent de R_n en $+\infty$.

b. Donner la nature de la série de terme général R_n.

3.22 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ positives telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.
Montrer que si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n diverge.

3.3 Calcul de somme

3.23 <u>*Centrale PSI 2012*</u> On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le réel : $u_n = \dfrac{1}{n} \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

a. Justifier que les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}\right)$ ont même nature.

b. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $\sum\limits_{k=1}^{3n} u_k$ en fonction de H_{3n} et H_n.

c. En déduire l'existence et la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

3.24 Calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ où $u_n = -\dfrac{2}{n}$ si $n \equiv 0[3]$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$ sinon.

3.25 Justifier l'existence et calculer la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

3.26 <u>*Centrale PSI 2012*</u> On note $d(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 10.

a. Montrer que $d(n) = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{d(n)}{n(n+1)}$ converge.

b. Déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d(n)}{n(n+1)}$.

3.27 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Indication : utiliser la formule de STIRLING.

3.28 <u>*CCP PSI 2007 d'après RMS*</u> Convergence et somme de : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$.

3.29 <u>*CCP PSI 2008 d'après RMS*</u> Soit $R_n = \sum\limits_{k\geqslant n+1} \dfrac{1}{k!}$. Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Calculer $\sum\limits_{n=0}^{p} R_n$ puis $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n$.

3.30 <u>*Mines MP*</u>

Convergence puis calcul de la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}^{+\infty} \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$.

3.4 Séries alternées

3.31 Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln\left(n + (-1)^n\right)}$.

3.32 Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ pour $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n) + (-1)^n}$.

3.33 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ le polygone régulier délimité par les racines complexes n-ièmes de l'unité, puis u_n le demi-périmètre de $\mathcal{P}_n$ et a_n l'aire du domaine délimité par $\mathcal{P}_n$.
Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\sin(u_n + n\pi)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\alpha \cos\left(\dfrac{a_n}{2}\right)$.

3.34 <u>*INT PSI 2007 d'après RMS*</u> On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-1)^n \cos(u_{n-1})}{n}$. Nature de la série de terme général u_n ?

3.35 <u>*Mines MP*</u> Nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$ où $a > 0$.

3.36 <u>*Mines MP*</u> Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3.37 <u>*CCP PSI 2010 d'après RMS*</u> Nature selon $a \in \mathbb{R}^*$ de la série de terme général $u_n = (n+2)^a - 2(n+1)^a + n^a$?

3.38 Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$.

3.39 <u>*Centrale PSI 2012*</u>

Soit $\alpha > 0$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

3.5 Comparaison série-intégrale

3.40 Soit $\alpha > 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On définit aussi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

a. Justifier l'existence (et les valeurs) des limites de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Rappeler $\lim_{n\to+\infty} S_n$ si $\alpha = 2$.

b. Trouver par comparaison série-intégrale un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.

c. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$?

3.41 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Même question avec la série de terme général $(-1)^n u_n$.

3.42 Pour $\alpha > 1$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Étudier, selon α, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$.

3.43 <u>*Centrale MP*</u> On pourra introduire dans ce qui suit la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$.

a. Donner un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{\ln p}{p}$.

b. À l'aide de la constante d'Euler, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

3.44 <u>*X MP*</u> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive et strictement croissante.

Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$.

3.45 Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$.

3.6 Produit de Cauchy

3.46 Établir que $e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$ si $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3.47 Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$.

3.48 Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ convergent.

Montrer la divergence de la série produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

3.7 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

3.49 *X-Cachan PSI 2013* Adrien

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, $b_n = a_n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$.

a. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, a-t-on toujours $c_n \underset{+\infty}{\sim} c_{n+1}$? Montrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} S_{n+1}$.

c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(S_{n+1}^2 - S_n^2\right) = 2$.

d. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Montrer alors que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. En déduire que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

e. Réciproquement, soit une suite réelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $c_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n \sum\limits_{k=0}^{n} c_k = 1$.

f. Que se passe-t-il si, avec ces hypothèses, on suppose que $b_n = a_n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{\alpha}$?

3.50 *Centrale PSI 2013* Gérémy

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note c_n le nombre de ces chiffres en base 10.

a. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{c_n}}{n}$.

a. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{c_n}}{n\ln(n)}$.

3.51 *Mines PSI 2013* Pierre-Simon

Caractériser la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ avec $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (n^2+i^2)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.52 *CCP PSI 2013* Camille

Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} (-1)^n \dfrac{\mathrm{Arctan}(n)}{\sqrt{n}\,\ln(n)^a}$ où a est un réel positif.

3.53 *Mines PSI 2014* Tanguy Sommet

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et on définit pour $p \in \mathbb{N}^*$ l'entier $n_p = \mathrm{Min}\left(\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}\right)$.

Donner un équivalent de n_p quand p tend vers $+\infty$.

Bonus : comment démontre-t-on que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$?

3.54 *E3A PSI 2014* Aymeline

a. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de u_n définie par $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}$.

b. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

c. (pas dans la planche) À l'aide de la constante d'Euler, calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

3.55 *Centrale Maths1 PSI 2015* Marin De Bonnières

a. Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ qui tend vers 0. On définit $\beta_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)$.

La suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

b. On pose $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Prouver que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

c. On pose $v_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

d. Convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$? Indication : on pourra trouver un équivalent de u_n.

3.56 *Mines PSI 2015* Térence Burcelin

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de $\sum\limits_{n\in A}\dfrac{1}{n^\alpha}$ où A est l'ensemble des entiers n dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 5.

3.57 *Mines PSI 2015* Arnaud Dubessay

Nature, selon $a \in \mathbb{R}$, de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n\rfloor}$.

3.58 *Mines PSI 2015* Guillaume Leroy

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs.

a. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

b. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge, soit $\lambda \in]1;+\infty[$, en considérant les ensembles $I = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \lambda a_n\}$ et $J = \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n^{1-\frac{1}{n}} > \lambda a_n\}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge et majorer sa somme en fonction de λ.

c. Que dire des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$?

Obtenir une inégalité (avec des racines carrées) sur leurs sommes quand elles existent.

3.59 *Centrale Maths1 PSI 2016* Antoine Badet II

Pour $n \geqslant 3$, on pose $P_n = X^n - nX + 1$.

a. Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ \exists! x_n \in]0;1[,\ P_n(x_n) = 0$.

b. Trouver a_n de la forme $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ (avec α à déterminer) tel que $x_n \underset{+\infty}{\sim} a_n$.

c. Trouver un développement asymptotique à deux termes de x_n.

3.60 *Centrale Maths1 PSI 2016* Adrien Boudy

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante. On suppose pour la premiere question que pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge.

a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, puis que $\ell = 0$.

On suppose maintenant que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

b. Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=N_i}^{N_{i+1}-1} u_k \geqslant 1$.

c. En déduire qu'il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0 telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ diverge.

d. Conclure.

3.61 *CCP PSI 2016* Alexis Iacono I

On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \dfrac{1}{3^n n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{3/4}}$.

a. Montrer qu'à partir d'un certain rang : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

b. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

3.62 *École Navale PSI 2016* Hugo Tarlé I

a. Déterminer un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.

b. Nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{u_n}$.

3.63 *Centrale Maths1 PSI 2017* Romain Delon

a. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ \exists! a_n \in \mathbb{R},\ e^{a_n} + n a_n = 2$.

b. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$?

c. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n$?

3.64 *Mines PSI 2017* Élio Garnaoui I

Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ où $u_n = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$ et $\alpha > 0$.

3.65 *Mines PSI 2017* Claire Raulin I

Soit $a > 0$, étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}\sin\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)$.

3.66 *CCP PSI 2017* Tom Huix I

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, trouver une CNS sur P pour que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si $u_n = \sqrt[4]{n^4+n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$.

3.67 *E3A PSI 2017* Joseph Dumoulin

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a. Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. Indication : considérer $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ (analogie avec $y' = -y^2$) et utiliser le théorème de Cesaro (dont l'énoncé était rappelé).

3.68 *ICNA PSI 2017 avec préparation* Aloïs Blarre

Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ continue et bijective telle que f^{-1} est continue et $\forall x \in [0;1],\ f(2x - f(x)) = x$.

a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. f est-elle croissante ou décroissante ?

b. Soit $x_0 \in [0;1]$ tel que $x_1 = f(x_0) \neq x_0$ et $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $x_{n+1} = f(x_n)$. Calculer $x_n - x_0$.

c. En déduire f.

3.69 *Petites Mines PSI 2017* Cléa Maricourt I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

a. Calculer u_0 et u_1.

b. Montre que $\forall x \geqslant 0,\ \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

d. Donner la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$.

3.70 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Elio Garnaoui I

Soit un réel $\alpha > 0$, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ décroissante, continue et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_n = \int_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{((n+1)\pi)^{1/\alpha}} x^{\alpha-1} f(x)\sin(x^\alpha)\mathrm{d}x$.

a. Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

c. Montrer que $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x)\sin(x^\alpha)\mathrm{d}x$ converge.

3.71 *Centrale Maths1 PSI 2018* Jean-Baptiste Malagnoux

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante telle que $u_0 = 1$. On pose $\forall n \geqslant 1,\ p_n = u_{n-1} - u_n$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $\sum\limits_{n\geqslant 1} p_n$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

b. Sous quelle condition a-t-on l'équivalence : $\big(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge$\big) \Longleftrightarrow \big(\sum\limits_{n\geqslant 1} np_n$ converge$\big)$.

c. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1, positive et décroissante. Quelle condition sur f nous donne l'équivalence suivante : (f intégrable sur $\mathbb{R}_+$) $\Longleftrightarrow$ ($t \mapsto tf'(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$) ?

3.72 *Centrale Maths1 PSI 2018* Paul Simon

Soit $t \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t\ln(x))}{x}\mathrm{d}x$.

b. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos(t\ln(n))}{n}$.

Question de cours : énoncer le théorème de comparaison série-intégrale.

3.73 *Mines PSI 2018* Elisabeth Carreau-Gaschereau I

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x \big(\pi|\sin(t)| - 2\big)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ si on pose $u_n = \int_{n\pi}^{+\infty} \dfrac{\pi|\sin(t)| - 2}{t}\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Montrer la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

3.74 *Mines PSI 2018* Amélie Guyot II

Nature de la série de terme général $u_n = \left(\sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1}\right)^n$ selon les valeurs des réels a et b.

3.75 *Mines PSI 2018* Sonia-Laure Hadj-Sassi I

a. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \ln(e^{v_n} - v_n)$.

b. Montrer la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$. Déterminer la valeur exacte de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

3.76 *Mines PSI 2018* Antoine Secher II

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{n}\right) - \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Étudier les convergences des séries numériques $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$.

3.77 *Petites Mines PSI 2018* Marie-Jeanne Paul II

Soit un réel $a > 0$. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \big(\mathrm{Arctan}(n+a) - \mathrm{Arctan}(n)\big)$?

3.78 *ENS Cachan PSI 2019* Louis Destarac

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\alpha > 1$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha}} = \ell > 0$.

On cherche à montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang N.

b. Si $\alpha < 2$, montrer que $\forall n \geqslant N,\ \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \leqslant \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt$.

En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}$ converge ; puis que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

c. Si $\alpha \geqslant 2$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}}$ diverge ; puis que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

3.79 *ENS Cachan PSI 2019* Mathis Girard

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive et décroissante tendant vers 0 telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

a. Montrer que $(|R_n|)_{n\geqslant -1}$ est monotone (R_{-1} est la somme de la série).

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{u_n}{2}$.

c. Déterminer un équivalent de R_n.

d. Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

3.80 *ENS Cachan PSI 2019* Thomas Méot

Soit Φ une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $\forall k \geqslant 0,\ \exists (a_0, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1},\ \Phi(x) = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \cdots + \dfrac{a_k}{x^k} + \dfrac{\varepsilon_k(x)}{x^k}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon_k(x) = 0$.

a. À quelles conditions $\sum\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge-t-elle ?

b. À quelles conditions $\prod\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge-t-il ?

c. À quelles conditions $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ converge-t-elle ?

d. Pour quelles valeurs de α la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(2 - e^{\frac{\alpha}{k}}\right)$ converge-t-elle ?

3.81 *Mines PSI 2019* Paul Louzier II

Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n + 1}{2}}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - x_n$.

a. Étuier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$.

3.82 *Mines PSI 2019* Léo Simplet II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement supérieurs à -1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{\prod\limits_{k=0}^{n} (1 + u_k)}$.

Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$.

3.83 *CCP PSI 2019* Thomas Crété I

a. Montrer l'existence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, du réel $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$.

b. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)! R_n = 1$.

c. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \sin(2\pi e n!)$?

3.84 *Centrale Maths1 PSI 2021* Mathilde Arnaud

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = xe^x$.

a. Tracer le graphe de f. Montrer que f est bijective. Tracer le graphe de f^{-1}.

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la suite $\big(u_n(a)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(a) e^{u_{n+1}(a)} = u_n(a)$.

b. Étudier la convergence de la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$.

c. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n(a)$.

Question de cours : Rappeler la formule de Taylor reste intégral.

3.85 _Mines PSI 2021_ Robin Gondeau I

On admet que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ où γ est une constante réelle.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}u_n$.

a. Montrer qu'il existe une suite convergente $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) = -\frac{3}{2}\ln(n) + w_n$.

b. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ 2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$.

d. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3.86 _Mines PSI 2021_ Yuan Le Guennic III

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{2\}$, étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{\frac{nz}{z-2}}$ selon la valeur de z.

3.87 _Mines PSI 2021_ Guillaume Touly III

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, que dire de la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$?

3.88 _CCINP PSI 2021_ Maëva Berland I

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2}$.

b. En déduire que la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ implique la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. La réciproque est-elle vraie ? Indication : on pourra considérer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

3.89 _CCINP PSI 2021_ Alexandre Marque et Adèle Robert II

Déterminer la nature des séries suivantes :

a. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

b. $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \int_0^n e^{-t^2n^2}\,dt$.

3.90 _Mines PSI 2022_ Margaux Millaret II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$.

a. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

b. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

c. Donner sans preuve la valeur de C. Puis le prouver avec les intégrales de Wallis.

3.91 *CCINP PSI 2022* Amandine Darrigade et Thomas Lanne I

Soit les trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$, $(w_n)_{n\geqslant 1}$ et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}},\ v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n,\ w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad x_n = (-1)^n w_n.$$

a. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.

b. Justifier que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$?

d. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$?

3.92 *CCINP PSI 2022* Louis Lacarrieu II

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)\times\cdots\times(1+a_n)}$.

a. Calculer $u_1 + u_2$. Généraliser.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

c. Dans cette question, on suppose que $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

3.93 *Mines-Télécom PSI 2022* Jade Mirassou II

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit, en cas d'existence, $u_k = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan(x))^k dx$.

a. Étudier la monotonie de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

b. Déterminer la limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

c. Donner une expression simple de $u_k + u_{k+2}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

d. Calculer u_0 et u_1. En déduire des expressions de u_{2n} et u_{2n+1} sous forme de somme.

e. En déduire la convergence et la valeur de la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

3.94 *ENS Cachan PSI 2023* Raphaël Déniel

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n > 0,\ v_n > 0$.

Pour tout entier $n \geqslant N$, on pose $w_n = v_n - \dfrac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n}$.

a. On suppose que $\exists c \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \geqslant N,\ w_n \geqslant c$ et que $\sum\limits_{n\geqslant N} \dfrac{1}{v_n}$ converge, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

b. On suppose que $\forall n \geqslant N,\ w_n \leqslant 0$ et que $\sum\limits_{n\geqslant N} \dfrac{1}{v_n}$ diverge, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

c. On suppose que $\exists c \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \dfrac{1+c}{n}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

d. On suppose que $\forall n \geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

e. Soit $A \in \mathbb{R}$, $s > 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée tels que $\forall n \geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{A}{n} + \dfrac{f(s)}{n^s}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $A > 1$.

f. Pour quels $\alpha > 0$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)^{\alpha}$ converge ?

3.95 *Centrale Maths1 PSI 2023* Maddie Bisch

a. Existe-t-il une suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g_{n+1}-g_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{g_n}}$?

b. Existe-t-il $(A,\alpha)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ tel qu'en posant $v_n = An^{\alpha}$, on ait $v_{n+1}-v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$?

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

Soit $\beta>0$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, le réel $p_n=\left(\dfrac{1}{u_n}\right)^{\beta}-\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)^{\beta}$.

c. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n$ est une série convergente à termes positifs telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

d. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}\leqslant u_n\leqslant 2n$.

e. Trouver un réel m tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^m-u_n^m)=\lambda\neq 0\in\mathbb{R}$. En déduire avec Cesaro que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2/3} n^{\frac{2}{3}}$.

f. Déterminer les valeurs de $\beta>0$ pour lesquelles $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n u_n$ est convergente.

3.96 *Mines PSI 2023* Tom Graciet II

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

a. Déterminer le développement asymptotique de H_n à la précision $o(1)$.

b. En déduire la limite de $(H_{2n}-H_n)_{n\geqslant 1}$.

c. Retrouver la limite de $(H_{2n}-H_n)_{n\geqslant 1}$ avec une somme de Riemann.

d. Grâce au développement de H_n, calculer $S_1=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(2n-1)}$ et $S_3=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}$.

3.97 *CCINP PSI 2023* Armand Dépée I

Soit les trois suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$, $(w_n)_{n\geqslant 1}$ et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}},\ v_n=\frac{(-1)^n}{n}u_n,\ w_n=\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\quad\text{et}\quad x_n=(-1)^n w_n.$$

a. Justifier que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.

b. Justifier que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

c. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$?

d. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$?

3.8 Officiel de la Taupe

3.98 *OdlT 2012/2013 Centrale PSI planche 128 I*

Démontrer le critère de condensation de CAUCHY : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, positive et décroissante, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^n a_{2^n}$ converge.

En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}$. Retrouvez ce résultat sans utiliser ce critère.

Mêmes questions pour la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$.

3.99 *OdlT 2012/2013 CCP PSI planche 212 I et CCP PSI planche 277 I*

a. Montrer que l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$ possède une unique solution $x_n \in [0;1]$.
b. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge vers 0.
c. Trouver un équivalent de x_n et étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$.

3.100 *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 193 II*

Convergence de la série de terme général $u_n = \mathrm{Argch}\,(n) - \mathrm{Argsh}\,(n)$.

3.101 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 170 I* On donne $a_0 > 0$.

a. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.
b. Nature des séries de terme général $(-1)^n a_n$ et a_n^2.
c. Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ (on pourra étudier $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$).

3.102 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 274 II*

On dispose d'un alphabet de n lettres avec $n \geqslant 1$.
On note M_n le nombre de mots contenant au plus une fois la même lettre. Montrer que $M_n = \lfloor n!e \rfloor$.

3.103 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 292 I*

a. Déterminer un polynôme P de degré 3 tel que $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = P(n)$.
b. On pose $a_n = \dfrac{1}{\sigma_n}$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
c. On pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(H_{2n} - H_n\big) = \ln(2)$.
d. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3.104 *OdlT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 323 I*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$ et $b_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ et on suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ est absolument convergente.
a. Donner une relation entre $\sin(n-1)$ et $\cos(n)$ et en déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ est convergente.
b. Montrer que $|\cos(n)| + |\sin(n)| \geqslant 1$. Que conclure ?

3.105 *OdlT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 44*

Soit Φ continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall k \geqslant 0,\ \Phi(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_k}{x^k} + \frac{\varepsilon_k(x)}{x^k}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon_k(x) = 0$.

À quelles conditions sur les a_i, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge-t-elle ?

À quelles conditions sur les a_i, $\prod\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge-t-il ?

À quelles conditions sur les a_i, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ converge-t-elle ?

Pour quelles valeurs de α, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{i=1}^{n} \left(2 - e^{\frac{\alpha}{i}}\right)$ converge-t-elle ?

3.106 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 116I*

On définit une suite (u_n) par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = f_n(u_n)$ avec $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$.

Si elle existe, déterminer la limite de (u_n).

Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant \frac{1}{n}$. Montrer que (nu_n) est croissante et trouver un équivalent de u_n.

3.107 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 121I* Calculer $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{(3n)!}$.

3.108 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 233II*

On rappelle que la série harmonique alternée $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et que sa somme vaut $-\ln(2)$.

Montrer qu'il existe a, b, c réels tels que $\dfrac{1}{4X^3 - X} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{2X-1} + \dfrac{c}{2X+1}$.

Montrer que $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k}\right)$ et $\sum\limits_{k \geqslant 2} \left(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k}\right)$ convergent et calculer leurs sommes.

Montrer que $\sum\limits_{k \geqslant 2} \dfrac{1}{4k^3 - k}$ converge et calculer sa somme. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{4x^3 - x}$ converge-t-elle ? Si oui, la calculer.

3.109 *OdlT 2015/2016 ENSEA planche 282I*

Montrer que $P_n(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x^k\right) - 1$ admet une unique racine $x_n \geqslant 0$ et étudier la suite (x_n).

3.110 *OdlT 2015/2016 Télécom SudParis planche 284II*

Soit une suite de terme général $u_n > 0$ vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$ avec $\lambda > 1$.

Montrer que $\sum u_n$ converge (on pourra faire un développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ où $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$).

3.111 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 118II*

Convergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(nt^2)\mathrm{d}t$.

3.112 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 121I abordable dès la 1ère année*

Par une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k}$, défini pour $n \geqslant 2$.

Étudier la monotonie et la convergence de la suite de terme général $v_n = u_n - \frac{1}{2}\ln^2(n)$.

On admet que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$; montrer que $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^k \ln(k)}{k} = \ln(2)\left(\gamma - \dfrac{\ln(2)}{2}\right)$.

3.113 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 165 abordable dès la 1ère année*

On définit une suite de réels $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}$ (1).

Donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{x_n}$. Quel lien y a-t-il entre x_{n+1} et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2}$? Trouver un équivalent de x_n.

3.114 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 206I*

Montrer que la suite de terme général u_n, donné par $u_0\in[0;\pi]$ et $u_{n+1}=1-\cos(u_n)$, converge vers 0. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

3.115 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 214II*

Soit, pour $\alpha>1$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $R_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ au voisinage de $+\infty$.

Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{R_n}{S_n}$ suivant la valeur de α.

3.116 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 219I et OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 235I*

Montrer que la série de terme général $u_n=\ln(2n+(-1)^n)-\ln(2n)$ converge mais pas absolument.

3.117 *OdlT 2016/2017 ENSEA PSI planche 250II abordable dès la 1ère année*

Convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left((n+(-1)^n)^\alpha-n^\alpha\right)$ pour $\alpha\in]0;1[$.

3.118 *OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 116I*

Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{(1+2i)^n}$.

3.119 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 207I, abordable dès la première année*

Donner un équivalent de $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers $+\infty$.

3.120 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 208II*

Convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)$ pour $\alpha>0$.

3.121 *Compléments OdlT 2017/2018 Mines PSI planche 175III*

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ pour $a\in\mathbb{R}_+^*$.

3.122 *Compléments OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 452I et 453I*

On note $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $a_n=\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(H_{2n+1}-H_n)=\ln 2$ et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n$ converge.

Déterminer a,b,c réels tels que $a_n=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{2n+1}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

3.123 *Compléments OdlT 2017/2018 ENSEA PSI planche 581I*

Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin(x)|^x\,dx$. Montrer que $\forall t\in\Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big]$, $\sin t\geqslant\dfrac{2}{\pi}t$.

Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}|\sin(x)|^x\,dx$.

3.124 *OdlT 2018/2019 Mines PSI planche 115II et compléments Centrale PSI planche 169*

a. Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1)$.

c. Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$.

d. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ (utiliser un développement asymptotique de la série harmonique).

3.125 *Compléments OdlT 2018/2019 ENTPE PSI planche 430I*

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = xe^x - n$ admet un unique zéro u_n strictement positif.

b. Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $1 \leqslant u_n \leqslant \ln n$. Puis que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Trouver un équivalent de $u_n - \ln n$.

3.126 *Compléments OdlT 2018/2019 IMT PSI planche 442II*

Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n + (-1)^n}\right)$.