SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 3 SÉRIES NUMÉRIQUES

3.1 Séries à termes positifs

3.1 **a.** Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ alors $[0\,;1]$ est stable par f et $f(x) > x$ si $0 < x < 1$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, majorée par 1 donc elle converge et comme le seul point fixe de f est 1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} = f(1) - f(u_n) = f'(v_n)(1-u_n)$ d'après le théorème des accroissements finis donc comme $|f'(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ après calculs, on peut prendre $k = \dfrac{\sqrt{2}}{4} < 1$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ converge car majorée par une série géométrique de raison $k < 1$. On a même mieux en utilisant la quantité conjuguée dans l'expression (pour $n > 0$) de $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{2\big(1+\sqrt{1+u_n 2}\big)} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}$.

3.2 Si b_n ne tend pas vers 0, la divergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ est grossière. Sinon, comme $b_n = \dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_n}$, on a $b_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(1+b_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(S_{n+1}) - \ln(S_n) > 0$ or $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)$ diverge par télescopage et par hypothèse.

3.3 Par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, on a $\displaystyle\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{R_{n-1}-R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}$ d'où $\ln(R_{n-1}) - \ln(R_n) \leqslant \dfrac{u_n}{R_n}$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(R_n)$ diverge grossièrement car $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$. Ainsi, par comparaison : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{R_n}$ diverge.

Ensuite, on écrit $\dfrac{u_n}{R_n} = \dfrac{u_n}{R_{n-1}-u_n} = \dfrac{u_n}{R_{n-1}} \times \dfrac{1}{1-\frac{u_n}{R_{n-1}}}$ et on distingue les deux cas :

- si $\frac{u_n}{R_{n-1}}$ tend vers 0, alors $\dfrac{u_n}{R_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{R_{n-1}}$ donc la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_{n-1}}$ diverge.
- si $\frac{u_n}{R_{n-1}}$ ne tend pas vers 0, alors la série de terme général $\dfrac{u_n}{R_{n-1}}$ diverge grossièrement.

3.4 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n - nu_{n+1}$. D'abord, si $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} n(u_n - u_{n+1})$ converge aussi car $T_n \leqslant S_n$. $S_{2n} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant nu_{2n}$ donc $2nu_{2n} \to 0+$; de même $(2n+1)u_{2n+1} \to 0+$ et on a bien $nu_n \to 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Ensuite, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, si $\sum\limits_{n\geqslant 1} n(u_n - u_{n+1})$ converge : $nu_n = n\sum\limits_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{n}{k}\Big(k(u_k - u_{k+1})\Big) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1}) \to 0$ donc $nu_n \to 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

b. Elle vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$ en prenant $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ car $u_k - u_{k+1} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

3.5 **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$ donc convergence quand $a < 1$ et divergence si $a > 1$.

b. C'est une simple étude de fonction.

c. Dans ce cas, on a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$ donc la suite $(nu_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et on a donc $\forall n \geqslant 1,\ nu_n \geqslant u_1 \iff u_n \geqslant \dfrac{u_1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ divergence car $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

3.6 Par une récurrence simple, on montre que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, b_n est bien défini et strictement positif. Ainsi, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Comme $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n}{b_n} > 0$, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. D'après le théorème de la limite monotone, soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n(b_{n+1} - b_n)$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par opérations. En passant à la limite dans la relation $a_n = b_n(b_{n+1} - b_n)$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell(\ell - \ell) = 0$.
b. ($\Longrightarrow$) Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, comme $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $b_0 = 1$, on a $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \geqslant 1 > 0$. Par dualité suite-série, $\sum\limits_{n\geqslant 0} (b_{n+1} - b_n)$ converge. De plus, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n}{b_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{\ell}$ donc, par comparaison (les termes sont positifs), la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{\ell}$ converge et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge aussi.
($\Longleftarrow$) Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \geqslant 1$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_{n+1} - b_n \leqslant a_n$. Puisque $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} (b_{n+1} - b_n)$ converge donc, par dualité suite-série, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Par double implication, on a bien établi l'équivalence : $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

3.7 **a.** Soit β tel que $1 < \beta < \alpha$, posons $v_n = n^\beta u_n > 0$, alors $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \beta \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ donc $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) + \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ car $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$. Comme $\beta - \alpha < 0$, la suite $(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ devient négative à partir d'un certain rang et $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\beta - \alpha}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ diverge et on a même plus précisément $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$ par télescopage. On en déduit en passant à l'exponentielle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc que $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ ce qui garantit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ par comparaison aux séries de Riemann.
b. Dans la même idée, posons $v_n = n u_n > 0$, alors $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ donc $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1 - \alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Comme $1 - \alpha > 0$, la suite $(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ devient positive à partir d'un certain rang n_0 donc $\forall n \geqslant n_0,\ v_{n+1} \geqslant v_n$. On en déduit que $\forall n \geqslant n_0,\ v_n \geqslant v_{n_0}$ d'où $u_n \geqslant \dfrac{n_0 u_{n_0}}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique.
c. Posons cette fois-ci $v_n = n^\alpha u_n > 0$, alors $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ donc il vient $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{=} \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) + \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + O(x^2)$. Comme $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on en déduit la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$. Par le théorème de dualité suite/série, on a donc la convergence de la suite $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ d'où, par continuité de la fonction $\exp$, la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $A = e^\ell > 0$. Ceci nous permet de conclure que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\alpha}$.
d. On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{2n+2} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge avec la question **b.** et il existe même une constante $A > 0$ telle que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{\sqrt{n}}$ d'après la question **c.**.

Plus simplement, on utilise l'équivalent de Stirling pour avoir $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)(n/e)^{2n}}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec une conclusion plus précise. Toujours est-il que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par Riemann.

3.8 Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |a_n - b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} a_n$ car $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \iff a_n - b_n \underset{+\infty}{=} o(a_n)$. Alors, pour $n \geqslant n_0$, $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} |a_k - b_k| + \frac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k \leqslant S_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ par inégalité triangulaire. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = +\infty$, on a $\exists n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \geqslant \frac{2S_{n_0}}{\varepsilon}$. Ainsi, pour $n \geqslant n_1$, , on a : $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right| \leqslant \varepsilon \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

3.9 **a.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $u_n = \dfrac{v_n}{1 - v_n}$. Ainsi, on pourra traiter les deux cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et on a $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et on a divergence grossière.

Ou alors supposer la convergence de l'une des deux séries et montrer l'équivalence des deux suites.

b. On a bien $0 < v_n < 1$ donc $\ln(1 - v_n)$ est défini. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge vers $S > 0$, alors $v_n \underset{\infty}{\sim} \frac{u_n}{S}$. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, alors, comme $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1 - v_k) = \ln\left(\dfrac{u_0}{u_0 + \cdots + u_n}\right)$ tend vers $-\infty$, on distingue selon que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ou pas pour montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente.

3.10 On a $v_{n+1} - v_n = n(u_n - u_{n+1}) \geqslant 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc converge vers ℓ. On a $0 \leqslant u_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{n}\Big(v_{n+1} - v_n\Big) \leqslant v_{n+1} - v_n$ donc, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (u_n - u_{n+1})$ converge car $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge (vers $\ell - v_1$). Alors, pour un entier $n \geqslant 1$, il vient $R_{n-1} = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k}\Big(v_{k+1} - v_k\Big) \leqslant \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \dfrac{\ell - v_n}{n}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \ell$.

3.11 Il est clair que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante et si elle convergeait, ce serait vers $\ell > 0$ vérifiant $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ NON. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Alors on calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x_{n+1}^2 - x_n^2\right) = 2$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2$ étant divergente, d'après ???? ou les moyennes de Cesaro : $\sum\limits_{k=0}^{n} (x_{k+1}^2 - x_k^2) \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} 2$ donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

3.12 **a.** Si $u_0 \in [-1\,;0]$, la suite tend vers 0. Sinon elle tend vers $+\infty$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right) = -1$ donc d'après l'exercice 8.3 : $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc $u_n \geqslant u_0 > 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et vérifie l'inégalité de l'énoncé grâce à l'inégalité rappelée car $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

En sommant et en télescopant, on arrive à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée par $v_0 + \dfrac{1}{u_0}$ donc elle converge car elle est croissante majorée et vers $\alpha > 0$ car il existe un m tel que $u_m > 1$.

d. Puisque : $\forall k \geqslant p,\ u_k \geqslant u_p$, on a $v_{k+1} - v_k \leqslant \dfrac{1}{2^{k+1} u_p}$ et on somme pour avoir : $\forall n \geqslant p,\ v_n - v_p \leqslant \dfrac{1}{2^p u_p}$.

On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente et on obtient $\alpha - \dfrac{1}{2^p u_p} \leqslant v_p \leqslant \alpha$ d'où $e^{2^p\alpha} e^{-1/u_p} \leqslant u_p \leqslant e^{2^p\alpha}$ et on conclut car $u_p \mapsto +\infty$.

3.13 **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : elle tend vers 0 car $\sin(\ell)=\ell \Longrightarrow \ell=0$. Cette série converge par le critère spécial des séries alternées.
b. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n+1}-u_n$ converge et $u_{n+1}-u_n \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{6}u_n^3$, on a $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.
c. $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$ diverge comme $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, or $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{6}u_n^2$: $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.
d. $\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{3}$ par développements limités donc par le théorème de CESARO $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}=\frac{1}{3}$ (ou avec l'exercice 8.3) donc $u_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$: ce qui rend plus facile les questions précédentes.

3.14 **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : elle tend vers 0 car $\ell = 1-e^{-\ell} \Longrightarrow \ell=0$. Cette série converge par le critère spécial des séries alternées.
b. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n+1}-u_n$ converge et $u_{n+1}-u_n \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{2}u_n^2$, on a $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.
c. $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$ diverge comme $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, or $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{2}u_n$: $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
d. $\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ par développements limités donc par le théorème de CESARO $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k}=\frac{1}{2}$ (ou avec l'exercice 8.3) donc $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{n}$: ce qui rend plus facile les questions précédentes.

3.15 **a.** Si $\ell>1$, comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} \to \ell > 1$ il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ \sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$ ce qui donne aussi $u_n\geqslant 1$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ divergente grossièrement.
b. Si $\ell<1$, en posant $k=\frac{1+\ell}{2}$, $\ell<k<1$ et il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ \sqrt[n]{u_n}\leqslant k \Longrightarrow 0\leqslant u_n\leqslant k^n$. Et comme $\sum_{n\geqslant 0} k^n$ converge, on a bien $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ convergente par comparaison aux séries géométriques.
c. Si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $u_n=\frac{1}{n^\alpha}$ pour $n\geqslant 1$, on a $\sqrt[n]{u_n}=n^{\frac{-\alpha}{n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell=1$ alors qu'on ne peut rien dire de la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. En effet, par RIEMANN, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si $\alpha>1$ et diverge si $\alpha\leqslant 1$.

3.16 **a.** Pour $n\geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma(k)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{\pi^2}{6}$ car les entiers de $\sigma([\![1;n]\!])$ sont dans leur ensemble supérieur aux entiers de $[\![1;n]\!]$ car σ est injective. Comme la série est à termes positifs et que ses sommes partielles sont majorées, elle converge.
b. Soit $n\geqslant 1$, les valeurs de $[\![1;n]\!]$ sont prises par la fonction σ surjective donc il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $[\![1;n]\!]\subset\sigma([\![1;p]\!])$. Alors $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sigma(k)}=S_p$. D'où $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sigma(n)}$ diverge car $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

3.17 **a.** Posons $f(t)=\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}$ pout $t>0$, alors $f(t)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{t^{b-1}}$ donc u_n existe (et ceci indépendamment de la valeur de n) si et seulement si $b<2$ par le critère de RIEMANN.
b. • Soit maintenant $b<2$, alors comme $f(t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2t^b}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $b>1$ et nous poserons dans ce cas $I_b=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}dt>0$ (si $b\in]1;2[$ donc).

• Si $b<1$, par IPP, $\int_0^{n}\frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}dt=\frac{\mathrm{Arctan}(n)}{(1-b)n^{b-1}}-\int_0^{n}\frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ et $g : t\mapsto\frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $b>0$ et dans ce cas, on note $J_b=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}>0$ (si $b\in]0;1[$ donc).

• Si $b \leqslant 0$, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}\mathrm{d}t$ diverge, on a $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}\mathrm{d}t$ et on encadre $\displaystyle\frac{\pi}{4}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^b} \int_1^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^b}$ donc $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}\mathrm{d}t$ est "de l'ordre de" $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^b}$ donc de $\dfrac{1}{n^{b-1}}$.

• Enfin, si $b = 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge aussi, et comme $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^b}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\mathrm{Arctan}(1/t)\mathrm{d}t}{t^b}$, on a $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi\ln(n)}{2}$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(1/t)}{t^b}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

• Si $b \in]1;2[$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{I_b}{n^a}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$.

• Si $b \in]0;1[$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{(1-b)n^{a+b-1}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a + b > 2$.

• Si $b \in]-\infty;0]$, on a donc (par majoration ou minoration) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a + b > 2$.

• Si $b = 1$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi\ln(n)}{2n^a}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$ (Bertrand).

3.2 Séries à termes quelconques

3.18 **a.** D'après le critère spécial des séries alternées, la CNS est $\alpha > 0$. Dans ce cas, comme le premier terme est strictement positif, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} > 0$.

b. D'après le critère de Riemann, c'est $\beta > 1$. C'est une comparaison série-intégrale.

c. La CNS est $\beta > 2$ d'après le critère de Riemann car $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell_\alpha(\beta-1)n^{\beta-1}}$.

3.19 On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n z_k$ et, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1}$ avec $S_0 = 0$ par une transformation d'Abel. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n+1}$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n+1}$ car $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\dfrac{S_n}{n(n+1)} \underset{\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{S_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente. C'est fini !

3.20 On a $T_n = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ik}\right) = \mathrm{Im}\left(e^i \dfrac{1-e^{in}}{1-e^i}\right)$ donc $|T_n| \leqslant \dfrac{2}{|1-e^i|}$. En posant $T_0 = 0$, on a ainsi : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{T_k - T_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T_k}{k+1}$. Alors : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{T_k}{k(k+1)} + \frac{T_n}{n+1}$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{n+1}$ car $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\dfrac{T_n}{n(n+1)} \underset{\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{T_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente.

3.21 **a.** D'après le CSSA, R_n existe. De plus, par un changement d'indice dans la série R_{n+1}, on obtient facilement la relation proposée. Mais $R_n - R_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ donc $2R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ or toujours d'après le CSSA, on a $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ donc $R_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$.

b. Comme on a $R_n \underset{\infty}{=} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on a $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} R_n$ convergente.

3.22 Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+n^2u_n) = +\infty$ donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2u_n}$ et $\sqrt{u_nv_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Par conséquent $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{u_nv_n}$ diverge. Mais par l'inégalité classique de CAUCHY-SCHWARZ, on a : $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{u_kv_k}\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{k=0}^{n} uk\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right) \leqslant \left(\sum\limits_{k=0}^{n} uk\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$. Donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

3.3 Calcul de somme

3.23 **a.** C'est la sommation par tranches sachant que le terme général tend vers 0.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum\limits_{k=1}^{3n} u_k = -\dfrac{1}{2}H_{3n} + \dfrac{1}{2}H_n$.

c. Avec l'équivalent rappelé, on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = -\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

3.24 On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, alors $S_{3n} = H_{3n} - H_n \underset{\infty}{=} \ln(3n)+\gamma+o(1)-\ln(n)-\gamma+o(1) \underset{\infty}{=} \ln 3+o(1)$ où $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Comme on a aussi $S_{3n+1} = S_{3n} + \dfrac{1}{3n+1}$ et $S_{3n+2} = S_{3n+1} + \dfrac{1}{3n+2}$, d'où $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(3)$.

3.25 En posant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples et on a $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(2k-1)} = 2H_{2n} - 2H_n \underset{\infty}{=} 2\ln(2n)+2\gamma-2\ln(n)-2\gamma+o(1) \underset{\infty}{=} 2\ln 2+o(1)$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(2n-1)} = 2\ln(2)$.

3.26 **a.** Les nombres à k chiffres sont ceux compris entre $(10\cdots 0)$ (un 1 et $k-1$ fois 0) et $(9\cdots 9)$ (k fois 9). Ainsi, par définition de $d(n)$, on a l'encadrement $10^{d(n)-1} \leqslant n \leqslant 10^{d(n)} - 1$ ce qui s'écrit aussi, comme n est un entier : $10^{d(n)-1} \leqslant n < 10^{d(n)}$. En passant cette inégalité au $\ln$ qui est strictement croissante, on obtient donc $d(n) - 1 \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} < d(n)$ d'où $d(n) = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$ par propriété de la partie entière. En posant $u_n = \dfrac{d(n)}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et puisque l'inégalité $\dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} < d(n) \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} + 1$ garantit que $d(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}$, il vient $\dfrac{d(n)}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ par croissances comparées d'où la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{d(n)}{n(n+1)}$ par comparaison et critère de RIEMANN.

b. En notant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, on obtient par télescopage $S_{10^p-1} = \sum\limits_{n=1}^{10^p-1} \dfrac{d(n)}{n(n+1)} = \sum\limits_{k=1}^{p} \left(\sum\limits_{j=10^{k-1}}^{10^k-1} \dfrac{d(j)}{j} - \dfrac{d(j)}{j+1} \right)$ et, sur cet "intervalle", $d(j) = k$ donc $S_{10^p-1} = \sum\limits_{k=1}^{p} k\left(\dfrac{1}{10^{k-1}} - \dfrac{1}{10^k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \dfrac{k+1}{10^k} - \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{k}{10^k}$ (en changeant d'indice dans la première somme) d'où $S_{10^p-1} = \left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} \dfrac{1}{10^k}\right) - \dfrac{p}{10^p}$. Par conséquent, comme $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{p}{10^p} = 0$ par croissances comparées et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{10^k} = \dfrac{1}{1-(1/10)} = \dfrac{10}{9}$ (série géométrique), on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d(n)}{n(n+1)} = \dfrac{10}{9}$.

3.27 Pour la convergence, c'est le critère spécial des séries alternées. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$\sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4}\right)$. Donc on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ avec STIRLING.

3.28 On pose $u_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$ pour $n \geqslant 1$, la plupart des u_n sont nuls. Précisons : soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $p^2 \leqslant n \leqslant (p+1)^2 - 2$, alors on a l'inégalité $p \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{(p+1)^2-2} < p+1$ mais aussi $p \leqslant \sqrt{p^2+1} \leqslant \sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{(p+1)^2-1} < p+1$. Ainsi $\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = p - p = 0$. Par conséquent, les seuls termes u_n non nuls sont ceux d'indice p^2-1 pour $p \geqslant 2$. Ainsi, pour $m \geqslant 2$, on calcule la somme partielle $S_{m^2-1} = \sum_{k=1}^{m^2-1} u_k = \sum_{p=2}^{m} \frac{p+1-p}{p^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{m}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$. Par télescopage : $\lim_{m\to+\infty} S_{m^2-1} = \frac{1}{2}$. Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, elle converge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n^2-1} = \frac{1}{2}$.

3.29 $(n+1)!\left(R_n - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{p=n+3}^{k} p} \leqslant \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)^k}$ car $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+3)^n}$ converge. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(n+1)!\left(R_n - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 0$ donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$.

On a $\sum_{n=0}^{p} R_n = (e-1) + (e-1-1) + (e-1-\frac{1}{2}) + \cdots + (e - S_p) = \sum_{n=0}^{p}(e - S_n) = (p+1)e - \sum_{k=0}^{p}\frac{p-k+1}{k!}$.
Ainsi $\sum_{n=0}^{p} R_n = e + p(e - S_p) + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} R_n = e$.

3.30 Si on note $u_n = \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge par comparaison à la série de Riemann ($2 > 1$). On sait que $u_n = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$ qu'on décompose en éléments simples. On sait qu'il existe trois constantes réelles a, b et c telles que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$ et les techniques habituelles permettent le calcul $a = 6$, $b = 6$ et $c = -24$. On calcule maintenant sur les sommes partielles en notant $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ on a $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1}\right)$. On rajoute les termes pairs qui manquent : $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{24}{2k+1} - \frac{24}{2k} + \frac{24}{2k}\right) = 24H_n + \frac{6}{n+1} - 6 - 24H_{2n} + 24 - \frac{24}{2n+1}$.
Comme $H_n - H_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma - \ln(2n) - \gamma + o(1) \underset{+\infty}{=} -\ln(2) + o(1)$, il vient $S_n = 18 - 24\ln(2) + o(1)$.
La somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est donc $\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 18 - 24\ln(2)$.

3.4 Séries alternées

3.31 On a $u_n \underset{\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} - \frac{1}{n\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln^2(n)}\right)$ donc il y a convergence par critère spécial des séries alternées et convergence d'une série de Bertrand (signe constant et équivalent).

3.32 On a $u_n \underset{\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ donc il y a divergence par critère spécial des séries alternées et divergence d'une série de Bertrand (signe constant et équivalent).

3.33 On trouve géométriquement que : $u_n = \frac{1}{2}\times n\times 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par conséquent $\sin(u_n + n\pi) = (-1)^n\sin(\pi - u_n) \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n\frac{\pi^3}{n^2}$ donc $\sum_{n\geqslant 1} n\sin(u_n + n\pi)$ converge absolument.
De même : $a_n = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \pi - \frac{2\pi^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi : $n^\alpha\cos\left(\frac{a_n}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^3}{3n^{2-\alpha}}$. Il y a donc convergence de $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha\cos\left(\frac{a_n}{2}\right)$ si et seulement si $\alpha < 1$.

3.34 On a clairement : $\forall n \geqslant 1,\ |u_n| \leqslant 1$ donc $\cos(u_n) > 0$ et la série est donc alternée (à partir du rang 1). De plus : $\forall n \geqslant 1,\ |u_n| \leqslant \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et même $u_n \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n}\Big)$. Par conséquent, on obtient $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}u_{n-1}^2}{6n} + o\Big(\frac{u_{n-1}^2}{6n}\Big)$. On peut simplifier : $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$ avec $v_n \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge comme somme d'une série vérifiant le CSSA et d'une série absolument convergente.

3.35 $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2n^{2a}} + o\Big(\frac{1}{n^{2a}}\Big)$. Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge par le CSSA ; de plus par définition, on a $-\frac{1}{2n^{2a}} + o\Big(\frac{1}{n^{2a}}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2a}}$ est le terme général d'une série convergence si et seulement si $2a > 1$. Finalement, il y a convergence si et seulement si $a > \frac{1}{2}$.

3.36 $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{a+1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $a = -1$.

3.37 On a (en factorisant par n^a et en utilisant le DL $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + O(x^3)$) le développement $u_n = (n+2)^a - 2(n+1)^a + n^a \underset{+\infty}{=} \frac{a(a-1)}{n^{2-a}} + O\Big(\frac{1}{n^{3-a}}\Big)$. Si $a = 1$, $u_n = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente. Sinon, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a(a-1)}{n^{2-a}}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $2 - a > 1 \iff a < 1$. Ainsi, il y a convergence si et seulement $a \in]0;1]$.

3.38 Posons $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, par une comparaison série-intégrale, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ décroît et admet pour primitive $t \mapsto 2\sqrt{t}$, on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On effectue ensuite un développement asymptotique :
$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{v_n} + \frac{1}{v_n^2} + o\Big(\frac{1}{v_n^2}\Big)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge car $\frac{1}{v_n^2} + o\Big(\frac{1}{v_n^2}\Big) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n}$ diverge.

3.39 On constate que u_n est bien défini car $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente d'après le CSSA, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car u_n est le reste d'ordre n d'une série convergente. On sait d'après ce même théorème que $\text{sign}\,(u_n) = (-1)^{n+1}$.
<u>Méthode 1</u> : on pense à utiliser à nouveau le CSSA pour établir la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
$|u_{n+1}| - |u_n| = (-1)^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} - (-1)^{n+1} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} = (-1)^n \left(\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \right)$. On change d'indice dans la première somme pour avoir $|u_{n+1}| - |u_n| = (-1)^n \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$.
On a donc $|u_{n+1}| - |u_n| = (-1)^n \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ où $v_k = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} > 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n v_n$ est une série alternée avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (clairement). Il suffit donc de démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
$v_{k+1} - v_k = \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{(k+2)^\alpha} - \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) = g(k+1) - g(k)$ en posant $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha}$. g est positive, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = -\alpha\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}} - \frac{1}{(x+1)^{\alpha+1}} \right) < 0$. Alors g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $g(k+1) - g(k) < 0$ et $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est bien décroissante. On pouvait invoquer la convexité de la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ mais ce n'est plus au programme. On peut aussi effectuer un développement limité de $v_{k+1} - v_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\alpha(\alpha+1)}{k^2} < 0$ donc $v_{k+1} - v_k$ est négatif à partir d'un certain rang ce qui suffit.

D'après le CSSA encore, le signe de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k v_k$ est celui de son premier terme, à savoir $(-1)^{n+1}$ donc $|u_{n+1}|-|u_n|<0$ et, enfin, on peut conclure que la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Méthode 2 : il est clair que, pour $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n-u_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$. De plus, comme dans la première méthode, on a $u_n+u_{n+1}=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}+\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}$ donc $u_n+u_{n+1}=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\Big(\dfrac{1}{k^\alpha}-\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\Big)$. On pose à nouveau $v_k=\dfrac{1}{k^\alpha}-\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}>0$. Par l'étude de la fonction g ci-dessus, $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante donc, par le CSSA, $|u_n+u_{n+1}|\leqslant v_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}=\dfrac{1}{n^\alpha}\Big(\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-\alpha}-\Big(1+\dfrac{2}{n}\Big)^{-\alpha}\Big)$ et on a aussi le développement $\dfrac{1}{n^\alpha}\Big(\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-\alpha}-\Big(1+\dfrac{2}{n}\Big)^{-\alpha}\Big)\underset{+\infty}{=}\dfrac{1}{n^\alpha}\Big(1-1+O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$. Ainsi, comme $u_n=\dfrac{(u_n-u_{n+1})+(u_n+u_{n+1})}{2}$, il vient $u_n\underset{+\infty}{=}\dfrac{(-1)^n}{2n^\alpha}+O\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$. En posant $a_n=\dfrac{(-1)^n}{2n^\alpha}$ et $b_n=u_n-a_n\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n$ converge par le CSSA et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}b_n$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $\alpha+1>1$. Par somme $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge.

3.5 Comparaison série-intégrale

3.40 **a.** On sait d'après le critère de RIEMANN que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\zeta(\alpha)>0$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=0$. Si $\alpha=2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{\pi^2}{6}$.

b. On encadre comme $t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\displaystyle\int_{n+1}^{\infty}\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant R_n\leqslant\int_n^{\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ donc $R_n\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

c. La série est convergente ssi $\alpha>2$ d'après le même critère de RIEMANN car $\dfrac{R_n}{S_n}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{(\alpha-1)\zeta(\alpha)n^{\alpha-1}}$.

3.41 Par une comparaison série-intégrale avec $x\mapsto\sqrt{x}$ croissante, on trouve que si $n\geqslant 1$, on a

$\displaystyle\int_0^n\sqrt{x}dx\leqslant\sum_{k=1}^n\sqrt{k}\leqslant\int_1^{n+1}\sqrt{x}dx$ donc $\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{k}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$. On a convergence si et seulement si $\alpha>\dfrac{5}{2}$. L'inégalité initiale donne : $0\leqslant\displaystyle\sum_{k=1}^n\sqrt{k}-\int_0^n\sqrt{x}dx\leqslant\int_n^{n+1}\sqrt{x}dx\leqslant\sqrt{n+1}$ donc montre : $(-1)^nu_n\underset{\infty}{=}\dfrac{2(-1)^n}{3n^{\alpha-\frac{3}{2}}}+O\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\Big)$. Il y a convergence si et seulement si $\alpha>\dfrac{3}{2}$.

3.42 Par une comparaison série-intégrale avec $x\mapsto\dfrac{1}{x^\alpha}$ décroissante (et intégrable sur $[1;+\infty[$) :

$\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ donc $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Ainsi $\dfrac{R_n}{S_n}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{(\alpha-1)S_\infty n^{\alpha-1}}$ et on a donc convergence si et seulement si $\alpha>2$ (avec $S_\infty=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$).

3.43 **a.** Une petite étude de fonctions montre que f est décroissante sur $[e;+\infty[$ donc sur $[3;+\infty[$.

Ainsi, pour $p \geqslant 4$: $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\ln t}{t}dt \leqslant \frac{\ln p}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\ln t}{t}dt$ et en sommant : $\forall n \geqslant 4,\ u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + v_n$ où $\displaystyle\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}dt \leqslant v_n \leqslant \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}dt$ d'où $v_n \underset{\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}$.

De plus, en posant $w_n = u_n - \frac{(\ln n)^2}{2}$, on a pour $n \geqslant 4$: $w_n - w_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}dt$ donc $(w_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante et minorée d'après ce qui précède donc elle converge vers ℓ et on a donc $u_n \underset{\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$.

b. Pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k-1)}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$. Donc $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$ et avec **a.** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^n \ln n}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$ car $H_n \underset{\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$. Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + o(1)$, la série proposée converge vers $\frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$.

On pouvait dire que cette série convergeait sans ce calcul car elle vérifie le CSSA.

3.44 Posons donc $v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$. Distinguons deux cas :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{u_{n+1} - u_n}{\ell}$ et comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} \big(u_{n+1} - u_n\big)$ converge, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ aussi.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante, on a : $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dx}{x} \leqslant (u_{n+1} - u_n) \times \frac{1}{u_n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\big)$ diverge aussi donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Finalement : la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.45 Posons $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, par une comparaison série-intégrale, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ décroît et admet pour primitive $t \mapsto 2\sqrt{t}$, on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On effectue ensuite un développement asymptotique : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{v_n} + \frac{1}{v_n^2} + o\left(\frac{1}{v_n^2}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge car $\frac{1}{v_n^2} + o\left(\frac{1}{v_n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n}$ diverge.

3.6 Produit de Cauchy

3.46 On sait que $e = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$: cette série étant absolument convergente. On a aussi clairement que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}$ converge absolument donc, par produit de Cauchy, on a : $e\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k.k!.(n-k)!}$. Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k.k!.(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ donc il reste à montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n$.

Par exemple par récurrence (on peut aussi utiliser des intégrales en constatant que $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 x^{k-1}dx$) car la relation est vraie pour $n = 1$ et on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

3.47 En notant $u_n = (n+1)3^{-n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3} < 1$ donc la série converge par la règle de d'ALEMBERT. On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k}\cdot\dfrac{1}{3^{n-k}} = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{3^n}\right)\times\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{3^n}\right) = \left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$ par produit de CAUCHY.

3.48 Le CSSA puis le produit de CAUCHY est $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ où $w_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_k v_{n-k} = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$. Or $\forall k \in [\![1;n-1]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leqslant \dfrac{2}{n}$ (min. en $k = \frac{n}{2}$) donc $|w_n| \geqslant \dfrac{2(n-1)}{n}$: $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ diverge grossièrement.

3.7 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

3.49 **a.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$, à partir d'un certain rang, $a_n > 0$ donc $S_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a_n}$. Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, on aurait $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendrait vers une limite non nulle : c'est contraire à la morale publique !
Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge ; et comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{S_n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
b. Bien sûr que non avec $c_n = e^n$ par exemple. $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \underset{+\infty}{=} o(1) \underset{+\infty}{=} o(S_n)$ donc $S_n \underset{+\infty}{\sim} S_{n+1}$.
c. $S_{n+1}^2 - S_n^2 = (S_{n+1} - S_n)(S_{n+1} + S_n) = 2S_{n+1}a_{n+1} - a_{n+1}^2$ qui tend vers 2 en $+\infty$ par hypothèse.
d. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon u_n$. Alors, en notant $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, on a $\forall n \geqslant n_0$, $|U_n - V_n| \leqslant |U_{n_0-1} - V_{n_0-1}| + \sum\limits_{k=n_0}^{n} |u_k - v_k| \leqslant |U_{n_0-1} - V_{n_0-1}| + \varepsilon \sum\limits_{k=n_0}^{n} |u_k|$.
Comme $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $|U_{n_0-1} - V_{n_0-1}| \leqslant \varepsilon U_n$ donc $\forall n \geqslant n_1$, $|U_n - V_n| \leqslant 2\varepsilon U_n$ ce qui prouve que $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$.
Alors, on applique ce résultat avec **c.** $S_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} 2$ donc $S_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ d'où $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
e. On suppose donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $b_n = a_n \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^\alpha$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^\alpha$.
Comme $a_n^\alpha = e^{\alpha\ln(a_n)}$, il faut impérativement que a_n soit strictement positif pour tout entier $n \geqslant 1$.
On suit le même cheminement : on montre par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ car $a_n = \dfrac{b_n}{S_n}$ et on a $S_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} S_n$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, $S_{n+1}^\beta - S_n^\beta = (S_n + a_n^\alpha)^\beta - S_n^b = S_n^\beta\Big(1 + \beta\dfrac{a_n^\alpha}{S_n} + o\Big(\dfrac{a_n^\alpha}{S_n}\Big)\Big) - S_n^\beta$.
On en déduit que $S_{n+1}^\beta - S_n^\beta \underset{+\infty}{\sim} \beta S_n^{\beta-1} a_n^\alpha$. Si on veut pouvoir utiliser l'hypothèse $a_n S_n \to 1$, on doit choisir β tel que $\beta - 1 = \alpha$. Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(S_{n+1}^{1+\alpha} - S_n^{1+\alpha}\big) = 1 + \alpha$. En utilisant encore le résultat de la question **d.**, on obtient $S_n^{1+\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \sum\limits_{k=0}^{n} (1+\alpha)$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{((1+\alpha)n)^{\frac{1}{\alpha+1}}}$.

3.50 D'abord $10^{c_n - 1} \leqslant n < 10^{c_n}$ donc $c_n = 1 + \lfloor \log_{10}(n) \rfloor$.
a. Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{c_k}}{k}$. Alors $\Big|S_{10^c-1} - S_{10^{c-1}-1}\Big| = \Big|\sum\limits_{k=10^{c-1}}^{10^c-1} \dfrac{(-1)^{c_k}}{k}\Big| = \sum\limits_{k=10^{c-1}}^{10^c-1} \dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{(10^c - 10^{c-1})}{10^c} = \dfrac{9}{10}$ ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{c_n}}{n}$ diverge. En effet, si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{c_n}}{n}$ convergeait vers S : $\lim\limits_{c\to+\infty} S_{10^c-1} = S = \lim\limits_{c\to+\infty} S_{10^{c-1}-1}$ et on aurait donc $\lim\limits_{c\to+\infty} (S_{10^c-1} - S_{10^{c-1}-1}) = 0$ qui est contredit par $|S_{10^c-1} - S_{10^{c-1}-1}| \geqslant \dfrac{9}{10}$.
b. Posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{c_k}}{k\ln(k)}$ et $T_n = S_{10^n-1}$. Alors $T_n = \sum\limits_{c=1}^{n} \Big(\sum\limits_{k=10^{c-1}}^{10^c-1} \dfrac{(-1)^c}{k\ln(k)}\Big) = \sum\limits_{c=1}^{n} (-1)^c v_c$ avec $v_c = \sum\limits_{k=10^{c-1}}^{10^c-1} \dfrac{1}{k\ln(k)}$. Montrons que $(v_c)_{c\geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle.

Or si $c \geqslant 1$, $0 \leqslant v_{c+1} = \sum_{k=10^{c-1}}^{10^c-1} \left(\sum_{j=0}^{9} \frac{1}{(10k+j)\ln(10k+j)} \right) \leqslant \sum_{k=10^{c-1}}^{10^c-1} \frac{10}{(10k)\ln(10k)} \leqslant v_c$.

De plus, $v_c \leqslant \frac{10^c - 10^{c-1}}{10^{c-1}\ln(10^{c-1})} \leqslant \frac{9}{(c-1)\ln(10)} \to 0$ et on a bien les deux renseignements attendus.

Ainsi, la série alternée $\sum_{c\geqslant 1} (-1)^c v_c$ converge par le CSSA.

De plus, $\forall p \in [\![10^{n-1}; 10^n - 1]\!]$, $|S_p - S_{10^{n-1}-1}| \leqslant |S_{10^n-1} - S_{10^{n-1}-1}| = v_n$ ce qui se traduit aussi par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n - S_{10^{c_n-1}}| \leqslant |S_{10^{c_n}-1} - S_{10^{c_n-1}-1}| = v_{c_n} \to 0$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{10^{c_n-1}}) = 0$ et en écrivant $S_n = (S_n - S_{10^{c_n-1}}) + S_{10^{c_n-1}}$, par somme de suites convergentes, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{c_n}}{n\ln(n)}$ converge.

3.51 Déjà, si $\alpha \geqslant 0$, on a clairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge grossièrement.

Si $\alpha = -\beta < 0$, on a, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n^{2\beta}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^\beta} = \frac{1}{n^{2\beta-1}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^\beta} \right)$. Comme $t \mapsto (1+t^2)^{-\beta}$ est continue sur $[0;1]$, par les sommes de Riemann, en notant $I = \int_0^1 (1+t^2)^{-\beta} dt > 0$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{I}{n^{2\beta-1}}$. Ainsi, on sait d'après Riemann (l'autre) que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\iff 2\beta - 1 > 1 \iff \alpha < -1$.

3.52 <u>Méthode efficace</u> : On sait que $\text{Arctan}(n) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors, en posant $u_n = (-1)^n \frac{\text{Arctan}(n)}{\sqrt{n}\,\ln(n)^a}$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} (-1)^n \frac{\pi}{2\sqrt{n}\,\ln(n)^a} - (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}\,\ln(n)^a} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}\,\ln(n)^a}\right)$.

On a donc $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = (-1)^n \frac{\pi}{2\sqrt{n}\,\ln(n)^a}$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}\,\ln(n)^a}\right) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$.

La série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge par le CSSA (même si $a < 0$ mais alors la suite $(\sqrt{n}\ln(n)^a)_{n\geqslant 2}$ sera croissante à partir d'un certain rang) et $\sum_{n\geqslant 2} w_n$ est absolument convergente par le critère de Riemann.

Par somme, la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est donc convergente et ceci quelle que soit la valeur de a.

<u>Méthode logique mais moins efficace</u> : la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est alternée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 par croissance comparée et : $\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)} \underset{+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\frac{\ln^a(n)}{\ln^a(n+1)} \underset{+\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par produit, on a donc $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite $\big(|u_n|\big)_{n\geqslant 2}$ est décroissante à partir d'un certain rang et on peut donc appliquer (et ceci pour tout $a \in \mathbb{R}$) le CSSA pour obtenir la convergence de $\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

3.53 Comme la série harmonique diverge d'après le cours, la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Ainsi, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, la partie $\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et elle admet donc un minimum d'après la propriété fondamentale de l'ordre dans $\mathbb{N}$. On peut donc bien définir $n_p = \text{Min}\big(\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}\big)$.

Par définition de n_p, il vient $H_{n_p} \geqslant p$. Puisque $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$, on a $\forall k \geqslant 2$, $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$ qu'on somme pour $k \in [\![2; n_p]\!]$ pour avoir $\sum_{k=2}^{n_p} \frac{1}{k} = H_{n_p} - 1 \leqslant \int_1^{n_p} \frac{dt}{t} = \ln(n_p)$ avec Chasles. Ainsi, $\ln(n_p) \leqslant p - 1$ et, par croissance de $\exp$, on obtient $n_p \geqslant e^{p-1}$. Par encadrement, $\lim_{p\to+\infty} n_p = +\infty$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, comme n_p est le plus petit entier de $\{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}$, on a $n_p - 1 \notin \{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geqslant p\}$ donc $H_{n_p-1} < p$ ce qui donne l'encadrement $\forall p \in \mathbb{N}^*, H_{n_p-1} < p \leqslant H_{n_p}$.

De plus, $0 \leqslant H_{n_p} - p < H_{n_p} - H_{n_p-1} = \dfrac{1}{n_p}$ or $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{n_p} = 0$ d'après ce qui précède donc, par encadrement, $\lim\limits_{p\to+\infty} \big(H_{n_p} - p\big) = 0$. Mais on sait par ailleurs que $H_{n_p} \underset{+\infty}{=} \ln(n_p) + \gamma + o(1)$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \big(p - \ln(n_p) - \gamma\big) = 0$. Il suffit donc de passer à l'exponentielle et on a $\lim\limits_{p\to+\infty} e^{\ln(n_p)-p+\gamma} = 1$ ce qui équivaut à $n_p \underset{+\infty}{\sim} e^{p-\gamma}$.

Bonus : soit $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$. On a $\forall n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = H_n - H_{n-1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ donc $u_n - u_{n-1} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'où, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge. Ainsi, par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. En notant $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, on a donc $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

3.54 **a.** Soit $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$. Comme $f'(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{\ln(t)}{t^2} = \dfrac{1-\ln(t)}{t^2}$, la fonction f est décroissante sur $[3;+\infty[$. Ainsi, classiquement, $\forall k \geqslant 4$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ et en sommant de 4 à $n \geqslant 4$, on obtient l'encadrement suivant dont on déduit l'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2(n)}{2}$:

$$\int_4^{n+1} f(t)dt \leqslant u_n - f(2) - f(3) \leqslant \int_3^{n} f(t)dt \iff \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leqslant u_n - f(2) - f(3) \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}.$$

Posons $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - \frac{\ln(n)}{n}$. Alors : $\forall k \geqslant 4$, $0 \leqslant w_k \leqslant f(k-1) - f(k)$. En sommant et par CHASLES, on a $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=4}^{n} w_k = \int_3^n f(t)dt - u_n + f(2) + f(3) \leqslant f(3) - f(n) \leqslant f(3)$. Alors les sommes partielles sont majorées donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ converge ce qui donne la convergence de la suite $\left(\dfrac{\ln^2(n)}{2} - u_n\right)_{n\geqslant 3}$ d'où l'existence d'une constante C telle que $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{\ln^2(n)}{2} + C + o(1)$.

On pouvait aussi dire qu'en posant $z_n = u_n - \dfrac{(\ln n)^2}{2}$, $\forall n \geqslant 4$, $z_n - z_{n-1} = \dfrac{\ln n}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t} dt$ donc $(z_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante et minorée d'après ce qui précède donc elle converge $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{(\ln n)^2}{2} + C + o(1)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

b. La série proposée converge absolument d'après RIEMANN donc converge. De plus, pour $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Ainsi : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

c. Pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k-1)}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$. Donc $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$ et avec **a.** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$ car $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$. Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + o(1)$, la série proposée converge vers $\dfrac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$. On pouvait dire que cette série convergeait sans ce calcul car elle vérifie le critère spécial des séries alternées.

3.55 **a.** Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 0$, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 et $\forall n \geqslant 1$, $b_n = 1$ donc $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 mais $\forall n \geqslant 1$, $b_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$ donc $(b_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.

On ne peut donc rien conclure sur la convergence de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

b. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\left|\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right| < 1$ donc $1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} > 0$. De plus, $1 + \dfrac{(-1)^{1-1}}{\sqrt{1}} = 2 > 0$. Par conséquent, on peut considérer $\ln(u_n)$ et on a $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$ or on connaît le développement

limité $w_k = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{2k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$. Posons $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ et $b_k = w_k - a_k$ de sorte qu'avec le calcul précédent on a $b_k \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2k} < 0$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. Plus précisément, la suite de ses sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang donc elle tend vers $-\infty$. Comme $w_k = a_k + b_k$, par somme, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} w_k$ diverge car $\sum\limits_{k\geqslant 1} a_k$ converge et $\sum\limits_{k\geqslant 1} b_k$ diverge et la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} w_k\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$.
Comme $u_n = \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)\right)$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
c. Par dualité suite-série, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(v_{n+1} - v_n)$ converge.
Or $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{n(n+1)} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1} - v_n)$ converge absolument par comparaison aux séries de Riemann. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1} - v_n)$ converge donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge (vers un réel qui est en fait la constante d'Euler $\gamma \sim 0,577$).
d. On écrit autrement le développement limité de la question **b**, $w_k \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{2k} + O\left(\dfrac{1}{k\sqrt{k}}\right)$. Alors, en posant $c_k = w_k - a_k + \dfrac{1}{2k}$, ce qui précède montre que $c_k \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{k^{3/2}}\right)$ donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} c_k$ converge par comparaison aux séries de Riemann. On note $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$, $c = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ et $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ de sorte que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ d'après la question **c.**. Comme $\ln(u_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k - \dfrac{1}{2}H_n + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$, ce qui précède permet d'écrire $\ln(u_n) \underset{+\infty}{=} a + o(1) - \dfrac{1}{2}\ln(n) - \dfrac{\gamma}{2} + o(1) + c + o(1)$ donc en notant $\ell = a - \dfrac{\gamma}{2} + c$, il vient $\ln(u_n) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{2}\ln(n) + \ell + o(1)$. Puisque $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{+\infty}{=} e^{-\frac{\ln(n)}{2} + \ell + o(1)} \underset{+\infty}{=} \dfrac{e^{\ell}}{\sqrt{n}} e^{o(1)}$ d'où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\ell}}{\sqrt{n}} > 0$ car $e^{o(1)} = 1 + o(1)$ et on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge par comparaison aux séries de Riemann.

3.56 Définissons la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ si l'écriture en base 10 de n ne contient pas le chiffre 5 et $u_n = 0$ sinon. L'énoncé nous demande d'étudier la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n = \sum\limits_{n\in A} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$. Deux cas élémentaires :

- si $\alpha \leqslant 0$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 car $\forall n \in A,\ u_n \geqslant 1$ et que A est infini. $\sum\limits_{n\in A} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ diverge grossièrement.
- si $\alpha > 1$, $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ donc $\sum\limits_{n\in A} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ converge par comparaison aux séries de Riemann ($\alpha > 1$).

Pour $\alpha \in]0;1[$, posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n de cette série. Puisque l'énoncé parle d'écriture en base 10, on va considérer la suite extraite $(S_{10^n-1})_{n\geqslant 1}$ (cela consiste à prendre dans la somme partielle tous les entiers dont l'écriture en base 10 contient au plus n chiffres).

Le plus petit nombre à avoir p chiffres en base 10 est $10^{p-1} = (10\cdots00)_{10}$ et $10^p - 1 = (99\cdots99)_{10}$ est le plus grand. On écrit donc $S_{10^n-1} = \sum\limits_{p=1}^{n} \sum\limits_{k=10^{p-1}}^{10^p-1} u_k$ (on scinde la somme selon le nombre de chiffres en base 10). Or, dans l'intervalle $[\![10^{p-1}; 10^p - 1]\!]$ qui contient les entiers avec p chiffres en base 10, il existe $8 \times 9^{p-1}$ entiers qui ne contiennent pas le chiffre 5. En effet, on a 8 choix pour le premier chiffre $(1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9)$

et 9 choix pour les $p-1$ chiffres suivants jusqu'au chiffre des unités $(0,1,2,3,4,6,7,8,9)$. Par conséquent, $\dfrac{8\times 9^{p-1}}{10^{p\alpha}} \leqslant \displaystyle\sum_{k=10^{p-1}}^{10^p-1} u_k \leqslant \dfrac{8\times 9^{p-1}}{10^{(p-1)\alpha}}$ car si $k \in A \cap [\![10^{p-1};10^p-1]\!]$, on a $\dfrac{1}{10^{p\alpha}} \leqslant u_k \leqslant \dfrac{1}{10^{(p-1)\alpha}}$. Ainsi, en sommant ces inégalités, on obtient : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \dfrac{8\times 9^{p-1}}{10^{p\alpha}} \leqslant S_{10^n-1} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \dfrac{8\times 9^{p-1}}{10^{(p-1)\alpha}}$. Si on note $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{9}{10^\alpha}\right)^k$ la somme partielle de la série géométrique, on a donc l'encadrement $\dfrac{8}{10^\alpha}\times T_n \leqslant S_{10^n-1} \leqslant 8T_n$ (I).

On sait que $(T_n)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $\dfrac{9}{10^\alpha} \in]0;1[$ et qu'elle tend vers $+\infty$ dans le cas contraire.

$(\Longrightarrow)$ Si $\dfrac{9}{10^\alpha} \geqslant 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ donc l'inégalité de gauche de (I) montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{10^n-1} = +\infty$ par minoration. Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ étant croissante, elle ne peut tendre que vers $+\infty$ (car si elle tendait vers un réel ℓ, toutes ses suites extraites tendraient vers cette limite ℓ). Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\in A}\dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.

$(\Longleftarrow)$ Si $\dfrac{9}{10^\alpha} < 1$, alors $T_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{9}{10^\alpha}\right)^k \leqslant \dfrac{1}{1-\dfrac{9}{10^\alpha}}$. L'inégalité de droite de (I) montre alors que la suite $(S_{10^n-1})_{n\geqslant 1}$ est majorée et, à nouveau, comme elle est croissante, elle converge vers un réel ℓ. $(S_n)_{n\geqslant 1}$ étant croissante, elle ne peut pas tendre vers $+\infty$ comme avant donc elle converge, ainsi $\displaystyle\sum_{n\in A}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

En général, et on l'utilise assez fréquemment : Quand une suite est monotone, sa convergence équivaut à la convergence de l'une quelconque de ses suites extraites !!!!

Or $\dfrac{9}{10^\alpha} < 1 \Longleftrightarrow \alpha > \dfrac{\ln(9)}{\ln(10)}$. Ce qui précède montre alors que $\displaystyle\sum_{n\in A}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{\ln(9)}{\ln(10)}$.

3.57 Traitons quelque cas en posant $u_n = a^{\lfloor \ln n\rfloor}$:

Si $|a|=1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = |a^{\lfloor \ln n\rfloor}| = 1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n\rfloor}$ diverge grossièrement.

Si $|a|>1$, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\lfloor \ln(n)\rfloor = +\infty$, la suite $\left(a^{\lfloor \ln n\rfloor}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|a^{\lfloor \ln n\rfloor}\right| = +\infty$ et la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n\rfloor}$ est encore grossière.

Si $a=0$, comme $\forall n \geqslant 3$, $\lfloor \ln n\rfloor \geqslant 1$, on a $a^{\lfloor \ln n\rfloor} = 0$, ce qui montre la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n\rfloor}$.

Si $a \in]0;1[$, $\ln(n)-1 < \lfloor \ln(n)\rfloor \leqslant \ln(n)$ par définition de la partie entière, $a^{\ln(n)} \leqslant a^{\lfloor \ln n\rfloor} < a^{\ln(n)-1}$ car $0<a<1$. Or $a^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln(a)} = e^{\ln(a)\ln(n)} = n^{\ln(a)} = \dfrac{1}{n^{-\ln(a)}}$. Ainsi, $\dfrac{1}{n^{-\ln(a)}} \leqslant u_n < \dfrac{1}{an^{-\ln(a)}}$.

Si $-\ln(a) > 1 \Longleftrightarrow a < 1/e$, alors l'inégalité $0 < u_n < \dfrac{1}{an^{-\ln(a)}}$ montre par comparaison à une série de Riemann que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n\rfloor}$ converge.

Si $-\ln(a) \leqslant 1 \Longleftrightarrow a \geqslant 1/e$, l'inégalité $\dfrac{1}{n^{-\ln(a)}} \leqslant u_n$ montre par comparaison que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n\rfloor}$ diverge.

Si $a \in]-1/e;0[$, $|a^{\lfloor \ln n\rfloor}| = |a|^{\lfloor \ln n\rfloor}$ donc, par un des cas précédents, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n\rfloor}$ converge absolument.

Si $a \in]-1;-1/e[$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^{\lfloor \ln k\rfloor}$. L'idée est de faire des paquets de termes pour lesquels $\lfloor \ln(k)\rfloor$ est constant. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors $p = \lfloor \ln(k)\rfloor \Longleftrightarrow p \leqslant \ln(k) < p+1 \Longleftrightarrow e^p \leqslant k < e^{p+1}$. Ainsi, si on pose $I_p = [\![u_p;v_p]\!]$ avec $u_p = \lfloor e^p\rfloor + 1$ et $v_p = \lfloor e^{p+1}\rfloor - 1$, on a la valeur constante $\forall k \in I_p$, $\lfloor \ln(k)\rfloor = p$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k\in I_p} a^p = S_{v_p} - S_{u_p-1} = a^p(v_p-u_p+1)$. Mais, $e^p < u_p \leqslant e^p+1$ et $e^{p+1}-2 < v_p \leqslant e^{p+1}-1$ donc $e^{p+1}-2-e^p < v_p-u_p+1 < e^{p+1}-e^p$ ce qui assure par encadrement que $v_p-u_p+1 \underset{+\infty}{\sim} e^p(e-1)$ car

$e^{p+1} - 2 - e^p \underset{+\infty}{\sim} e^{p+1} - e^p = e^p(e-1)$. Ainsi, $S_{v_p} - S_{u_p-1} \underset{+\infty}{\sim} (ae)^p(e-1)$ qui ne tend pas vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Or si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait vers S, les deux suites extraites $(S_{u_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{v_p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ tendrait vers S donc on aurait $\lim\limits_{p\to+\infty}(S_{v_p} - S_{u_p-1}) = 0$. Par l'absurde, $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ diverge.

Au final : $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\lfloor \ln n \rfloor}$ converge si et seulement si $-e^{-1} < a < e^{-1}$.

3.58 **a.** Si $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} = 0$. Comme $a_n = \left(a_n^{1-\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} = e^{\frac{n}{n-1}\ln\left(a_n^{1-\frac{1}{n}}\right)}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(a_n^{1-\frac{1}{n}}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$.

Ainsi $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant 1$ et $a_n \leqslant a_n^{1-\frac{1}{n}}$ car $1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$ donc $\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln(a_n) \geqslant \ln(a_n)$ car $\ln(a_n) \leqslant 0$ et que la fonction $\exp$ est croissante. On conclut à la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ par comparaison.

b. D'abord, les conditions définissant l'appartenance à I et J sont la négation l'une de l'autre donc $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = \mathbb{N}^*$. Les ensembles I et J constituent donc une partition de $\mathbb{N}^*$. Traitons les deux cas :

Si $n \in I$, on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \lambda a_n$ par définition.

Si $n \in J$, on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} > \lambda a_n \Longleftrightarrow a_n^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\lambda} \Longleftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} < \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$ car $a_n > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{Max}\left(\lambda a_n, \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}\right) \leqslant \lambda a_n + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda a_n$ converge par hypothèse et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1}$ converge car $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$ donc, par somme et comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge aussi. En sommant l'inégalité obtenue pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \lambda\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\right) + \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

c. Les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ sont donc de même nature d'après les questions **a.** et **b.**. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et on note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n > 0$. Soit $\varphi :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(\lambda) = \lambda S + \frac{\lambda}{\lambda-1}$. φ est dérivable sur $]1;+\infty[$, $\lim\limits_{\lambda\to 1^+} \varphi(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$. Or $\varphi'(\lambda) = S - \frac{1}{(\lambda-1)^2}$. En étudiant les variations de φ, on se rend compte que φ est minimale en $\lambda_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{S}}$ et comme $S' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \varphi(\lambda_0)$, on a $S' \leqslant (\sqrt{S}+1)^2$, ce qui se traduit par l'inégalité attendue, à savoir $\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}} \leqslant 1 + \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n}$.

3.59 **a.** La fonction $P_n : t \mapsto t^n - nt + 1$ est continue et strictement décroissante de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ car, si $t \in [0;1[$, $P_n'(t) = n(t^{n-1} - 1) < 0$. Comme $P_n(0) = 1 > 0$ et $P_n(1) = 2 - n < 0$ car $n \geqslant 3$. D'après le théorème de la bijection continue, il existe un unique $x_n \in]0;1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.

b. Comme $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2} + 1 \leqslant 0$, on a $\forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$. Mais $x_n^n - nx_n + 1 = 0$ par construction, donc $x_n = \frac{1}{n} + \frac{x_n^n}{n} \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ d'où l'on déduit que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ car $0 \leqslant x_n^n \leqslant \frac{1}{2^n}$ qui implique $x_n^n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

c. On note $y_n = \frac{x_n^n}{n}$ de sorte que $y_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. De plus, $x_n^n = \exp(n\ln(x_n)) \underset{+\infty}{=} \exp\left(n\ln\left(\frac{1}{n} + y_n\right)\right)$ d'où $x_n^n \underset{+\infty}{=} \exp\big(-n\ln(n) + n\ln(1+ny_n)\big) = \frac{1}{n^n}\exp\big(n\ln(1+ny_n)\big)$ or $n\ln(1+ny_n) \underset{+\infty}{\sim} n^2 y_n$ tend vers 0 en $+\infty$ donc $x_n^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}$. On en déduit que $x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$.

3.60 **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$ par le théorème de la limite monotone. Si on avait $\ell > 0$, en prenant $v_n = \dfrac{1}{n+1}$, on aurait bien $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 alors que, puisque $u_n v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ divergerait par comparaison. Absurde ! Ainsi $\ell = 0$.

b. Prenons $N_0 = 0$ et construisons les termes de $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

Initialisation : comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Ainsi, il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ S_n = \sum\limits_{k=N_0}^{n-1} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k \geqslant 1$. Prenons par exemple pour N_1 le plus petit entier n qui vérifie $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k \geqslant 1$ de sorte qu'on aura donc $\sum\limits_{k=N_0}^{N_1-1} u_k \geqslant 1$.

Hérédité : soit $p \geqslant 1$, supposons construit $(N_0, \cdots, N_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ vérifiant $0 = N_0 < N_1 < \cdots < N_p$ et $\forall k \in [\![0; p-1]\!],\ \sum\limits_{k=N_k}^{N_{k+1}-1} u_k \geqslant 1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{n-1} - S_{N_p-1}) = +\infty$, on a encore l'existence de $n_{p+1} > N_p$ tel que $\forall n \geqslant n_{p+1},\ S_{n-1} - S_{N_p-1} = \sum\limits_{k=N_p}^{n-1} u_k \geqslant 1$. Prenons à nouveau (par exemple) pour N_{p+1} le plus petit entier n tel que $\sum\limits_{k=N_p}^{n-1} u_k \geqslant 1$ de sorte que $N_{p+1} > N_p$ et que $\sum\limits_{k=N_p}^{N_{p+1}-1} u_k \geqslant 1$.

Conclusion : on conclut par principe de récurrence à l'existence de cette suite strictement croissante d'entiers $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=N_i}^{N_{i+1}-1} u_k \geqslant 1$.

c. On constate d'abord que $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante et entière, elle tend naturellement vers $+\infty$ puisqu'on peut montrer facilement par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \geqslant k$. Définissons alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation $\forall i \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![N_i; N_{i+1}-1]\!],\ v_k = \dfrac{1}{i+1}$. Alors, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, il vient $\sum\limits_{k=0}^{N_p-1} u_k v_k = \sum\limits_{i=0}^{p-1}\Big(\sum\limits_{k=N_i}^{N_{i+1}-1} u_k v_k\Big) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} \dfrac{1}{i+1}\Big(\sum\limits_{k=N_i}^{N_{i+1}-1} u_k\Big) \geqslant \sum\limits_{m=1}^{p} \dfrac{1}{m} = H_p$ (en posant $m = i+1$). Alors la suite $\Big(\sum\limits_{k=0}^{N_p-1} u_k v_k\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ car on sait que $H_p \underset{+\infty}{\sim} \ln(p) \to +\infty$, cela implique que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k v_k$ diverge. De plus, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement décroissante et elle tend vers 0.

d. On peut affirmer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante, on a équivalence entre :

(i) pour toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge.

(ii) la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

En effet, on a (i) $\Longrightarrow$ (ii) avec **b.** et **c.** par contraposée. Réciproquement, si on suppose (ii), soit une suite complexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, $u_n v_n \underset{+\infty}{=} o(u_n)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge absolument donc elle converge.

3.61 **a.** Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3(n+1)-2}{3(n+1)} = 1 - \dfrac{2}{3n+3} = 1 - \dfrac{2}{3n} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$ ce qui donne par développements limités $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{2}{3n}\big(1+o(1)\big) \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{2}{3n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. De même, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n^{3/4}}{(n+1)^{3/4}} = \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{-3/4} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{3}{4n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{=} \Big(\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n} > 0$ ce qui prouve, comme deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang, que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 0$ pour n assez grand.

b. On en déduit que $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \Longleftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \geqslant \dfrac{u_n}{v_n}$. Ainsi, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ est croissante ce qui montre que $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ donc $u_n \geqslant \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$ et comme $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ diverge avec Riemann, par comparaison, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ diverge aussi.

Mieux, on peut poser $w_n = \ln\left(u_n n^{2/3}\right)$ de sorte que $w_{n+1} - w_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \frac{2}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc, $w_{n+1} - w_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{3n+3}\right) - \dfrac{2}{3}\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{2}{3(n+1)} - \dfrac{2}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ce qui montre que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge absolument donc converge et, par dualité suite-série, $(w_n)_{n \geqslant 1}$ converge (vers $K \in \mathbb{R}$) ce qui, par continuité de $\exp$, montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n n^{2/3} = e^K = A > 0$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^{2/3}}$.

3.62 **a.** La fonction $\ln^2$ étant continue et croissante sur $[1;+\infty[$, on en déduit que $\forall k \geqslant 2,\ \ln^2(k) \geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln^2(t)dt$ et $\forall k \geqslant 1,\ \ln^2(k) \leqslant \displaystyle\int_{k}^{k+1} \ln^2(t)dt$. En sommant ces inégalités pour $k \in [\![2;n]\!]$ ou $k \in [\![1;n]\!]$, on trouve avec la relation de Chasles : $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\int_1^n \ln^2(t)dt \leqslant u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \leqslant \int_1^{n+1} \ln^2(t)dt$ car $\ln^2(1) = 0$.

Par intégration par parties, comme les fonctions $u : t \mapsto \ln^2(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur $[1;+\infty[$, il vient $\forall x \geqslant 1,\ \displaystyle\int_1^x \ln^2(t)dt = [t\ln^2(t)]_1^x - 2\int_1^x \ln(t)dt = [t\ln^2(t) - 2t\ln(t) + 2t]_1^x$ dont on déduit la relation $\displaystyle\int_1^x \ln^2(t)dt = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x - 2$. Ainsi, comme $n\ln^2(n) - 2n\ln(n) + 2n - 2 \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$ et aussi $(n+1)\ln^2(n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2 \underset{+\infty}{\sim} (n+1)\ln^2(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$ car on sait que $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, on obtient par encadrement l'équivalent $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2(k) \underset{+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$.

b. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$ est dérivable et décroissante sur $]1;+\infty[$ car $\forall t > 1,\ f'(t) = -\dfrac{2 + \ln(t)}{t^2\ln^3(t)} < 0$.

Pour $k \geqslant 3$, on a donc $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)dt$ d'où, en sommant pour $k \in [\![3;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \int_2^n \frac{dt}{t\ln^2(t)}$.

Or, $\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t\ln^2(t)} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$ donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)}$. Comme les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\limits_{n \geqslant 3} \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$ sont majorées, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$ converge. Ainsi, la série à termes positifs $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{u_n}$ converge par comparaison avec la question **a.**.

3.63 **a.** Soit $n \geqslant 1$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^x + nx - 2$. La fonction f_n est dérivable et strictement croissante car $f_n'(x) = e^x + n > 0$ donc, comme on a facilement $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$, la fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'où $\forall n \geqslant 1,\ \exists! a_n \in \mathbb{R},\ f_n(a_n) = 0 \Longleftrightarrow e^{a_n} + na_n = 2$.

b. Comme $f_n(0) = -1 < 0 = f_n(a_n) < f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{1/n} - 1$, on en déduit que $0 < a_n < \dfrac{1}{n}$ par stricte croissance de f_n. Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. Or $a_n = \dfrac{2 - e^{a_n}}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - e^{a_n} = 1$ donc on a l'équivalent $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et on en déduit que $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ diverge (car $a_n \geqslant 0$).

c. Pour $n \geqslant 1$, $f_{n+1}(a_n) = e^{a_n} + (n+1)a_n - 2 = e^{a_n} + na_n - 2 + a_n = f_n(a_n) + a_n > f_n(a_n) = 0 = f_{n+1}(a_{n+1})$ donc $a_n > a_{n+1}$ par stricte croissance de la fonction f_{n+1}. Ainsi, la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement décroissante et tend vers 0 donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n a_n$ converge par le CSSA.

On aurait aussi pu poser $b_n = \dfrac{1}{n} - a_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ d'après ce qui précède pour avoir $e^{1/n - b_n} + n\left(\dfrac{1}{n} - b_n\right) - 2 = 0$

donc, par DL : $1+\frac{1}{n}+1-nb_n-2+o\left(\frac{1}{n}\right)=0$ ce qui donne $b_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et enfin $b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Par conséquent, $(-1)^n a_n = \frac{(-1)^n}{n}+(-1)^n b_n$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge par le CSSA et $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n b_n$ converge absolument d'après l'équivalent trouvé. Par somme de séries convergentes, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ converge.

3.64 Cherchons d'abord un développement asymptotique de u_n.

Première méthode : $\sin(u_n)=\left(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2}$ car $\cos(\text{Arcsin}(x))=\sqrt{1-x^2}$ pour $x\in]-1;1[$. Ainsi, $\sin(u_n)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2n^\alpha}-\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-\frac{4(-1)^n}{3n^\alpha}-\frac{4}{3n^{2\alpha}}}$. Or $\sqrt{1+x}\underset{0}{=}1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$ donc $\sin(u_n)\underset{+\infty}{=}\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2n^\alpha}+\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{6n^\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{6n^{2\alpha}}+\frac{\sqrt{3}}{18n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\underset{+\infty}{=}\frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{3n^\alpha}+\frac{2\sqrt{3}}{9n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Comme $u_n=\text{Arcsin}(\sin(u_n))$ et que $\text{Arcsin}(x)\underset{0}{=}x+o(x^2)$, on a $u_n\underset{+\infty}{=}\frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{3n^\alpha}+\frac{2\sqrt{3}}{9n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Deuxième méthode : soit $f: x\mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}+x\right)-\frac{\pi}{6}$ dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ avec $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(1/2+x)^2}}$.

Ainsi, $f'(x)\underset{0}{=}\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{3}-\frac{4x^2}{3}}}\underset{0}{=}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{2x}{3}\right)+o(x)$. En primitivant, $f(x)\underset{0}{=}f(0)+\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{2x^2}{3\sqrt{3}}+o(x^2)$.

Or $f(0)=0$ donc $f(x)\underset{0}{=}\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{2x^2}{3\sqrt{3}}+o(x^2)$. Par conséquent : $u_n=\frac{2(-1)^n}{\sqrt{3}n^\alpha}+\frac{2}{3\sqrt{3}n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

Troisième méthode : soit $f: x\mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}+x\right)$, alors f est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ donc admet un DL en 0 à tout ordre. On a $f(0)=\frac{\pi}{6}$ et, par calculs, $f'(0)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $f''(0)=\frac{4}{3\sqrt{3}}$. Ainsi, par Taylor-Young, $f(x)\underset{0}{=}\frac{\pi}{6}+\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{2x}{3\sqrt{3}}+o(x^2)$. Ainsi, comme $\alpha>0$, on a $u_n\underset{+\infty}{=}\frac{2(-1)^n}{\sqrt{3}n^\alpha}+\frac{2}{3\sqrt{3}n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.

• Dans tous les cas, on peut écrire $u_n=v_n+w_n$ avec $v_n=\frac{2(-1)^n}{\sqrt{3}n^\alpha}$ et $w_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{2}{3\sqrt{3}n^{2\alpha}}>0$. Or $\sum_{n\geqslant 1}v_n$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\alpha>0$ donc la suite $\left(\frac{2(-1)^n}{\sqrt{3}n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et $\sum_{n\geqslant 0}w_n$ converge si et seulement si $2\alpha>1\iff\alpha>\frac{1}{2}$ par comparaison de séries à termes positifs aux séries de Riemann. Par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge si et seulement si $\alpha>\frac{1}{2}$.

3.65 Posons $u_n=\frac{1}{n^a}\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ pour $n\geqslant 1$. Puisque $a>0$ et que $|u_n|\leqslant\frac{1}{n^a}$, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

Si $a>1$, comme $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^a}$ converge par Riemann, $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge absolument par comparaison.

Si $a>1$, montrons que $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge de deux manières :

Méthode 1 : comme la suite $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ est 10-périodique car $\sin$ est 2π-périodique, on voit une alternance de termes positifs et négatifs dans cette série, ce qui nous conduit à effectuer une sommation par paquets de 5 termes consécutifs. Soit $v_n=u_{5n-4}+u_{5n-3}+u_{5n-2}+u_{5n-1}+u_{5n}$ pour tout $n\geqslant 1$. On constate que v_n est positif si n est impair et que v_n est négatif si n est pair, ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1}v_n$ est alternée. Si on définit les deux sommes partielles associées $S_p=\sum_{k=1}^{p}u_k$ et $T_p=\sum_{k=1}^{p}v_k$ pour $p\geqslant 1$, on a

la relation $\sum_{k=1}^{p} v_k = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=5k-4}^{5k} u_i\right) = T_p = S_{5p} = \sum_{n=1}^{5p} u_n$. Avec les propriétés de signe de v_n, comme $\sin(n\pi+\theta) = (-1)^n \sin(\theta)$, on a la relation $v_n = (-1)^{n-1}w_n$ en définissant le réel $w_n = |v_n| \geqslant 0$ par $w_n = \dfrac{1}{(5n-4)^a}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{(5n-3)^a}\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{(5n-2)^a}\sin\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{(5n-1)^a}\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
Or $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement décroissante et tend vers 0 donc $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. Notons T la limite de la suite des sommes partielles $(T_n)_{n\geqslant 1}$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} S_{5n} = T$. De plus, on a $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1} \underset{+\infty}{=} T_n + o(1) \underset{+\infty}{=} T + o(1)$, puis $S_{5n+2} = S_{5n+1} + u_{5n+2} \underset{+\infty}{=} T + o(1)$, $S_{5n+3} = S_{5n+2} + u_{5n+3} \underset{+\infty}{=} T + o(1)$ et $S_{5n+4} = S_{5n+3} + u_{5n+4} \underset{+\infty}{=} T + o(1)$, d'où l'on déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_{5n} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+2} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+3} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+4} = T$.
Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge ce qui signifie que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. On a même $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = T$.

<u>Méthode 2</u> : la 10-périodicité de $\left(\sin\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ nous conduit à sommer par paquets de 10 termes. Soit $z_n = u_{10n-9} + u_{10n-8} + u_{10n-7} + u_{10n-6} + u_{10n-5} + u_{10n-4} + u_{10n-3} + u_{10n-2} + u_{10n-1} + u_{10n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Alors, si on définit les deux sommes partielles associées $S_p = \sum_{k=1}^{p} u_k$ et $T_p = \sum_{k=1}^{p} z_k$ pour $p \geqslant 1$, on a $T_p = S_{10p}$ comme précédemment.
On a donc $z_n = \sum_{k=0}^{9} \dfrac{1}{(10n-k)^a}\sin\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)$ ($\sin\left(\dfrac{k\pi}{5}\right) = 0$ si $k=0$ ou $k=5$ mais on le laisse) et, en écrivant par exemple $\dfrac{1}{(10n-9)^a} = \dfrac{1}{(10n)^a}\left(1-\dfrac{9}{10n}\right)^{-a} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{(10n)^a} + \dfrac{9a}{(10n)^{a+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{a+1}}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{(10n)^a} + O\left(\dfrac{1}{n^{a+1}}\right)$, on obtient $z_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{(10n)^a}\sum_{k=0}^{9}\sin\left(\dfrac{k\pi}{5}\right) + O\left(\dfrac{1}{n^{a+1}}\right)$. Or $\sum_{k=0}^{9}\sin\left(\dfrac{k\pi}{5}\right)$ est la partie imaginaire de la somme des 10 racines dixièmes de l'unité et on sait que cette somme est nulle. Ainsi, $z_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{a+1}}\right)$ ce qui garantit par comparaison aux séries de RIEMANN la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} z_n$. Ainsi, si on note T la limite de la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_{10n} = T$. De plus, $S_{10n+1} = S_{10n} + u_{10n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_{10n+1} = T$. De même, on montre que $\forall k \in [\![0;9]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} S_{10n+k} = T$ ce qui implique la convergence de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ vers T et, à nouveau, on en conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. On a même $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = T$.

3.66 <u>Analyse</u> :

- Si $P = 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement ce qui contredit l'hypothèse.
- Si $P \neq 0$, en notant $d = \deg(P)$, on a $P = a_d X^d + \cdots + a_0$ avec $a_d \neq 0$ et on pose $\lambda = a_d$ son coefficient dominant. Alors, on a clairement $P(n) \underset{+\infty}{\sim} \lambda n^d$ donc $\sqrt[3]{P(n)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{\lambda} n^{d/3}$ si on comprend la fonction $t \mapsto t^{1/3}$ comme la bijection réciproque de $t \mapsto t^3$ qui est bien une bijection (impaire) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} n + o(n) - \sqrt[3]{\lambda} n^{d/3} + o(n^{d/3})$ et on peut considérer deux cas :
  - Si $d \geqslant 4$, $u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt[3]{\lambda} n^{d/3} + o(n^{d/3}) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{\lambda} n^{d/3}$ car $n \underset{+\infty}{=} o(n^{d/3})$. Comme $d \geqslant 4$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ (selon le signe de λ) ce qui montre à nouveau que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement : NON !
  - Si $d \leqslant 2$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} n + o(n) \underset{+\infty}{\sim} n$ car $\sqrt[3]{\lambda} n^{d/3} \underset{+\infty}{=} o(n)$. Ainsi, on a encore diverge grossière de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ce qui contredit toujours l'hypothèse.

Ainsi, on conclut que $d = 3$ et on a donc $u_n \underset{+\infty}{=} (1 - \sqrt[3]{\lambda})n + o(n)$. Si on suppose que $\lambda \neq 1$, alors $\sqrt[3]{\lambda} \neq 1$

donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1-\sqrt[3]{\lambda})n$ et on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ (selon le signe de $(1-\sqrt[3]{\lambda})$) ce qui encore impossible.

Par conséquent, on a $d = 3$ et $\lambda = a_3 = 1$.

Posons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ de sorte que $\sqrt[3]{P(n)} = n\sqrt[3]{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n^2}+\dfrac{c}{n^3}}$. Or on sait que $\sqrt[3]{1+x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9} + O(x^3)$ car $\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2} = -\dfrac{1}{9}$. On écrit ce développement limité en $O(x^3)$ car on veut avoir au final un développement asymptotique de u_n en $v_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ assurant la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$. Allons-y : $\sqrt[3]{P(n)} \underset{+\infty}{=} n\left(1+\dfrac{a}{3n}+\dfrac{b}{3n^2}-\dfrac{a^2}{9n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) \underset{+\infty}{=} n+\dfrac{a}{3}+\left(\dfrac{b}{3}-\dfrac{a^2}{9}\right)\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\Big)$. De même, $\sqrt[4]{1+x} \underset{0}{=} 1+\dfrac{x}{4}+O(x^2)$ et $\sqrt[4]{n^4+n^2} = n\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^2}} \underset{+\infty}{=} n\left(1+\dfrac{1}{4n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right) \underset{+\infty}{=} n+\dfrac{1}{4n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} n - n - \dfrac{a}{3} + \left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{a^2}{9}\right)\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \underset{+\infty}{=} -\dfrac{a}{3} + \left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{a^2}{9}\right)\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

- Si $a \neq 0$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{3} \neq 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}$ diverge grossièrement une nouvelle fois : NON !
- Si $a = 0$ et $\mu = \dfrac{1}{4}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{a^2}{9} = \dfrac{1}{4}-\dfrac{b}{3} \neq 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mu}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique : NON !

On en déduit que $a = 0$ et que $b = \dfrac{3}{4}$: ce sont des conditions nécessaires à la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Synthèse :

Prenons donc $a = 0$ et $b = \dfrac{3}{4}$ et c quelconque, alors les calculs précédents permettent d'affirmer que $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument ce qui prouve qu'elle converge.

Conclusion : au final, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $P = X^3 + \dfrac{3X}{4} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ quelconque.

3.67 **a.** Par hypothèse, $0 < u_0 < 1$. Soit $n \geqslant 0$ tel que $0 < u_n < 1$, alors $u_{n+1} = u_n(1-u_n) \in]0;1[$ car $(u_n, 1-u_n) \in]0;1[^2$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$. Plus simplement, on aurait pu dire que la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x(1-x)$ est bien définie et à valeurs dans $]0;1[$ car $u_0 \in]0;1[$ et que l'intervalle $]0;1[$ est stable par f.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc elle converge par le théorème de la limite monotone car elle est minorée par 0. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [0;1[$.

En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on obtient $\ell = \ell - \ell^2$ donc $\ell = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Pour $n \geqslant 0$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n(1-u_n)} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \dfrac{1}{1-u_n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. Par le théorème de Cesaro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = 1$. Or, par télescopage, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}$ et on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{nu_n} - \dfrac{1}{nu_0}\right) = 1$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$ ce qui se traduit par $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

L'équation (E) : $y' = -y^2$ est une équation de Bernoulli et on sait qu'il suffit de poser $z = \dfrac{1}{y}$ (pour les fonctions y ne s'annulant pas sur un certain intervalle) pour qu'elle se ramène à $-\dfrac{y'}{y^2} = z' = 1$ qui se résout aisément. Poser $z = \dfrac{1}{y}$ et en calculer la dérivée s'apparente donc, au niveau des suites, au calcul du "taux d'accroissement" $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ qui tend d'ailleurs vers 1 comme dans l'équation $(F)\ :\ z' = 1$.

3.68 On peut constater que si $f : [0;1] \to [0;1]$ est continue et bijective, elle est strictement monotone. Ainsi, la fonction f^{-1} étant par définition bijective et aussi strictement monotone, elle est forcément continue.

a. Par définition, $\forall x \in [0;1],\ 2x - f(x) \in [0;1]$ donc $-f(0) \geqslant 0$. Mais $f(0) \geqslant 0$ par construction, donc $f(0) = 0$. De même, $2 - f(1) \leqslant 1$ et $f(1) \leqslant 1$ conduisent à $f(1) = 1$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0;1]$.

b. Soit $n \geqslant 0$, on prend $x = x_{n+1}$ dans $f(2x - f(x)) = x$ et on a $f(2x_{n+1} - x_{n+2}) = x_{n+1}$. On applique f^{-1} à cette relation et il vient $2x_{n+1} - x_{n+2} = x_n \iff x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie donc une récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique associée est $z^2 - 2z + 1 = 0$ avec pour solution double $z = 1$. On sait qu'alors : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = an + b$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x_0 + n(x_1 - x_0)$. Mais comme $x_1 - x_0 \neq 0$ par hypothèse, ceci impliquerait $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty$ ce qui est impossible car la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vit dans $[0;1]$. Par l'absurde, quel que soit $x_0 \in [0;1]$, on a donc $x_1 = f(x_0) = x_0$.

c. La seule fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé est $f = \mathrm{id}_{[0;1]}$.

3.69 **a.** Clairement, $u_0 = \ln(2) \sim 0,69$. De plus, $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)dt = [(1+t)\ln(1+t) - t]_0^1 = 2\ln(2) - 1 \sim 0,38$.

b. Soit $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $g : x \mapsto \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ définies sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} \geqslant 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2} \geqslant 0$. Comme $f(0) = g(0) = 0$, les fonctions croissantes f et g sont positives sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ d'où : $\forall x \geqslant 0,\ \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

On pouvait aussi appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et $x > 0$ (les conditions sont réalisées) pour avoir l'existence de $c \in]0;x[$ tel que $\dfrac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = f'(c) = \dfrac{1}{1+c}$. Or $\dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{1+c} \leqslant 1$ donc $\forall x > 0,\ \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ (vrai aussi pour $x = 0$).

c. Comme $t^n \geqslant 0$ pour $t \in [0;1]$, on a d'après **b.** l'encadrement $\dfrac{t^n}{1+t^n} \leqslant \ln(1+t^n) \leqslant t^n$ qu'on intègre (croissance de l'intégrale) sur $[0;1]$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^n)dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, par encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

d. Comme $1 + t^n \leqslant 2$ si $t \in [0;1]$, on a $\dfrac{1}{2(n+1)} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^n)dt = u_n$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ diverge par RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge aussi par minoration.
Comme $\forall t \in [0;1],\ 0 \leqslant \ln(1+t^{n+1}) \leqslant \ln(1+t^n)$, on intègre pour avoir $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge par le CSSA.

3.70 **a.** D'abord, $f_\alpha : x \mapsto x^{\alpha-1}f(x)\sin(x^\alpha)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, puisque $\alpha > 0$, on a $\sin(x^\alpha) \underset{0}{=} x^\alpha$ donc $x^{\alpha-1}\sin(x^\alpha) \underset{0}{=} x^{2\alpha-1}$. Comme f est bornée au voisinage de 0 car elle y est continue, on a $f_\alpha(x) \underset{0}{=} O\Big(\dfrac{1}{x^{1-2\alpha}}\Big)$. Comme $1 - 2\alpha < 1$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f_α est intégrable sur $]0;1]$. Ceci justifie que u_0 existe. Pour $n \geqslant 1$, u_n existe car on intègre une fonction continue sur un segment. Par le changement de variable $x = u^{1/\alpha} = \varphi(u)$, comme φ est de classe C^1, bijective et strictement croissante sur $]n\pi;(n+1)\pi]$, on a $u_n = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(u^{1/\alpha})\sin(u)du = \frac{(-1)^n}{\alpha}\int_0^\pi f((n\pi+t)^{1/\alpha})\sin(t)dt$ en posant $u = n\pi + t$ et car $\sin(n\pi + t) = -(1)^n\sin(t)$. Ainsi, $|u_{n+1}| - |u_n| = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\pi \big[f(((n+1)\pi+t)^{1/\alpha}) - f((n\pi+t)^{1/\alpha})\big]\sin(t)dt \leqslant 0$

car f est positive, décroissante et $\sin \geqslant 0$ sur $[0;\pi]$. Par conséquent, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est alternée d'après ce qui précède et $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, comme f est positive et $|\sin| \leqslant 1$ sur $[0;\pi]$, on a $|u_n| \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi} f((n\pi)^{1/\alpha})dt = \frac{\pi}{\alpha} f((n\pi)^{1/\alpha})$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, par encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Le critère spécial des séries alternées s'applique et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

c. On a déjà vérifié que $f_\alpha : x \mapsto x^{\alpha-1}f(x)\sin(x^\alpha)$ était intégrable sur $]0;1]$. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - S\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit un réel $x \geqslant (n_0\pi)^{1/\alpha}$ et $n \geqslant n_0$ l'unique entier tel que $(n\pi)^{1/\alpha} \leqslant x < ((n+1)\pi)^{1/\alpha}$. Alors $\left|\int_0^x t^{\alpha-1}f(t)\sin(t^\alpha)dt - S\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} u_k - S + \int_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{x} t^{\alpha-1}f(t)\sin(t^\alpha)dt\right|$ par Chasles. Ainsi $\left|\int_0^x t^{\alpha-1}f(t)\sin(t^\alpha)dt - S\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{x} t^{\alpha-1}f(t)dt$ (1) par inégalités triangulaire et de la moyenne. Comme f est une fonction décroissante, $\int_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{x} t^{\alpha-1}f(t)dt \leqslant f((n\pi)^{1/\alpha})\int_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{x} t^{\alpha-1}dt$ donc $\int_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{x} t^{\alpha-1}f(t)dt \leqslant f((n\pi)^{1/\alpha})\left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{x} \leqslant f((n\pi)^{1/\alpha})\left(\frac{((n+1)\pi)^{1/\alpha})^\alpha - (n\pi)}{\alpha}\right) = \pi f((n\pi)^{1/\alpha})$. Or $n\pi > x^\alpha - \pi$ donc $f((n\pi)^{1/\alpha}) \leqslant f((x^\alpha-\pi)^{1/\alpha})$ et $\lim_{x\to+\infty} f((x^\alpha-\pi)^{1/\alpha}) = 0$ par hypothèse. On conclut par encadrement que $\lim_{x\to+\infty}\int_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{x} t^{\alpha-1}f(t)dt = 0$.
Par conséquent, $\exists x_0 \geqslant (n_0\pi)^{1/\alpha}$, $\forall x \geqslant x_0$, $0 \leqslant \int_{(n\pi)^{1/\alpha}}^{x} t^{\alpha-1}f(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. L'inégalité (1) nous apprend alors que $\forall x \geqslant x_0$, $\left|\int_0^x t^{\alpha-1}f(t)\sin(t^\alpha)dt - S\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci se traduit par $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^{\alpha-1}f(t)\sin(t^\alpha)dt = S$.
Au final, on a bien établi la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}f(t)\sin(t^\alpha)dt$.

3.71 **a.** Par dualité suite-série, on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, comme $\sum_{k=1}^{n} p_k = u_0 - u_n$ après télescopage, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on aura $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 - \lim_{n\to+\infty} u_n$.
On a l'équivalence : $\left(\sum_{n\geqslant 1} p_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1\right) \Longleftrightarrow \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\right)$.

b. Soit $n \geqslant 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} kp_k = \sum_{k=1}^{n} k(u_{k-1}-u_k) = \sum_{k=1}^{n} ku_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} ku_k$ donc, en ré-indexant, on trouve $\sum_{k=1}^{n} kp_k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)u_k - \sum_{k=1}^{n} ku_k = u_0 - nu_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) - nu_n$.
Ainsi, si $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on a $(\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge$) \Longleftrightarrow (\sum_{n\geqslant 1} np_n$ converge$)$ et, dans le cas de la convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell + \sum_{n=1}^{+\infty} np_n$. De plus, si $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \ell > 0$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n} > 0$ et la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. On peut donc être plus précis.

- Si $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} np_n$ divergent.
- Si $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $(\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge$) \Longleftrightarrow (\sum_{n\geqslant 1} np_n$ converge$)$ et, s'il y a convergence, on a même $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} np_n$ (revoir cette relation avec les espérances des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$).

c. Soit $x \geqslant 0$, en posant $u : t \mapsto f(t)$ et $v : t :\mapsto t$, les deux fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0;x]$, par intégration par parties, on a $\int_0^x f(t)dt = [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t)dt$. Si la fonction $t \mapsto tf(t)$ admet une limite finie

ℓ en $+\infty$, la formule précédente montre que $\int_0^{+\infty} f$ converge $\iff \int_0^{+\infty} tf'(t)dt$ converge. Puisque les signes de ces fonctions sont constants, alors (f intégrable sur $\mathbb{R}_+$) $\iff$ ($t \mapsto tf'(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$). Comme à la question **b.**, si $\ell > 0$, alors $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{t}$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

- Si $t \mapsto tf(t)$ admet une limite finie $\ell > 0$ en $+\infty$, f et $t \mapsto tf'(t)$ ne sont pas intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $t \mapsto tf(t)$ admet pour limite 0 en $+\infty$, (f intégrable sur $\mathbb{R}_+$) $\iff$ ($t \mapsto tf'(t)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$) et, s'il y a convergence, on a même $\int_0^{+\infty} f(t)dt = -\int_0^{+\infty} tf'(t)dt$.

3.72 **a.** La fonction $f : u \mapsto \cos(tu)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $\varphi = \ln$ est de classe C^1, bijective de $[1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante. Ainsi, par changement de variable, puisque $\varphi'(x).f \circ \varphi(x) = \frac{\cos(t\ln(x))}{x}$, on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t\ln(x))}{x}dx$ et $\int_0^{+\infty} \cos(tu)du$ sont de même nature. Si $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(tu)du$ diverge clairement car $\cos(tu) = 1$. Si $t \neq 0$, $\int_0^x \cos(tu)du = \left[\frac{\sin(tu)}{t}\right]_0^x = \frac{\sin(tx)}{x}$ donc $\int_0^{+\infty} \cos(tu)du$ diverge encore. Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t\ln(x))}{x}dx$ diverge pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b. <u>Méthode 1</u> : Si $t = 0$, $\frac{\cos(t\ln(n))}{n} = \frac{1}{n}$ et la série harmonique diverge, donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(t\ln(n))}{n}$ diverge.

Si $t > 0$ (le cas $t < 0$ est inutile puisque $\cos$ est paire), alors en posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(t\ln(k))}{k}$, on peut sommer sur des tranches (sommation par paquets) où le cosinus est positif. L'idée est de montrer que cette série diverge comme le laisse imaginer la question **a.** même si on ne peut pas appliquer tel quel le théorème de comparaison série/intégrale car $x \mapsto \frac{\cos(t\ln(x))}{x}$ n'est pas monotone.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $2p\pi - \frac{\pi}{3} \leqslant t\ln(k) \leqslant 2p\pi + \frac{\pi}{3} \iff e^{\frac{(2p-1)\pi}{3t}} \leqslant k \leqslant e^{\frac{(2p+1)\pi}{3t}}$. En posant $a_p = \left\lfloor e^{\frac{(2p-1)\pi}{3t}} \right\rfloor + 1$ et $b_p = \left\lfloor e^{\frac{(2p+1)\pi}{3t}} \right\rfloor$, on a l'inégalité $\forall k \in [\![a_p; b_p]\!]$, $\cos(t\ln(k)) \geqslant \frac{1}{2}$. Alors, en les sommant sur cette tranche, on obtient $S_{b_p} - S_{a_p-1} = \sum_{k=a_p}^{b_p} \frac{\cos(t\ln(k))}{k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=a_p}^{b_p} \frac{1}{k} \geqslant \frac{b_p - a_p + 1}{2b_p}$. Or $e^{\frac{(2p+1)\pi}{3t}} - 1 \leqslant b_p \leqslant e^{\frac{(2p+1)\pi}{3t}}$ et $a_p \leqslant e^{\frac{(2p-1)\pi}{3t}} + 1$ donc $S_{b_p} - S_{a_p-1} \geqslant \frac{e^{\frac{(2p+1)\pi}{3t}} - e^{\frac{(2p-1)\pi}{3t}} - 1}{2e^{\frac{(2p+1)\pi}{3t}}} = u_p$. Or $\lim_{p\to+\infty} u_p = \frac{1}{2} - \frac{e^{\frac{-2\pi}{3t}}}{2} = \ell > 0$.

Si la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(t\ln(n))}{n}$ convergeait, en notant S sa somme, on aurait $\lim_{p\to+\infty} S_{b_p} - S_{a_p-1} = S - S = 0$ car $\lim_{p\to+\infty} a_p = \lim_{p\to+\infty} b_p = +\infty$. Or $S_{b_p} - S_{a_p-1} \geqslant u_p$, en passant à la limite, devient $0 \geqslant \ell$, ce qui est absurde. Au final, on a bien montré la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(t\ln(n))}{n}$.

<u>Méthode 2</u> : Une méthode plus fructueuse est de tenter d'adapter le théorème de comparaison série/intégrale malgré tout. On pose $g : x \mapsto \frac{\cos(t\ln(x))}{x}$ pour $t > 0$. Alors g est de classe C^1, donc pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} g(x)dx - g(k) = \int_k^{k+1} (g(x) - g(k))dx = [(x-k-1)(g(x)-g(k))]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} (k+1-x)g'(x)dx$ par une intégration par parties facile à justifier, donc $\int_k^{k+1} g(x)dx - g(k) = \int_k^{k+1} (k+1-x)g'(x)dx$. Ainsi, comme $g'(x) = -\frac{t\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)}{x^2}$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1+|t|}{x^2}$ et $\forall x \in [k; k+1]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1+|t|}{k^2}$. Par inégalité de la

moyenne, $\forall k \geqslant 1$, $\left|\int_k^{k+1} g(x)dx - g(k)\right| \leqslant \frac{2}{k^2}$ donc la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\int_k^{k+1} g(x)dx - g(k)\right)$ converge absolument. Sa somme partielle vaut $\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} g(x)dx - g(k)\right) = \int_1^{n+1} g(x)dx - S_n$ qui converge donc vers un réel λ. Si la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(t\ln(n))}{n}$ convergeait, alors la suite $\left(\int_1^{n+1} g(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergerait aussi, vers un réel $a \in \mathbb{R}$. Or $\int_1^n g(x)dx = \Big[\sin(t\ln(x))\Big]_1^n = \sin(t\ln(n))$ donc $(\sin(t\ln(n)))_{n\geqslant 1}$ converge vers a. Alors on aurait, pour un réel $y \geqslant 0$, $\int_0^y g(x)dx = \int_0^{\lfloor y\rfloor} g(x)dx + \int_{\lfloor y\rfloor}^y g(x)dx$. Or $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\lfloor y\rfloor} g(x)dx = a$ d'après ce qui précède et $\left|\int_{\lfloor y\rfloor}^y g(x)dx\right| \leqslant \int_{\lfloor y\rfloor}^{\lfloor y\rfloor+1}|g(x)|dx \leqslant \frac{1}{\lfloor y\rfloor}$. Par encadrement, on a donc $\lim_{y\to+\infty}\int_{\lfloor y\rfloor}^y g(x)dx = 0$ ce qui est impossible car on a vu en **a.** que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t\ln(x))}{x}dx$ divergeait. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(t\ln(n))}{n}$ diverge.

3.73 **a.** La $f : t \mapsto \pi|\sin(t)| - 2$ est π-périodique et continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, comme F est la primitive de f qui s'annule en 0, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Or $\int_0^\pi f = \big[-\pi\cos(t)-2t\big]_0^\pi = 2\pi - 2\pi = 0$ donc $F(\pi) = 0$. Ainsi, si $x \in \mathbb{R}_+$, en posant $n = \left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor$, on a $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ et $F(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt + \int_{n\pi}^x f(t)dt = \int_0^{x-n\pi} f(t)dt$ car f est π-périodique donc $F(x) = F(x - n\pi)$ avec $x - n\pi \in [0;\pi]$. Mais comme F est continue sur le segment $[0;\pi]$, elle y est bornée donc F est bornée sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.

b. Comme $u = F$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[n\pi;+\infty[$, et que $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{t} = 0$ car F est bornée, alors par intégration par parties, $\int_{n\pi}^{+\infty}\frac{\pi|\sin(t)|-2}{t}dt$ est de même nature que $\int_{n\pi}^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}dt$ qui converge par RIEMANN car $\frac{F(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On a même, puisque $F(n\pi) = 0$, $u_n = \int_{n\pi}^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}dt$.

c. On a vu à la question **a.** que F est elle aussi π-périodique. Or, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on a la relation $F(x) = \int_0^x(\pi\sin(t)-2)dt = \big[-\pi\cos(t)-2t\big]_0^x = \pi(1-\cos(x)) - 2x$. Ainsi, $\int_0^\pi F = \Big[\pi x - \pi\sin(x) - x^2\Big]_0^\pi = 0$. En posant $H(x) = \int_0^x F(t)dt$, la fonction H est la primitive de F (donc H est C^1 sur $\mathbb{R}$) qui s'annule en 0 et elle est aussi π-périodique donc bornée sur $\mathbb{R}$. On peut à nouveau effectuer une intégration par parties en posant $u = H$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui sont C^1 sur $[n\pi;+\infty[$. Comme $\lim_{t\to+\infty}\frac{H(t)}{t^2} = H(n\pi) = 0$, on obtient donc $u_n = \int_{n\pi}^{+\infty}\frac{F(t)}{t^2}dt = \int_{n\pi}^{+\infty}\frac{2H(t)}{t^3}$. Par conséquent, si $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|H(t)| \leqslant M$, $|u_n| \leqslant 2M\int_{n\pi}^{+\infty}\frac{dt}{t^3} = \frac{M}{(n\pi)^2}$. Comme $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge d'après RIEMANN, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge absolument par comparaison.

3.74 Notons que u_n est bien défini à partir d'un certain rang car $\lim_{n\to+\infty} n^2 + an + 2 = \lim_{n\to+\infty} n^2 + bn + 1 = +\infty$. Comme $v_n = \sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1} = n\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$, avec le développement limité $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$, on a donc $v_n \underset{+\infty}{=} n\left(1 + \frac{a}{2n} + \frac{1}{n^2} - \frac{a^2}{8n^2} - 1 - \frac{b}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{b^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ ou encore $v_n \underset{+\infty}{=} \frac{a-b}{2} + \frac{4-a^2+b^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{a-b}{2}$.

- Si $|a-b| < 2$, alors en prenant $\frac{a-b}{2} < \lambda < 1$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|v_n| \leqslant \lambda$.

  Alors $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| = |v_n^n| \leqslant \lambda^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.

- Si $|a-b| > 2$, alors il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|v_n| \geqslant 1$ donc $|u_n| \geqslant 1$. La suite

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.

• Si $|a-b|=2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|=1$ donc, comme $|v_n| \underset{+\infty}{=} 1+\frac{\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)$ avec $\alpha=\pm(4-a^2+b^2)$ (selon que $a-b=2$ ou $a-b=-2$), on a $|u_n|=e^{n\ln(|v_n|)}=e^{n(1+\alpha/n+o(1/n)}\to e^{\alpha}\neq 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas 0 donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement.

3.75 **a.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^x-1$. Il est clair que f est croissante. On montre par une petite étude de fonction, ou par convexité de la fonction $\exp$, que $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x\geqslant 1+x$, c'est-à-dire $f(x)\geqslant x$ et que $f(x)=x\iff x=0$. Pour toute valeur de $u_0\in\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et croissante car elle vérifie $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)\geqslant u_n$. Il y a alors deux cas :

• Si $u_0\leqslant 0$. S'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\leqslant 0$, alors $u_{n+1}=f(u_n)=e^{u_n}-1\leqslant 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0 donc elle converge vers $\ell\leqslant 0$. En passant à la limite dans $u_{n+1}=f(u_n)$, par continuité de f, on a $\ell=f(\ell)$ donc $\ell=0$ d'après ce qui précède. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

• Si $u_0>0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore croissante. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ, alors forcément $\ell\geqslant u_0>0$. À nouveau, on aurait $\ell=f(\ell)$ donc $\ell=0$: impossible. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

b. Comme $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x\geqslant x+1>x$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie par $v_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\ln(e^{v_n}-v_n)$. De plus, si $v_n>0$, $e^{v_n}-v_n>1$ donc $v_{n+1}>\ln(1)=0$. La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est donc strictement positive. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\ln(e^{v_n}-v_n)<\ln(e^{v_n})=v_n$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi strictement décroissante. Comme elle est décroissante et minorée par 0, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell\geqslant 0$. En passant à la limite dans la relation $v_{n+1}=\ln(e^{v_n}-v_n)$, on obtient $\ell=\ln(e^{\ell}-\ell)$ d'où $e^{\ell}=e^{\ell}-\ell$ donc $\ell=0$. Enfin, $v_n=e^{v_n}-e^{v_{n+1}}$, or $(e^{v_n})_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 donc, par dualité suite/série, $\sum\limits_{n\geqslant 0}v_n$ converge. Or, par télescopage, $\sum\limits_{k=0}^{n}v_k=\sum\limits_{k=0}^{n}(e^{v_k}-e^{v_{k+1}})=e^{v_0}-e^{v_{n+1}}$, en passant à la limite, on obtient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_n=e-1$.

3.76 La fonction Arccos est décroissante sur $[-1;1]$ et $\forall n\geqslant 1$, $\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}$ donc $\text{Arccos}\Big(\frac{1}{n}\Big)\leqslant\text{Arccos}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ ainsi $u_n\leqslant 0$. De plus, comme $\lim\limits_{t\to 0^+}\text{Arccos}(t)=\frac{\pi}{2}$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$. Par conséquent, $\sin(u_n)\underset{+\infty}{=}u_n$ or $\sin(u_n)=\sin(a_n-b_n)$ en notant $a_n=\text{Arccos}\Big(\frac{1}{n}\Big)$ et $b_n=\text{Arccos}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$. On obtient donc $\sin(u_n)=\sin(a_n)\cos(b_n)-\sin(b_n)\cos(a_n)$. On sait que $\forall x\in[-1;1],\ \sin(\text{Arccos}(x))=\sqrt{1-x^2}$ donc $\sin(u_n)=\frac{1}{n^2}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}$. Or $\sqrt{1-x}\underset{0}{=}1-\frac{x}{2}+o(x)$ donc $\sin(u_n)\underset{+\infty}{=}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$. On peut ne garder comme information que $u_n\underset{+\infty}{=}-\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ et même $u_n\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{n}$.

On pouvait aussi se servir de la relation $\text{Arccos}(x)=\frac{\pi}{2}-\text{Arcsin}(x)$ pour avoir $\text{Arccos}(x)\underset{0}{=}\frac{\pi}{2}-x+O(x^2)$ et obtenir plus simplement $u_n\underset{+\infty}{=}-\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc $u_n\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{n}<0$. Comme la série harmonique diverge, par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ diverge.

Or $(-1)^n u_n\underset{+\infty}{=}\frac{(-1)^{n+1}}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ qu'on peut écrire $(-1)^n u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+v_n$ avec $v_n\underset{+\infty}{=}O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$. Par le critère spécial des séries alternées, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge car $\Big(\frac{1}{n}\Big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1}v_n$ converge absolument par comparaison car $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge. Par somme $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ converge.

3.77 On sait que $\forall x > 0,\ \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$ donc, avec $u_n = \text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n)$, on a aussi $u_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n+a}\right)$. Or $\text{Arctan}(x) \underset{0}{=} x + O(x^3)$. Ainsi $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Comme $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} = \frac{a}{n(n+a)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}$ donc, par comparaison $\sum\limits_{n \geqslant 0} \big(\text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n)\big)$ converge.
On pouvait aussi d'abord calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, par la formule donnant $\tan(x+y)$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \tan(u_n) = \frac{n+a-n}{1+n(n+a)}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}$ à nouveau.
On pouvait encore dire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists c_n \in]n; n+a[,\ u_n = (n+a-n)\,\text{Arctan}'(c_n) = \frac{a}{1+c_n^2}$ par le théorème des accroissements finis. Ainsi, comme $c_n > n$, on a $1 + c_n^2 > c_n^2 > n^2$ d'où $u_n \leqslant \frac{a}{n^2}$. Puis comparaison.

Si $a \in \mathbb{N}^*$, on peut même obtenir la somme de cette série par télescopage.
Si $a = 1$, comme $\sum\limits_{k=0}^{n} \big(\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)\big) = \text{Arctan}(n+1)$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)\big) = \frac{\pi}{2}$.
Si $a = 2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \big(\text{Arctan}(k+2) - \text{Arctan}(k)\big) = \text{Arctan}(n+2) + \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(1)$ donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\text{Arctan}(n+2) - \text{Arctan}(n)\big) = \frac{3\pi}{4}$. Etc...
Ces calculs nous font penser, comme Arctan est croissante, à écrire $u_n \leqslant \text{Arctan}(n + \lfloor a \rfloor + 1) - \text{Arctan}(n)$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant (\lfloor a \rfloor + 1)\frac{\pi}{2}$ par télescopage (à faire), ce qui permet à nouveau de conclure par majoration.

3.78 **a.** Comme $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \ell u_n^\alpha$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell u_n^\alpha > 0$, alors $u_n - u_{n+1}$ devient strictement positif à partir d'un certain rang. En effet, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{\ell u_n^\alpha} = 1$, il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N,\ \left|\frac{u_n - u_{n+1}}{\ell u_n^\alpha} - 1\right| < \frac{1}{2}$ donc $0 < \frac{1}{2} < \frac{u_n - u_{n+1}}{\ell u_n^\alpha} < \frac{3}{2}$ et on conclut bien que $u_n - u_{n+1} > 0$ pour tout entier $n \geqslant N$. Ainsi, $(u_n)_{n \geqslant N}$ est strictement décroissante.
b. Si $\alpha < 2$ et $n \geqslant N$, $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ étant décroissante sur $[u_{n+1}; u_n]$, $\forall t \in [u_{n+1}; u_n],\ \frac{1}{t^{\alpha-1}} \geqslant \frac{1}{u_n^{\alpha-1}}$. On intègre sur $[u_{n+1}; u_n]$ (car $n \geqslant N$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$) pour obtenir $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} = \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{u_n^{\alpha-1}}dt \leqslant \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt$.
Pour $m \geqslant N+1$, en sommant ces inégalités pour $n \in [\![N; m-1]\!]$ et avec la relation de Chasles, on obtient $\sum\limits_{n=N}^{m} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \leqslant \sum\limits_{n=N}^{m} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt = \int_{u_m}^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt \leqslant \int_0^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt = \left[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^{u_N} = \frac{u_N^{2-\alpha}}{2-\alpha}$ (la convergence de l'intégrale est assurée par le critère de Riemann). Or la suite $\left(\sum\limits_{n=N}^{m} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}\right)_{m \geqslant N}$ est croissante et majorée donc elle converge, ce qui garantit la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}$. Enfin, par hypothèse, on a $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \ell u_n > 0$ donc, par comparaison, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge aussi.
c. Si $\alpha \geqslant 2$ et $n \geqslant N$, cette fois-ci, on préfère écrire $\forall t \in [u_{n+1}; u_n],\ \frac{1}{t^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}}$ toujours par décroissance $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ sur $[u_{n+1}; u_n]$. On intègre sur $[u_{n+1}; u_n]$ (car $n \geqslant N$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$) pour obtenir l'inégalité $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}} = \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}}dt \geqslant \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt$. Pour $m \geqslant N+1$, en sommant pour $n \in [\![N; m-1]\!]$ et encore avec la relation de Chasles, on obtient $\sum\limits_{n=N}^{m} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}} \geqslant \sum\limits_{n=N}^{m} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt = \int_{u_m}^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt$. Comme maintenant $\alpha - 1 \geqslant 1$, le critère de Riemann donne la divergence de l'intégrale $\int_0^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}}dt$ donc, comme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_m = 0$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \displaystyle\int_{u_m}^{u_N} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\,dt = +\infty$. Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{m\to+\infty} \displaystyle\sum_{n=N}^{m} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}} = +\infty$ d'où la divergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}}$ (ses sommes partielles tendent vers $+\infty$).

Une nouvelle fois, par hypothèse, $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \ell u_n^{\alpha}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\alpha \geqslant 2$ donc $u_n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o(u_n)$ (vrai dès que $\alpha > 1$). Ainsi, on a $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{=} o(u_n)$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} u_{n+1}$ et il vient $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \ell u_n$. Comme on parle de suites positives strictement (au moins à partir d'un certain rang), on conclut de la divergence vue ci-dessus que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge si $\alpha \geqslant 2$.

En conclusion, avec ces hypothèses, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

3.79 **a.** D'abord, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Ceci justifie l'existence du reste R_n pour tout entier $n \geqslant -1$.
On sait d'après ce même théorème que R_n est du signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ donc $|R_n| = (-1)^{n+1}R_n$. Ainsi, on a $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1}R_n - (-1)^{n+2}R_{n+1} = (-1)^{n+1}(R_n + R_{n+1})$. Or, en posant $k = j+1$, il vient $R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{j=n+1}^{+\infty} (-1)^{j+1} u_{j+1}$. Ainsi, en regroupant les deux séries, on obtient la relation $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \big((-1)^k u_k + (-1)^{k+1} u_{k+1}\big)$ d'où $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^{n+1} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ en notant $v_k = u_k - u_{k+1}$. Or, par hypothèse, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive, et tend vers 0 (par somme). Par conséquent, par le critère spécial des séries alternées, comme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ est le reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k v_k$, le signe de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ est celui de $(-1)^{n+1}v_{n+1}$ donc celui de $(-1)^{n+1}$. On en déduit que le signe de $|R_n| - |R_{n+1}|$ est celui de $(-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = 1$ ce qui permet de conclure que $|R_n| - |R_{n+1}| \geqslant 0$, c'est-à-dire que $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. Comme avant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|R_n| + |R_{n+1}| = (-1)^{n+1}R_n + (-1)^{n+2}R_{n+1} = (-1)^{n+1}(R_n - R_{n+1})$ or $R_n - R_{n+1} = (-1)^{n+1}u_{n+1}$ après simplification. Ainsi, $|R_n| + |R_{n+1}| = u_{n+1}$. Mais on sait que la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $|R_{n+1}| \leqslant |R_n| \leqslant |R_{n-1}|$ qui devient, en ajoutant $|R_n|$ et d'après ce qui précède, $u_{n+1} \leqslant 2|R_n| \leqslant u_n$ et on a bien $\dfrac{u_{n+1}}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \dfrac{u_n}{2}$.

c. Comme $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$ d'après l'énoncé, le théorème des gendarmes prouve que $|R_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$ d'après l'encadrement $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{2|R_n|}{u_n} \leqslant 1$. Et puisque $R_n = (-1)^{n+1}|R_n|$, on en déduit que $R_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\dfrac{u_n}{2}$.

d. Posons $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ donc f est décroissante sur $[e;+\infty[$ donc sur $[3;+\infty[$. f est même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$ donc f'' est positive sur $[e^{3/2};+\infty[$ donc sur $[5;+\infty[$. Ainsi, la fonction f est convexe sur $[5;+\infty[$. De plus, en posant $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} = f(n)$, on a $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ car $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{=} o(\ln(n))$ et $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$ donc, en divisant, $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. Pour $n \geqslant 5$, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe deux réels $\alpha_n \in]n+1;n+2[$ et $\beta_n \in]n;n+1[$ tels que $u_{n+2} - u_{n+1} = f(n+2) - f(n+1) = f'(\alpha_n)$ et $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = f'(\beta_n)$. Mais comme f' est croissante sur $[5;+\infty[$, on a $f'(\beta_n) \leqslant f'(\alpha_n)$ car

$\beta_n \leqslant \alpha_n$. Ainsi, pour $n \geqslant 5$, $u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n$.

On en déduit d'après la question **c.** (comme on parle de reste, le fait que les propriétés requises ne commencent qu'à partir du rang 5 importe peu) que $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k} \underset{+\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \dfrac{\ln(n)}{2n}$.

3.80 D'abord, par troncature des développements limités (ici des développements asymptotiques), les constantes a_0, a_1 sont communes à tous les ordres k aux quels on exprime ce développement.

a. Supposons que $\sum\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi(n) = 0$ donc $a_0 = 0$. De plus, si $a_1 \neq 0$, on a $\Phi(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_1}{n}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ diverge par le critère de RIEMANN, ainsi $a_1 = 0$. Réciproquement, si $a_0 = a_1 = 0$, on a $\Phi(n) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge par RIEMANN. Conclusion : $\sum\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge $\iff (a_0 = a_1 = 0)$.

b. Supposons que $\prod\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge, cela signifie que les produits partiels sont non nuls et tendent vers un réel non nul ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \Phi(n) = 1$ donc $a_0 = 1$. À partir d'un certain rang n_0, le terme $\Phi(n)$ sera strictement positif et, en passant au logarithme, la convergence de ce produit équivaut à la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \ln(\Phi(n))$. Or $\ln(\Phi(n)) \underset{+\infty}{=} \dfrac{a_1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ donc si $a_1 \neq 0$, on a $\ln(\Phi(n)) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_1}{n}$ ce qui contredit avec RIEMANN la convergence de $\prod\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$. Alors $a_1 = 0$ donc $\phi(n) \underset{+\infty}{=} 1 + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ ce qui montre que $\ln(\Phi(n)) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ d'où la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \ln(\Phi(n))$ qui implique celle de $\prod\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$.
En conclusion, on a l'équivalence $\prod\limits_{n \geqslant 1} \Phi(n)$ converge $\iff (a_0 = 1$ et $a_1 = 0)$.

c. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi(k) \neq 0$ car sinon la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ est claire.

Posons $u_n = \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i) \neq 0$, si $a_0 \notin [-1;1]$, alors la suite $(|u_n|)_{n \geqslant n_0}$ est strictement croissante à partir d'un rang n_0 pour lequel $\forall n \geqslant n_0,\ |\Phi(n)| > 1$ et la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ est grossièrement divergente.

Si $|a_0| < 1$, en prenant ℓ tel que $\ell \in]|a_0|;1[$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |\Phi(n)| \leqslant \ell$ donc, par une récurrence simple, $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant |u_{n_0}| \ell^{n-n_0}$. et la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est absolument convergente par comparaison aux séries géométriques.

Si $a_0 = 1$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les $\Phi(n)$ sont strictement positifs donc $u_n = A \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$ en prenant $A = \prod\limits_{i=0}^{n_0-1} \Phi(i) \neq 0$. La convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ est équivalente à celle de $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$. Or, en posant $v_n = \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$, on a $\ln(v_n) = \sum\limits_{i=n_0}^{n} \ln(\Phi(i))$ avec $\ln(\Phi(i)) = \dfrac{a_1}{i} + w_i$ où $w_i \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{i^2}\Big)$. Ainsi $\ln(v_n) \underset{+\infty}{=} a_1\big(H_n - H_{n_0-1}\big) + S + o(1)$ où $S = \sum\limits_{i=n_0}^{+\infty} w_i$. Alors $v_n = \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i) \underset{+\infty}{=} e^{a_1 \ln(n) + \lambda + o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{-a_1}}$ (où $\alpha = e^{\lambda} > 0$) donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ converge si et seulement si $a_1 < -1$.

Si $a_0 = -1$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les $\Phi(n)$ sont strictement négatifs donc $u_n = A \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$ en prenant $A = \prod\limits_{i=0}^{n_0-1} \Phi(i) \neq 0$. La convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ est équivalente à celle de $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$.

Or, en posant $v_n = \prod_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$, on a $v_n = (-1)^{n-n_0+1} t_n$ avec $t_n = \prod_{i=n_0}^{n} |\Phi(i)|$ et $|\Phi(i)| \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{a_1}{i} + O\left(\frac{1}{i^2}\right)$ donc $\ln(t_n) = \sum_{i=n_0}^{n} \ln(|\Phi(i)|)$ avec $\ln(|\Phi(i)|) = -\frac{a_1}{i} + w_i$ où $w_i \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{i^2}\right)$. Ainsi, comme avant, en posant $S = \sum_{i=n_0}^{+\infty} w_i$, on a $\ln(t_n) \underset{+\infty}{=} -a_1\big(H_n - H_{n_0-1}\big) + S + o(1)$. Alors $t_n = \prod_{i=n_0}^{n} |\Phi(i)| \underset{+\infty}{=} e^{-a_1 \ln(n) + \lambda + o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^{a_1}}$ (où $\alpha = e^{\lambda} > 0$) donc $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{i=0}^{n} \Phi(i)$ converge par le critère spécial des séries alternées si et seulement si $a_1 > 0$.
En effet, si $a_1 > 0$, la suite $(t_n)_{n\geqslant n_0}$ tend bien vers 0 d'après l'équivalent précédent et elle est décroissante à partir d'un certain rang car $\frac{t_{n+1} - t_n}{t_n} = |\Phi(n+1)| - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{a_1}{n} < 0$. Et si $a_1 \leqslant 0$, alors la suite $(t_n)_{n\geqslant n_0}$ ne tend pas vers 0 donc il y a divergence grossière de la série.
En conclusion, la série $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{i=0}^{n} \Phi(i)$ converge si et seulement si

$$(\exists k \in \mathbb{N},\ \phi(k) = 0) \ \text{ ou } \ (a_0 \in]-1;1[) \ \text{ ou } \ (a_0 = 1 \ \text{ et } \ a_1 < -1) \ \text{ ou } \ (a_0 = -1 \ \text{ et } \ a_1 > 0).$$

d. Ici $\Phi(i) = 2 - e^{\frac{\alpha}{i}} \underset{+\infty}{=} 2 - \left(1 + \frac{\alpha}{i} + \frac{\alpha^2}{2i^2} + o\left(\frac{1}{i^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{i} - \frac{\alpha^2}{2i^2} + o\left(\frac{1}{i^2}\right)$. Par conséquent, d'après ce qui précède, la série $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{i=1}^{n} \left(2 - e^{\frac{\alpha}{i}}\right)$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3.81 **a.** Si $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$, alors f est croissante et continue sur $[0;1]$ et l'intervalle $[0;1[$ est stable par f. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n < 1$ (on le montre par récurrence). De plus, comme $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} > x_0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (encore par récurrence) donc elle converge vers un réel $\ell \in [0;1]$ qui est un point fixe de f (on passe à la limite dans $x_{n+1} = f(x_n)$.). Or $f(x) = x \Longleftrightarrow 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0$ d'où $\ell = 1$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.
b. D'après ce qui précède, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in]u_n;1[$ tel que $x_{n+1} = f(1) - f(u_n) = f'(v_n)(1 - u_n)$ d'après le théorème des accroissements finis. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ par encadrement donc $\lim_{n\to+\infty} f'(v_n) = f'(1) = \frac{1}{4}$ parce que f est de classe C^1 sur $[0;1]$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge par le critère de D'ALEMBERT.

3.82 Pour $n \geqslant 1$, on a $v_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)} = \dfrac{u_n + 1 - 1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)} = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k)} - \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}$. Posons donc, pour $n \geqslant 0$, le réel $w_n = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)} > 0$ de sorte que l'on ait $v_n = w_{n-1} - w_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Par dualité suite-série, on sait que la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$, donc de la série $\sum_{n\geqslant 1} (w_{n-1} - w_n)$, équivaut à celle de la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ vers un réel positif, et ceci équivaut encore, par les propriétés du logarithme, au fait que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers un réel ou vers $-\infty$.
Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(w_n) = -\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)$. On a donc

- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel ou vers $+\infty \Longleftrightarrow$ la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sans tendre vers $+\infty \Longleftrightarrow$ la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

On voit la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sur le comportement de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$.

3.83 **a.** La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ converge car en notant $u_n=\frac{1}{n!}$, on a par exemple $u_n \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ ou alors par D'ALEMBERT car $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0<1$. On reconnaît la série exponentielle et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e^1=e$. Par conséquent $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ existe pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ en tant que reste d'une série convergente.

b. On isole les deux premiers termes, $(n+1)!R_n=(n+1)!\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!}=1+\frac{1}{n+2}+\sum\limits_{k=n+3}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!}$ or, pour tout entier $k\geqslant n+3$, on a $\frac{(n+1)!}{k!}=\frac{1}{k(k-1)\cdots(n+2)}\leqslant\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. Ainsi, en sommant $\sum\limits_{k=n+3}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!}\leqslant\sum\limits_{k=n+3}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\Big)=\frac{1}{n+2}$. Ainsi, $1\leqslant(n+1)!R_n\leqslant 1+\frac{2}{n+2}$ et on conclut par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)!R_n=1$.

c. On sait que $e=S_n+R_n$ avec $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ donc $en!=n!S_n+n!R_n$ mais $n!S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ est un entier donc $\sin(2\pi en!)=\sin(2\pi n!S_n+2\pi n!R_n)=\sin(2\pi n!R_n)$ par 2π-périodicité de la fonction $\sin$. Comme $R_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{(n+1)!}$, on a $2\pi n!R_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{2\pi}{n+1}$ donc $u_n=\sin(2\pi en!)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2\pi}{n+1}>0$ ce qui garantit par comparaison à la série harmonique de RIEMANN la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin(2\pi en!)$.

3.84 **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=(x+1)e^x>0$ donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Le théorème de la bijection continue montre que f est bijective. Le graphe de f^{-1} s'obtient à partir du graphe de f par une symétrie orthogonale par rapport à la droite $D: y=x$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x)>x$ car $e^x>1$ d'où, en appliquant f^{-1} strictement croissante (car f l'est) à cette stricte inégalité, on obtient $f^{-1}(f(x))=x>f^{-1}(x)$.

b. Comme f est bijective, la suite $\big(u_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_0=a>0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}(a)=f^{-1}\big(u_n(a)\big)$ donc elle est bien définie car $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f^{-1}. De plus, d'après **a.**, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}(a)<u_n(a)$ donc la suite $\big(u_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme $\big(u_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, le théorème de la limite monotone montre que la suite $\big(u_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente tend vers $\ell_a\geqslant 0$. Si on avait $\ell_a>0$, en passant à la limite dans $u_{n+1}(a)e^{u_{n+1}(a)}=u_n(a)$, on aurait $\ell_a e^{\ell_a}=\ell_a$ donc $e^{\ell_a}=1$. NON!

Ainsi $\ell_a=0$ et la suite $\big(u_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quelle que soit la valeur de $a>0$.

c. Pour $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)}=e^{u_{n+1}(a)}$ donc $u_{n+1}(a)=\ln\Big(\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)}\Big)=\ln\big(u_{n+1}(a)\big)-\ln\big(u_n(a)\big)$. Ainsi, la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(a)$, qui est la même que celle de $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_{n+1}(a)$, est celle de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\big(\ln\big(u_{n+1}(a)\big)-\ln\big(u_n(a)\big)\big)$. Par dualité suite/série, la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(a)$ est donc celle de la suite $\big(\ln\big(u_n(a)\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\big(u_n(a)\big)=-\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n(a)$ diverge.

Question de cours : Soit $f:\widetilde{[a;b]}\to\mathbb{K}$ de classe C^{n+1}, alors la formule de TAYLOR reste intégral est la relation $f(b)=f(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!}+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$.

3.85 **a.** Par une récurrence simple, u_n est bien défini et $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $\ln(u_n)$ est bien défini.

Méthode 1 : par récurrence, on montre que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+3}$. Ainsi, $\ln(u_n)=-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{3}{2k}\Big)$.

Par conséquent, d'après l'énoncé, $w_n = \ln(u_n) + \frac{3}{2}\ln(n) \underset{+\infty}{=} \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{3}{2k}\right) - \frac{3\gamma}{2} + o(1)$ donc $w_n \underset{+\infty}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2k} - \ln\left(1+\frac{3}{2k}\right)\right) - \frac{3\gamma}{2} + o(1)$. Or $\frac{3}{2k} - \ln\left(1+\frac{3}{2k}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ donc la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{3}{2k} - \ln\left(1+\frac{3}{2k}\right)\right)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN. Ainsi, $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2k} - \ln\left(1+\frac{3}{2k}\right)\right) \underset{+\infty}{=} S + o(1)$ avec $S \in \mathbb{R}$ et on a bien $w_n \underset{+\infty}{=} S - \frac{3\gamma}{2} + o(1)$ ce qui prouve la convergence de la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ (vers $S - \frac{3\gamma}{2}$).

Méthode 2 : posons, pour $n \geqslant 1$, $w_n = \ln(u_n) + \frac{3}{2}\ln(n)$. Par dualité suite-série, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1}(w_{n+1} - w_n)$ converge. Or $w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ donc $w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Ainsi, à l'ordre 2, $w_{n+1} - w_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{5}{2n} + \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, avec RIEMANN, $\sum_{n\geqslant 1}(w_{n+1} - w_n)$ converge absolument. Par dualité suite-série, $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge et vérifie bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = -\frac{3}{2}\ln(n) + w_n$.

b. Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} w_n$, alors $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{+\infty}{=} \exp\left(-\frac{3}{2}\ln(n) + \ell + o(1)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{e^{\ell}e^{o(1)}}{n^{3/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{\ell}}{n^{3/2}}$ par continuité de l'exponentielle. Ainsi, à nouveau par RIEMANN, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge car $\frac{3}{2} > 1$.

c. Soit $n \geqslant 1$, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on a $(2k+5)u_{k+1} = (2k+2)u_k$ donc $2(k+1)u_{k+1} + 3u_{k+1} = 2ku_k + 2u_k$. On somme pour avoir $2\sum_{k=0}^{n}(k+1)u_{k+1} + 3\sum_{k=0}^{n}u_{k+1} = 2\sum_{k=0}^{n}ku_k + 2\sum_{k=0}^{n}u_k$. On pose $m = k+1$ dans les deux premières sommes et on a bien $2\sum_{m=1}^{n+1}mu_m + 3\sum_{m=1}^{n+1}u_m = 2\sum_{k=0}^{n}ku_k + 2\sum_{k=0}^{n}u_k$.

On peut aussi le montrer par récurrence. En effet, on a $2\sum_{k=1}^{0+1}ku_k + 3\sum_{k=1}^{0+1}u_k = 2u_1 + 3u_1 = 5u_1$ mais aussi $2\sum_{k=0}^{0}ku_k + 2\sum_{k=0}^{0}u_k = 2u_0$ et on a bien $u_1 = \frac{2.0+2}{2.0+5}u_0$ donc la relation est vraie pour $n = 0$. Soit $n \geqslant 0$ tel que $2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1}u_k = 2\sum_{k=0}^{n}ku_k + 2\sum_{k=0}^{n}u_k$, alors, par hypothèse de récurrence, il vient $2\sum_{k=1}^{n+2}ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+2}u_k = 2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1}u_k + \big(2(n+2)+3\big)u_{n+2} = 2\sum_{k=0}^{n}ku_k + 2\sum_{k=0}^{n}u_k + (2n+7)u_{n+2}$ donc $2\sum_{k=1}^{n+2}ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+2}u_k = 2\sum_{k=0}^{n}ku_k + 2\sum_{k=0}^{n}u_k + (2n+4)u_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n+1}ku_k + 2\sum_{k=0}^{n+1}u_k$. Par principe de récurrence, la relation $2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1}u_k = 2\sum_{k=0}^{n}ku_k + 2\sum_{k=0}^{n}u_k$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

d. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n}u_k$ la somme partielle de $\sum_{n\geqslant 0}u_n$. On sait que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n$. La relation de la question **c.** s'écrit, après télescopage, $2(n+1)u_{n+1} + 3S_{n+1} - 3u_0 = 2S_n$ (R). Or $nu_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{\ell}}{\sqrt{n}}$ d'après **b.**, donc $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$. En passant à la limite dans (R), $3S - 3 = 2S$. Ainsi, $S = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n = 3$.

3.86 Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $z \neq 2$, on peut poser $u_n = e^{\frac{nz}{z-2}} = \left(e^{\frac{z}{z-2}}\right)^n$. La série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ est donc une série géométrique de raison $a = e^{\frac{z}{z-2}}$ et on sait d'après le cours que cette série converge si et seulement si $|a| = e^{\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z-2}\right)} < 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z-2}\right) < 0$.

Or, si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il vient $\dfrac{z}{z-2} = \dfrac{x+iy}{(x-2)+iy} = \dfrac{(x+iy)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2} = \dfrac{x^2-2x+y^2-2iy}{(x-2)^2+y^2}$ donc le signe de Re $\left(\dfrac{z}{z-2}\right)$ est celui de $x^2 - 2x + y^2 = (x-1)^2 + y^2 - 1$.

Par conséquent, $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{\frac{nz}{z-2}}$ converge si et seulement si $(x-1)^2 + y^2 < 1$, c'est-à-dire si et seulement si le point M d'affixe $z = x + iy$ appartient au disque ouvert de centre $A = (1, 0)$ et de rayon $R = 1$.

3.87 Posons $I = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{n^\alpha} \text{ converge}\right\}$ incluse dans $\mathbb{R}$. Si $\alpha \geqslant 0$, alors $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \dfrac{u_n}{n^\alpha} \leqslant u_n$ donc, comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ converge aussi. Par conséquent, $\mathbb{R}_+ \subset I$.

Soit $\alpha \in I$, alors pour tout $\beta > \alpha$, $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \dfrac{u_n}{n^\beta} \leqslant \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ donc $\beta \in I$ par comparaison. Ainsi, I est un intervalle et nous avons trois possibilités selon que I est minoré, et que sa borne inférieure appartienne ou non à I s'il est minoré : $I = \mathbb{R}$ ou $I =]a; +\infty[$ ou $I = [a; +\infty[$ avec $a = \mathrm{Inf}(I) \leqslant 0$.

- Si $u_n = \dfrac{1}{n!} > 0$, on a bien $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge et, comme $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{u_n}{n^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ converge par comparaison donc, dans ce cas, on a $I = \mathbb{R}$.
- Soit $u_n = \dfrac{1}{n^b}$ avec $b > 1$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{u_n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha+b}}$ donc, par Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ converge converge si et seulement si $\alpha + b > 1 \iff \alpha > 1 - b$. Dans ce cas, on a donc $I =]a; +\infty[$ avec $a = 1 - b < 0$.
- Pas sûr qu'on puisse trouver un exemple de série positive convergente telle que $I = [a; +\infty[$.

3.88 **a.** Par une récurrence simple, on montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n\right) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n)(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} + u_n)}{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} + u_n}$ en multipliant par la quantité conjuguée donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a_n^2}{2(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} + u_n)} \leqslant \dfrac{a_n}{2}$ car $u_n \geqslant 0$.

Plus simplement, $u_n^2 + a_n^2 \leqslant (u_n + a_n)^2$ donc $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n + (u_n + a_n)}{2}$ et on a bien $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

De plus, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n\right) \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2} - u_n\right) = 0$ car $a_n^2 \geqslant 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge, comme $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$, par comparaison, la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge ce qui prouve, par dualité suite-série, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, croissante et elle tend vers 1. Ainsi, comme $(2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 \geqslant u_{n+1}^2 - u_n^2 \geqslant 0$, on peut poser $a_n = \sqrt{(2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2} \geqslant 0$. On trouve alors $(2u_{n+1} - u_n)^2 = u_n^2 + a_n^2$ ce qui, en passant à la racine (puisque $2u_{n+1} - u_n \geqslant 0$), montre que $2u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + a_n^2}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\right)$. Dans le cas particulier de cette question, $a_n = \sqrt{\left(\dfrac{2(n+1)}{n+2} - \dfrac{n}{n+1}\right)^2 - \dfrac{n^2}{(n+1)^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{2(n+1)}{n+2} - \dfrac{2n}{n+1}\right)\left(\dfrac{2(n+1)}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1}\right)}$ par identité remarquable donc $a_n = \dfrac{2}{n+2}$ après simplifications. Ainsi, $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge par Riemann. La réciproque de la question **b.** est donc fausse.

3.89 **a.** La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN donc $u_n = \frac{1}{n}\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ existe pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n^2 \leqslant (n+1)^2$ et que f est positive, on a $\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx \geqslant \int_{(n+1)^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ donc, puisque $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n+1}$, on a $u_n \geqslant u_{n+1}$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, positive, et elle tend vers 0 car, en tant que reste d'une intégrale convergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 0$. Et on a même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par conséquent, avec le critère spécial de séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n}\int_{n^2}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \int_0^n e^{-t^2n^2}dt$ et $x = tn = \varphi(t)$, alors la fonction φ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $[0;n]$ dans $[0;n^2]$ donc, par changement de variable, on a $v_n = \frac{1}{n}\int_0^{n^2} e^{-x^2}dx$ donc, par CHASLES, $v_n = \frac{I}{n} - u_n$ en posant $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (intégrale de GAUSS). Ainsi, on peut écrire $(-1)^n v_n = \frac{(-1)^n I}{n} - (-1)^n u_n$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n I}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées et $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge d'après la question précédente. Par somme, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \int_0^n e^{-t^2n^2}dt$ converge.

3.90 **a.** Par construction, on a $u_n > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est bien défini. De plus, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - \ln(n+1) - 1$ après simplifications. Alors, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{+\infty}{=} \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge absolument donc converge.

b. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\big)$ converge, par dualité suite-série, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une réel k. Par continuité de l'exponentielle, comme $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $c = e^k > 0$. Par conséquent, $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} \underset{+\infty}{\sim} c$, ce qui équivaut à $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ avec $C = \frac{1}{c} > 0$.

c. On sait d'après la formule de STIRLING que $C = \sqrt{2\pi}$. Pour le montrer, on définit, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale de WALLIS $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$, qui est bien définie car $f_n : I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(t) = \sin^n(t)$ est continue sur le segment I. De plus, $\forall t \in I,\ 0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t)$ ce qui, par croissance de l'intégrale, donne $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc positive et décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $u : t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $v : t \mapsto (-\cos(t))$ dans $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)dt$, comme u et v sont de classe C^1 sur I, on a $W_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos^2(t)\sin^n(t)dt$ donc $W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^n(t)dt = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ ce qui montre que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$. Ainsi, $(n+2)W_{n+1}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}$ donc la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et, comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Pour $n \geqslant 1$, comme $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, en multipliant par W_n, on a $W_nW_{n+1} \leqslant W_n^2 \leqslant W_{n-1}W_n$ donc $\frac{\pi}{2(n+1)} \leqslant W_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2n}$ car $W_n \geqslant 0$. Par encadrement, on a donc $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n-1)}{2n}W_{2n-2} = \cdots = \dfrac{(2n-1)\times\cdots\times 1}{(2n)\times\cdots\times 2}W_0 = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$. D'après la question **b.**, on a $W_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{C\sqrt{2n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\pi}{2^{2n+1}\left(C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{C\sqrt{2n}}$ après simplifications. Mais d'après ce qui précède, on a $W_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Par conséquent, on a $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{C}$ ce qui donne $C = \sqrt{2\pi}$ et on retrouve la formule de STIRLING bien connue : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

3.91 **a.** La série alternée $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Par conséquent, le reste d'ordre n de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, noté ici $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ existe bien pour tout $n \geqslant 1$, ce qui prouve que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie. En notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ la somme de la série et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ les sommes partielles, on a $u_n = S - S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (comme pour toute suite de restes d'une série numérique convergente).

b. Le critère spécial des séries alternées nous apprend aussi que u_n est du signe de son premier terme donc de $(-1)^n$. Ainsi, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}u_n$ est un terme positif. Enfin, on déduit encore du critère spécial des séries alternées que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ donc $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge par comparaison à une série de RIEMANN car $\dfrac{3}{2} > 1$.

c. Comme $S_n = S - u_n$, on a $w_n = \dfrac{(-1)^n S}{n} - \dfrac{(-1)^n}{n}u_n = \dfrac{(-1)^n S}{n} - v_n$. Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n S}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{S}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et que $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge d'après la question précédente, par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ converge.

d. On a $x_n = (-1)^n w_n = \dfrac{S}{n} - (-1)^n v_n$. Comme $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n v_n$ converge puisque $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge absolument d'après **b.** et que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{S}{n}$ diverge par RIEMANN, par somme, $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ diverge.

3.92 La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie car $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $1 + a_k > 0$ par hypothèse.

a. Initialisation : D'abord, $u_1 = \dfrac{a_1}{1+a_1} = 1 - \dfrac{1}{1+a_1}$. De plus, comme $(1+a_1)(1+a_2) = a_1 + a_1a_2 + a_2 + 1$, on a la relation $u_1 + u_2 = \dfrac{a_1}{1+a_1} + \dfrac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = \dfrac{a_1 + a_1a_2 + a_2 + 1 - 1}{(1+a_1)(1+a_2)} = 1 - \dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$, supposons que $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+a_k}$. Alors $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + u_{n+1}$ donc $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+a_k} + a_{n+1}\prod_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{1+a_k}$ par hypothèse de récurrence et définition de u_{n+1}. Ainsi, en regroupant les deux derniers termes, $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \dfrac{1 + a_{n+1} - a_{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k)} = 1 - \prod_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{1+a_k}$.

Par principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+a_k}$.

b. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs, la suite $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+a_k}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante donc convergente par le théorème de la limite monotone car elle est minorée par 0. Ainsi, d'après **a.**, la suite de ses sommes partielles étant convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

c. Posons, $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} > 0$. D'après **b.**, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - v_n$. Or on a $\ln(v_n) = -\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Comme $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ diverge par RIEMANN, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum\limits_{k\geqslant 1}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ diverge, ses sommes partielles tendent donc vers $+\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(v_n) = -\infty$. Ainsi, puisque $v_n = e^{\ln(v_n)}$, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Par conséquent, si on suppose que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

3.93 **a.** Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : x \mapsto (\tan(x))^k$ est continue sur le segment $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc u_k est bien défini. De plus, $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant f_{k+1}(x) \leqslant f_k(x)$ ce qui, par croissance de l'intégrale, donne $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc positive et décroissante.

b. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$ par le théorème de la limite monotone. La fonction $\tan$ est convexe sur I car $\forall x \in I,\ \tan''(x) = 2\tan(x)(1+\tan^2(x)) \geqslant 0$ donc la courbe représentative de $\tan$ est en dessous de ses cordes sur I, notamment $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \tan(x) \leqslant \dfrac{4x}{\pi}$.
Ainsi $0 \leqslant u_k \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/4}\left(\frac{4x}{\pi}\right)^k dx = \frac{4^k}{\pi^k}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4(k+1)}$ toujours par croissance de l'intégrale. Comme $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k+1}$, par encadrement, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

On aurait aussi pu utiliser le chapitre sur les suites de fonctions :

(H_1) La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < \frac{\pi}{4}$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(H_2) Les fonctions f_k et la fonction f sont continues sur I.

(H_3) $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_k(x)| \leqslant \varphi(x) = 1$ et φ est intégrable sur I.

Par le théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/4} f_k = \int_0^{\pi/4} f = 0$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k + u_{k+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^k(x)(1+\tan^2(x))dx = \int_0^{\pi/4}\tan^k(x)\tan'(x)dx$ par linéarité de l'intégrale donc $u_k + u_{k+2} = \left[\dfrac{\tan^k(x)}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{k+1}$.

d. $u_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$ et $u_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan(x)dx = [\ln(\cos(x))]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}$. Grâce à **c.**, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k(u_{2k}+u_{2k+2}) = u_0 + (-1)^{n-1}u_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ donc $u_{2n} = (-1)^n\left(\dfrac{\pi}{4} - \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}\right)$. De même, on a la relation $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}(u_{2k-1}+u_{2k+1}) = u_1 + (-1)^n u_{2n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k}$ d'où l'on déduit que $u_{2n+1} = (-1)^n\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k} - \dfrac{\ln(2)}{2}\right)$.

e. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k} = \dfrac{\ln(2)}{2}$. D'où la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ et les valeurs $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(2)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

3.94 **a.** Avec ces hypothèses, pour $n\geqslant N$, $u_nv_n-v_{n+1}u_{n+1}\geqslant cu_n>0$ donc la suite $(u_nv_n)_{n\geqslant N}$ est décroissante donc $\forall n\geqslant N$, $u_nv_n\leqslant u_Nv_N$ donc $u_n\leqslant\frac{u_Nv_N}{v_n}$ d'où $u_n\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{v_n}\right)$. Comme $\sum_{n\geqslant N}\frac{1}{v_n}$ converge par hypothèse, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge aussi.

b. Ici, pour $n\geqslant N$, $u_nv_n-v_{n+1}u_{n+1}\leqslant 0$ donc $(u_nv_n)_{n\geqslant N}$ est croissante donc $\forall n\geqslant N$, $u_nv_n\geqslant u_Nv_N$ ou $u_n\geqslant\frac{u_Nv_N}{v_n}$. Comme $\sum_{n\geqslant N}\frac{1}{v_n}$ diverge par hypothèse, par minoration, $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ diverge aussi.

c. Prenons ici $v_n=n^{1+\frac{c}{2}}$ pour $n\geqslant 0$, alors $w_n=v_n-\frac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n}\geqslant n^{1+\frac{c}{2}}-(n+1)^{1+\frac{c}{2}}\left(1-\frac{1+c}{n}\right)=z_n$ et on écrit $z_n=n^{1+\frac{c}{2}}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{c}{2}}\left(1-\frac{1+c}{n}\right)\right)$. Or on sait que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{c}{2}}\underset{+\infty}{=}1+\left(1+\frac{c}{2}\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $z_n\underset{+\infty}{=}n^{1+\frac{c}{2}}\left(1-\left(1+\left(1+\frac{c}{2}\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{1+c}{n}\right)\right)\underset{+\infty}{=}n^{1+\frac{c}{2}}\left(\frac{c}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ donc $z_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{c\,n^{\frac{c}{2}}}{2}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}z_n=+\infty$ donc $\exists N\geqslant 0$, $\forall n\geqslant N$, $z_n\geqslant 1$ donc $\forall n\geqslant N$, $w_n\geqslant 1$. D'après la question **a.**, comme la série de RIEMANN $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{v_n}$ converge car $1+\frac{c}{2}>1$, la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge.

d. Prenons ici $v_n=n-1>0$ pour $n\geqslant 2$ alors, par hypothèse, on a $\forall n\geqslant N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1-\frac{1}{n}$ donc $w_n=v_n-\frac{v_{n+1}u_{n+1}}{u_n}=(n-1)-n\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant n\left[\frac{n-1}{n}-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]=n\left[1-\frac{1}{n}-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right]\leqslant 0$ dont on déduit, d'après la question **b.**, que la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ diverge.

e. Selon l'énoncé, traitons deux cas :

<u>$A>1$</u> Par hypothèse, pour $c>0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}-\left(1-\frac{1+c}{n}\right)=1-\frac{A}{n}+\frac{f(s)}{n^s}-\left(1-\frac{1+c}{n}\right)\underset{+\infty}{=}\frac{c+1-A}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il suffit donc de prendre $c=\frac{A-1}{2}>0$ pour que $\frac{u_{n+1}}{u_n}-\left(1-\frac{1+c}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{A-1}{2n}<0$ donc qu'à partir d'un certain rang, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1-\frac{1+c}{n}$. D'après la question **c.**, $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge.

<u>$A<1$</u> Prenons $v_0=v_1=1$ et $\forall n\geqslant 2$, $v_n=n-1$ de sorte que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{v_n}$ diverge et calculons $w_n=n-1-\frac{nu_{n+1}}{u_n}=n-1-n+A-\frac{f(s)}{n^{s-1}}\underset{+\infty}{=}A-1+o(1)$ donc $\lim_{n\to+\infty}w_n=A-1<0$ ce qui montre qu'il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n\geqslant N$, $w_n\leqslant 0$. D'après **b.**, $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ diverge.

<u>$A=1$</u> Posons $a_n=\ln(nu_n)$ pour $n\geqslant 1$, alors $a_{n+1}-a_n=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ donc, par hypothèse, on a $a_{n+1}-a_n=\ln\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n\geqslant 1}(a_{n+1}-a_n)$ converge donc, par dualité suite-série, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Notons ℓ sa limite, on a donc $\lim_{n\to+\infty}\ln(nu_n)=\ell$ et, par continuité de exp, $\lim_{n\to+\infty}nu_n=\lambda=e^\ell$ d'où $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{\lambda}{n}$ qui montre, comme la série harmonique diverge, que $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ diverge.

On conclut bien avec ces trois cas que $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge si et seulement si $A>1$.

f. Posons $u_n=\left(\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)^\alpha>0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha>0$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^\alpha$ qui se simplifie en $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^\alpha\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\underset{+\infty}{=}\left(1+\frac{\alpha}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}1-\frac{\alpha}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc, d'après la question **e.**, $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)^{\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$ (avec $s = 2$).

On pouvait aussi utiliser l'équivalent de STIRLING car $\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ par un calcul classique donc $u_n = \left(\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)^{\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}(e^n)^2}{e^{2n}2^{2n}\sqrt{2\pi n}^2(n^n)^2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{(\sqrt{\pi n})^{\alpha}} = \frac{1}{\pi^{\frac{\alpha}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}}}$. D'après le critère des séries de RIEMANN, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

3.95 **a.** On suppose qu'il existe deux réels $A \neq 0$ et $r \neq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = Ar^n$. Pour que $\frac{1}{\sqrt{g_n}}$ soit défini pour tout entier n, il est nécessaire et suffisant que $A > 0$ et $r > 0$. Alors $g_{n+1} - g_n = Ar^n(r-1)$ et $\frac{1}{\sqrt{g_n}} = \frac{1}{\sqrt{A}}r^{-\frac{n}{2}}$. On traite deux cas :

- Si $r = 1$, on a $g_{n+1} - g_n = 0$ alors que $\frac{1}{\sqrt{g_n}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \neq 0$.
- Si $r \neq 1$, $Ar^n(r-1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{A}}r^{-\frac{n}{2}}$ équivaut à $A^{3/2}r^{3n/2}(r-1) \underset{+\infty}{\sim} 1$ ou encore $(Ar^n)^{3/2} = \frac{1}{r-1} > 0$.

Or $(Ar^n)_{n\geqslant 0}$ ne peut pas converger vers un réel strictement positif sans que r soit égal à 1.

Il n'existe donc aucune suite géométrique $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $g_{n+1} - g_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{g_n}}$.

b. Soit $(A,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $v_n = An^{\alpha} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\frac{1}{\sqrt{v_n}} = \frac{1}{\sqrt{An^{\alpha}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{A}}n^{\frac{-\alpha}{2}}$ et on a aussi $v_{n+1} - v_n = A(n+1)^{\alpha} - An^{\alpha} = An^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1\right) \underset{+\infty}{=} An^{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{n} - 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} A\alpha n^{\alpha-1} + o\left(n^{\alpha-1}\right)$ donc $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} A\alpha n^{\alpha-1}$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{v_n}} \iff A\alpha n^{\alpha-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{A}}n^{\frac{-\alpha}{2}} \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{3\alpha}{2}-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{A^{3/2}\alpha}$ ce qui impose $A^{3/2}\alpha = 1$ et $\frac{3\alpha}{2} - 1 = 0$. Il existe donc un unique couple $(A,\alpha) = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}, \frac{2}{3}\right) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel qu'en posant $v_n = An^{\alpha}$, on ait $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{v_n}}$.

c. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car $u_0 > 0$ et, si $u_n > 0$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} > 0$ donc, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ est bien défini.

La relation $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ (1) montre que $u_{n+1} > u_n$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. De plus, si elle était majorée, elle convergerait vers un réel $\ell > u_0 = 1$ d'après le théorème de la limite monotone et, en passant à la limite dans (1), on a $\ell = \ell + \frac{1}{\sqrt{\ell}}$ qui est absurde. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante non majorée donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ toujours d'après le théorème de la limite monotone.

Comme $\beta > 0$ et que $t \mapsto t^{\beta}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité $u_{n+1} > u_n$ implique $u_{n+1}^{\beta} > u_n^{\beta}$ donc $p_n = \left(\frac{1}{u_n}\right)^{\beta} - \left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)^{\beta}$ est bien défini et $p_n > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^{\beta}} = 0$, la suite $\left(\frac{1}{u_n^{\beta}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, par dualité suite-série, la série $\sum_{n\geqslant 0} p_n$ converge et on sait qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{u_0^{\beta}} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n^{\beta}} = 1$.

d. <u>Initialisation</u> : comme $u_1 = u_0 + \frac{1}{\sqrt{u_0}} = 1 + 1 = 2$, on a bien $1 \leqslant u_1 = 2 \leqslant 2\times 1 = 2$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$, alors $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}} \leqslant 2n + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$.

Or on a $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \sqrt{n+1} \iff n + \sqrt{2} + \frac{1}{2n} \geqslant n+1 \iff \sqrt{2} + \frac{1}{2n} \geqslant 1$ est vrai en élevant au carré. De plus, $2n + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \leqslant 2(n+1) \iff \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \leqslant 2$ est clairement vrai pour $n \geqslant 1$. On a donc

$\sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant u_{n+1} = u_n+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}} \leqslant 2n+\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \leqslant 2n+2$ et, par transitivité, $\sqrt{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2n+2$.

Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant 2n$.

e. Pour avoir un équivalent de u_n, on emploie une méthode classique mais maintenant hors programme en cherchant un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^m - u_n^m) = \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $u_{n+1}^m - u_n^m = \left(u_n + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}\right)^m - u_n^m = u_n^m\left[\left(1+\dfrac{1}{u_n^{3/2}}\right)^m - 1\right] \underset{+\infty}{\sim} u_n^m\left(1+\dfrac{m}{u_n^{3/2}} - 1 + o\left(\dfrac{1}{u_n^{3/2}}\right)\right)$ ce qui montre que $u_{n+1}^m - u_n^m \underset{+\infty}{=} \dfrac{m}{u_n^{3/2-m}} + o\left(\dfrac{1}{u_n^{3/2-m}}\right)$ donc que $u_{n+1}^m - u_n^m \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{m}{u_n^{3/2-m}}$. Il est donc nécessaire et suffisant de prendre $m = \dfrac{3}{2}$ pour avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^m - u_n^m) = \lambda = \dfrac{3}{2} \neq 0$. D'après le théorème de Cesaro (hors programme), et puisque $\dfrac{u_n^m - u_0^m}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^m - u_k^m)$ par télescopage, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^m - u_0^m}{n} = \dfrac{3}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^m}{n} = \dfrac{3}{2}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_0^m}{n} = 0$. On a donc $u_n^m \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3n}{2}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}} = An^\alpha$!!!

f. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, $p_n = \left(\dfrac{1}{u_n}\right)^\beta - \left(\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)^\beta = \left(\dfrac{1}{u_n}\right)^\beta\left(1 - \dfrac{1}{(1+u_n^{-3/2})^\beta}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\dfrac{1}{(1+u_n^{-3/2})^\beta} = (1+u_n^{-3/2})^{-\beta} \underset{+\infty}{=} 1 - \beta u_n^{-3/2} + o(u_n^{-3/2})$ ce qui donne $p_n \underset{+\infty}{=} \beta u_n^{-3/2-\beta} + o(u_n^{-3/2-\beta})$. Ainsi, on a $p_n \underset{+\infty}{\sim} \beta u_n^{-3/2-\beta}$ donc $p_n u_n \underset{+\infty}{\sim} \beta u_n^{-1/2-\beta} \underset{+\infty}{\sim} \beta\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}-\frac{2\beta}{3}} n^{-\frac{1}{3}-\frac{2\beta}{3}}$. Par conséquent, par comparaison aux séries de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n u_n$ converge si et seulement si $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2\beta}{3} > 1 \Longleftrightarrow \beta > 1$.

3.96 **a.** On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ pour $n \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1)$ donc $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et, par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}(u_n - u_{n-1})$ converge donc, par dualité suite-série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Si on note γ sa limite, on a donc $u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$ donc $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b. D'après **a.**, $H_{2n} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1) \underset{+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \ln(2)$.

c. Pour $n \geqslant 1$, $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{j=n+1}^{2n}\dfrac{1}{j} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$ en posant $j = n+k$ qu'on écrit aussi comme une somme de Riemann $H_{2n} - H_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{k}{n}} = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ en posant $a = 0$, $b = 1$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Comme f est continue sur le segment $[0;1]$, par un théorème du cours relatif à la convergence des sommes de Riemann, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(H_{2n} - H_n) = \int_0^1 f(x)dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

d. Posons, pour $n \geqslant 1$, $S_{1,n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, $S_{2,n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(2k-1)}$ et $S_{3,n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k} i^2}$ les trois sommes partielles associées aux séries proposées.

$\underline{S_1}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, ce qui garantit l'existence de sa somme S_1. Pour $n \geqslant 1$, on a $S_{1,2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k}\right) - 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k} = \sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ donc $S_{1,2n} = H_{2n} - H_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{1,2n} = \ln(2)$. Comme on a vu que $(S_{1,n})_{n\geqslant 1}$ converge vers S_1, sa suite extraite $(S_{1,2n})_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers S_1 donc $S_1 = \ln(2)$.

$\underline{S_2}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(2n-1)}$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN car on a $\dfrac{1}{n(2n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ d'où l'existence de sa somme S_2. $S_{2,n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{2}{2k-1} - \dfrac{1}{k}\right)$ en décomposant en éléments simples donc $S_{2,n} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 2\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}\Big) - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et $S_{2,n} = 2\sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ donc $S_{2,n} = 2H_{2n} - 2H_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2,n} = 2\ln(2)$. Ainsi, $S_2 = 2\ln(2)$.

$\underline{S_3}$ On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} > 0$. Comme $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^3}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN. Et on peut décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{6}{X(X+1)(2X+1)}$ en éléments simples en trouvant trois réels a, b, c tels que l'on ait la relation $\dfrac{6}{X(X+1)(2X+1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{2X+1} = \dfrac{a(X+1)(2X+1) + bX(2X+1) + cX(X+1)}{X(X+1)(2X+1)}$ et qui donne, par identification, $(2a + 2b + c)X^2 + (3a + b + c)X + a = 6$. On a donc le système linéaire $a - 6 = 3a + b + c = 2a + 2b + c = 0$ qui se résout en $a = 6$, $b = 6$ et $c = -24$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $S_{3,n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{6}{k} + \dfrac{6}{k+1} - \dfrac{24}{2k+1}\right) = 6H_n + 6(H_{n+1} - 1) + 24 - 24\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}\Big)$, d'où $S_{3,n} = 12H_n - 6 + \dfrac{6}{n+1} + 24 - 24H_{2n} + 12H_n - \dfrac{24}{2n+1} = 18 - 24(H_{2n} - H_n) + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}$. D'après le résultat des questions **b.** et **c.**, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{24}{2n+1} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3,n} = 18 - 24\ln(2)$. Ainsi, $S_3 = 18 - 24\ln(2) \sim 1,36$.

3.97 **a.** La série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Par conséquent, le reste d'ordre n de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, noté ici $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ existe bien pour tout $n \geqslant 1$, ce qui prouve que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie. En notant $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ la somme de la série et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ les sommes partielles, on a $u_n = S - S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (comme pour toute suite de restes d'une série numérique convergente).

b. Le critère spécial des séries alternées nous apprend aussi que u_n est du signe de son premier terme donc de $(-1)^n$. Ainsi, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} u_n$ est un terme positif. Enfin, on déduit encore du critère spécial des séries alternées que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ donc $|v_n| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge par comparaison à une série de RIEMANN car $\dfrac{3}{2} > 1$.

c. Comme $S_n = S - u_n$, on a $w_n = \dfrac{(-1)^n S}{n} - \dfrac{(-1)^n}{n} u_n = \dfrac{(-1)^n S}{n} - v_n$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n S}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{S}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge d'après la question précédente, par somme, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ converge.

d. On a $x_n = (-1)^n w_n = \dfrac{S}{n} - (-1)^n v_n$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n v_n$ converge puisque $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge absolument d'après **b.** et que la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{S}{n}$ diverge par RIEMANN, par somme, $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ diverge.

3.8 Officiel de la Taupe

3.98 Posons, pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et $T_n=\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. Clairement $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, alors pour $n\in\mathbb{N}^*$, comme il y a 2^{k-1} entiers dans l'intervalle $[\![2^{k-1}+1;2^k]\!]$, on a $T_n=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots+2^n a_{2^n}=a_1+2\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_{2^k}$. Mais on sait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc on peut majorer $T_n\leqslant a_1+2\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j=2S_{2^n}-2a_0-a_1\leqslant 2S_{2^n}\leqslant 2S$ car $S_p\leqslant S$. Comme $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge ce qui assure la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} T_n$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=T=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2^n}=a_0+a_1+\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j$. Mais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : $S_{2^n}\leqslant a_0+a_1+\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_{2^{k-1}}=a_0+a_1+\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k-1}a_{2^{k-1}}\leqslant a_0+a_1+T_{n-1}\leqslant T+a_0+a_1$ car $T_p\leqslant T$. Comme la suite $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge vers S. Pour un entier $n\in\mathbb{N}$, il existe un entier p tel que $n\leqslant 2^p$ donc $S_n\leqslant S_{2^p}\leqslant S$ donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi majorée par S et elle converge, ceci ne pouvant se faire que vers S car $(S_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci assure la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} S_n$.
- Comme $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}(\ln x)^2}$ est décroissante sur $]1;+\infty[$, la nature de la première série proposée est la même que celle de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}(\ln(2^n))^2}=\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{(\ln(2^n))^2}$ d'après le critère de condensation mais cette dernière série diverge grossièrement par croissance comparée. On pouvait plus classiquement utiliser un critère de RIEMANN car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/4}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}=+\infty$ par croissance comparée et comme $\dfrac{3}{4}<1$, il y a divergence de la série.
- Comme $x\mapsto\dfrac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}$ est décroissante sur $]e;+\infty[$, la nature de la seconde série proposée est celle de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^n}{2^n(\ln(2^n))(\ln(\ln(2^n)))}=\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n\ln(2)\ln(n\ln 2)}$ d'après le critère de condensation. Or on a $\dfrac{1}{n\ln(2)\ln(n\ln 2)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n\ln(2)\ln(n)}$ car $\ln(n\ln(2))=\ln(n)+\ln(\ln(2)$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n\ln(n)}$. Mais puisque $x\mapsto\dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $]1;+\infty[$, cette dernière série est de même nature que $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^n}{2^n\ln(2^n)}$ c'est-à-dire que $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n}$. Or la série harmonique diverge. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$ diverge.

3.99 **a.** Soit $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=x^n+\sqrt{n}x-1$. Pour tout entier $n\geqslant 0$, la fonction f_n est croissante sur $[0;1]$ car $f_n'(x)=nx^{n-1}+\sqrt{n}>0$ et on a $f_n(0)=-1<0$ et $f_n(1)=\sqrt{n}\geqslant 0$. Ainsi d'après le théorème de la bijection (TVI + injectivité car stricte monotonie) : $\exists! x_n\in[0;1],\ f_n(x_n)=0$.

b. Comme $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)>0=f_n(x_n)$ et que f_n est strictement croissante, on a $0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ce qui garantit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$.

c. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\sqrt{n}x_n) = 0$ ainsi $\sqrt{n}x_n - 1 \underset{+\infty}{=} o(1)$ donc $x_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$ ce qui confirme que $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Par le critère de RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ diverge.

3.100 On peut donner une expression de u_n avec des $\ln$ car $u_n = \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(n+\sqrt{n^2+1})$ donc $u_n < 0$. On voudrait donc un équivalent de u_n, calculons donc $\mathrm{sh}\,(u_n)$.

Or avec la trigonométrie hyperbolique : $\mathrm{sh}\,(u_n) = \mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}\,(n))\mathrm{ch}\,(\mathrm{Argsh}\,(n)) - \mathrm{sh}\,(\mathrm{Argsh}\,(n))\mathrm{ch}\,(\mathrm{Argch}\,(n))$.
Par conséquent : $\mathrm{sh}\,(u_n) = \sqrt{n^2-1}\sqrt{n^2+1} - n^2 = \sqrt{n^4-1} - \sqrt{n^4} = -\dfrac{1}{\sqrt{n^4-1}+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$ car $\mathrm{ch}^{\,2}(x) - \mathrm{sh}^{\,2}(x) = 1$ (on aurait pu le trouver par développement limité en écrivant $\sqrt{n^4-1} = n^2\sqrt{1-\dfrac{1}{n^4}}$).
D'après RIEMANN, comme $2 > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

On aurait même pu écrire $u_n = \ln\Big(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\Big) - \ln\Big(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\Big)$ et là encore effectuer des DL.

3.101 **a.** Par une étude de fonctions niveau terminale (ou par convexité de la fonction $x \mapsto e^{-x}$), on montre que $\forall x \geqslant 0,\ x \geqslant 1 - e^{-x}$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
On en déduit alors par récurrence que $\forall n \geqslant 0,\ a_n > 0$ et $a_{n+1} < a_n$.
Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : elle tend vers $\ell \geqslant 0$.
En passant à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell = 1 - e^{-\ell} \Longrightarrow \ell = 0$ d'après ce qui précède.
b. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge donc par le critère spécial des séries alternées.
Un théorème fondamental : la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Ceci implique ici que $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_{n+1}-a_n)$ converge mais $a_{n+1} - a_n \underset{+\infty}{=} 1 - e^{-a_n} - a_n = -\dfrac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$ donc $a_{n+1} - a_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{a_n^2}{2}$ et les deux séries (à termes négatifs) ont donc même nature : $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^2$ converge.
c. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$ diverge comme la suite $\big(\ln(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ d'après le théorème rappelé, or $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\Big(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}a_n$ par développements limités.
Encore une fois, les termes étant négatifs : $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.

3.102 Si on note $M_{n,k}$ le nombre de mots à k lettres contenant au plus une fois la même lettre, on a clairement (partition) : $M_n = \sum\limits_{k=0}^{n} M_{n,k}$ avec par convention $M_{n,0} = 1$ (mot vide). Pour calculer $M_{n,k}$, on commence par choisir les lettres qui vont composer ce mot à k lettres ce qui fait $\dbinom{n}{k}$ choix puis on les ordonne pour faire un mot avec $k!$ choix ce qui fait : $M_{n,k} = k!\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Par conséquent : $M_n = n!\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n-k)!} = n!\sum\limits_{j=0}^{n}\dfrac{1}{j!}$ en posant $j = n-k$.

On sait que $e = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}$ donc en notant $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k!} > 0$ et $M_n = n!\big(e - R_n\big)$. Il est donc clair que $M_n > n!e$. Il reste donc à prouver que $n!R_n < 1$ et on aura alors $M_n \leqslant n!e < M_n + 1$ ce qui garantira que $M_n = \lfloor n!e \rfloor$ par définition de la partie entière et car $M_n \in \mathbb{N}$ par construction.

Or $n!R_n = \dfrac{1}{n+1} + \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty}\dfrac{n!}{k!} < \dfrac{1}{n+1} + \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty}\dfrac{1}{k(k-1)} < \dfrac{1}{n+1} + \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty}\Big(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\Big) = \dfrac{2}{n+2} < 1$. OK !

3.103 **a.** Par récurrence ou par un simple souvenir : $\sigma_n = P(n)$ avec $P = \dfrac{X(X+1)(2X+1)}{6}$.

b. On a clairement $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^3}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ est une série numérique absolument convergente donc convergente d'après le critère de RIEMANN car $3 > 1$.

c. Soit on sait que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) + \gamma + o(1)$ et on soustrait, soit on utilise les sommes de RIEMANN car $H_{2n} - H_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\Big(\dfrac{k}{n}\Big)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ qui est continue sur $[0;1]$. Par théorème sur les sommes de RIEMANN, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(H_{2n} - H_n\big) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln(2)$.

c. On décompose $\dfrac{1}{P} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{2X+1}$. Par les méthodes habituelles, on trouve : $a = 6$, $b = 6$ et $c = -24$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 6\sum\limits_{k=1}^{n}\Big(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1} - 4\dfrac{1}{2k+1}\Big) = 6\big(2H_n + \dfrac{1}{n+1} - 1 - 4\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k+1}\big)$. D'où $S_n = 6\big(2H_n + \dfrac{1}{n+1} - 1 - 4\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k+1} - 4\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k} + 4\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k}\big) = 6\big(2H_n + \dfrac{1}{n+1} - 1 - 4H_{2n} - \dfrac{1}{2n+1} + 4 + 2H_n\big)$. Avec la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 18 - 24\ln(2) \sim 1,36$.

3.104 **a.** Par une formule de trigonométrie bien connue : $\sin(n-1) = \sin(n)\cos(1) - \cos(n)\sin(1)$. Par conséquent, on a $\sin(1)a_n = \sin(1)\dfrac{\cos(n)}{n} = \cos(1)b_n - \dfrac{\sin(n-1)}{n} = \cos(1)b_n - \dfrac{\sin(n-1)}{(n-1)}\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)$ donc $\sin(1)a_n \underset{+\infty}{=} \cos(1)b_n - b_{n-1} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ est absolument convergente, et que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ l'est aussi par RIEMANN, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ est aussi absolument convergente par somme de séries absolument convergentes et car $\sin(1) \neq 0$ (π n'est pas rationnel).

b. Comme $\cos(n)$ et $\sin(n)$ sont entre -1 et 1, on a $\cos^2(n) \leqslant |\cos(n)|$ et $\sin^2(n) \leqslant |\sin(n)|$ ce qui donne en sommant $1 = \cos^2(n) + \sin^2(n) \leqslant |\cos(n)| + |\sin(n)|$ ou encore $|\cos(n)| + |\sin(n)| \geqslant 1$.
Avec l'hypothèses faite en **a.**, on a déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(|a_n| + |b_n|\big)$ est absolument convergente.
Or $|a_n| + |b_n| = \dfrac{|\cos(n)| + |\sin(n)|}{n} \geqslant 1n$ alors que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Ceci contredit l'hypothèse de départ donc, par l'absurde : $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ n'est pas absolument convergente.
De même, par symétrie : $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ n'est pas absolument convergente.

3.105 • Supposons que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Phi(n)$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi(n) = 0$ donc $a_0 = 0$. De plus, si $a_1 \neq 0$, on a $\Phi(n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_1}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Phi(n)$ diverge par le critère de RIEMANN, ainsi $a_1 = 0$. Réciproquement, si $a_0 = a_1 = 0$, on a $\Phi(n) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Phi(n)$ converge par RIEMANN. Conclusion : $\sum\limits_{n\geqslant 1}\Phi(n)$ converge ssi $a_0 = a_1 = 0$.

• Supposons que $\prod\limits_{n\geqslant 1}\Phi(n)$ converge, cela signifie que les produits partiels sont non nuls et tende vers un réel non nul ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi(n) = 1$ donc $a_0 = 1$. À partir d'un certain rang n_0, le terme $\Phi(n)$ sera strictement positif et, en passant au logarithme, la convergence de ce produit équivaut à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0}\ln(\Phi(n))$. Or $\ln(\Phi(n)) \underset{+\infty}{=} \dfrac{a_1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ donc si $a_1 \neq 0$, on a $\ln(\Phi(n)) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_1}{n}$ ce qui contredit avec RIEMANN la convergence de $\prod\limits_{n\geqslant 1}\Phi(n)$. Alors $a_1 = 0$ donc $\phi(n) \underset{+\infty}{=} 1 + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ ce qui montre que $\ln(\Phi(n)) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ d'où la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant n_0}\ln(\Phi(n))$ qui implique celle de $\prod\limits_{n\geqslant 1}\Phi(n)$: $\prod\limits_{n\geqslant 1}\Phi(n)$ converge ssi $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

• On suppose que $\forall k \in \mathbb{N},\ \Phi(k) \neq 0$ car sinon la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ est claire.

Posons $u_n = \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i) \neq 0$, si $a_0 \notin [-1;1]$, alors la suite $(|u_n|)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante à partir d'un rang n_0 pour lequel $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| > 1$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ est grossièrement divergente.

Si $|a_0| < 1$, en prenant ℓ tel que $\ell \in]|a_0|;1[$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |\Phi(n)| \leqslant \ell$ donc, par une récurrence simple, $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant |u_{n_0}|\ell^{n-n_0}$. et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente par comparaison aux séries géométriques.

Si $a_0 = 1$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les $\Phi(n)$ sont strictement positifs donc $u_n = A \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$ en prenant $A = \prod\limits_{i=0}^{n_0-1} \Phi(i) \neq 0$ La convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ est équivalente à celle de $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$. Or, en posant $v_n = \prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i)$, on a $\ln(v_n) = \sum\limits_{i=n_0}^{n} \ln(\Phi(i))$ avec $\ln(\Phi(i)) = \dfrac{a_1}{i} + w_i$ où $w_i \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{i^2}\Big)$. Ainsi $\ln(v_n) \underset{+\infty}{=} a_1\big(H_n - H_{n_0-1}\big) + S + o(1)$ où $S = \sum\limits_{i=n_0}^{+\infty} w_i$. Alors $\prod\limits_{i=n_0}^{n} \Phi(i) \underset{+\infty}{=} e^{a_1 \ln(n)+\lambda+o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n^{-a_1}}$ (où $\alpha = e^{\lambda} > 0$) donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \prod\limits_{i=0}^{n} \Phi(i)$ converge si et seulement si $a_1 < -1$.

Reste le cas $a_0 = -1$ que vous ferez sans aucune difficulté........

• Ici $\Phi(i) = 2 - e^{\frac{\alpha}{i}} \underset{+\infty}{=} 2 - \Big(1 + \frac{\alpha}{i} + \dfrac{\alpha^2}{2i^2} + o\Big(\dfrac{1}{i^2}\Big)\Big) \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{i} - \dfrac{\alpha^2}{2i^2} + o\Big(\dfrac{1}{i^2}\Big)$. Par conséquent, d'après ce qui précède, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \prod\limits_{i=1}^{n} \Big(2 - e^{\frac{\alpha}{i}}\Big)$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3.106 Par une récurrence immédiate, tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+$, comme $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+nu_n^2}$ (1), si $\ell > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1+nu_n^2} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ ce qui est contradictoire. Par conséquent, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, sa limite est 0.

$\forall n \geqslant 2,\ f_n'(x) = \dfrac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$: f_n est croissante sur $\Big[0;\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big]$, décroissante sur $\Big[\dfrac{1}{\sqrt{n}};+\infty\Big[$.

• $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1^2} = f_1(u_1)$ or f_1 est maximale en 1 où elle vaut $\dfrac{1}{2}$ donc $u_2 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

• Soit $n \geqslant 2$, supposons $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, alors $u_n \in \Big[0;\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big]$ d'où $f_n(u_n) \leqslant f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n+1}$ et l'hérédité est établie.

On en déduit donc $\forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

$\forall n \geqslant 2,\ (n+1)u_{n+1} - nu_n = \dfrac{(n+1)u_n}{1+nu_n^2} - nu_n = \dfrac{(n+1)u_n - nu_n - n^2u_n^3}{1+nu_n^2} = \dfrac{u_n(1-n^2u_n^2)}{1+nu_n^2} \geqslant 0$ d'après l'inégalité (1). Pour $n = 1$, on $2u_2 - u_1 = \dfrac{2u_1}{1+u_1^2} - u_1 = \dfrac{u_1(1-u_1^2)}{1+u_1^2}$ dont on ne connaît pas le signe. Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante, majorée par 1 d'après (1) : elle converge vers $a \in]0;1]$. On en déduit : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$.

Posons $v_n = nu_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \in]0;1]$. $v_{n+1} - v_n = u_n\Big(\dfrac{1-n^2u_n^2}{1+nu_n^2}\Big)$ d'après ce qui précède et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+nu_n^2) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-n^2u_n^2) = 1-a^2$. Ainsi, si $a \neq 1$, $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a(1-a^2)}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ est alors divergente ce qui contredit la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Par conséquent $a = 1$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

3.107 On sait que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ (série exponentielle). Ainsi : $e = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$, $e^j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{j^n}{n!}$ et $e^{j^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{j^{2n}}{n!}$.

Mais on sait aussi que $1 + j^n + j^{2n} = 3$ si n est un multiple de 3 et $1 + j^n + j^{2n} = 0$ sinon car $j^n = j^r$ si r

est le reste de la division euclidienne de n par 3. Alors $e + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n)!}$. On en déduit que la série proposée converge, ce qu'on pouvait vérifier par comparaison ou par D'ALEMBERT et que $\sum_{n=0} \frac{1}{(3n)!} = \frac{e + e^j + e^{j^2}}{3} = \frac{e}{3} + \frac{e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}} + e^{\frac{-i\sqrt{3}}{2}}}{3\sqrt{e}} = \frac{e}{3} + \frac{2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3\sqrt{e}} \sim 1,168.$

3.108 Par la méthode classique, on décompose en éléments simples : $\frac{1}{4X^3 - X} = \frac{1}{2X - 1} + \frac{1}{2X + 1} - \frac{1}{X}$.

On a $\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k + 1} = \frac{1}{2k(2k + 1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4k^2}$ et $\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k - 1} = \frac{1}{2k(2k - 1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{4k^2}$ d'où la convergence (on pouvait aussi raisonner par série télescopiques).

Pour $n \geqslant 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k + 1}\right) = H_n - H_{2n+1} + 1 \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma - \ln(2n+1) - \gamma + 1 + o(1) = 1 - \ln(2) + o(1)$.

De même, $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k - 1}\right) = H_n - H_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma - \ln(2n) - \gamma + o(1) = -\ln(2) + o(1)$.

Ainsi : $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{4k^3 - k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^3 - k} - \frac{1}{3}$ d'où $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{4k^3 - k} = -\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k + 1}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k - 1}\right)$ qui vaut $-\frac{1}{3} + \ln(2) + \ln(2) - 1 = 2\ln(2) - \frac{4}{3} \sim 0,05$.

De plus, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{4x^3 - x}$ converge $x \mapsto \frac{dx}{4x^3 - x}$ est continue sur $[2; +\infty[$ et $\frac{1}{4x^3 - x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4x^3}$. Pour $x \geqslant 2$, il vient $\int_2^{x} \frac{dt}{4t^3 - t} = \int_2^{x} \left(\frac{1}{2t - 1} + \frac{1}{2t + 1} - \frac{1}{t}\right)dt = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4t^2 - 1}{t^2}\right)\right]_2^x = \frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{16}{15}\right) \sim 0.03.$

3.109 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0$. Comme $P_n(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$, P_n induit une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $[-1; +\infty[$ d'après le théorème du même nom donc il existe bien un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $P_n(x_n) = 0$ et on a même $x_n > 0$ car $P_n(0) \neq 0$. Comme $P_1(x) = x - 1$ et $P_2 = x^2 - x - 1$, on a $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ car le discriminant de P_2 vaut $\Delta = 5$ et que $x_2 > 0$.

On constate que $\forall x \geqslant 0,\ P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1}$. Ainsi $P_n(x_{n+1}) \leqslant P_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = P_n(x_n)$. Comme P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $x_{n+1} \leqslant x_n$ et la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0; 1[$ d'après le théorème de la limite monotone. Si $n \geqslant 2$, $P_n(1) > 0 = P_n(x_n)$ donc $x_n \in]0; 1[$ par stricte croissance de P_n. On a alors $P_n(x_n) = x_n\left(\frac{1 - x_n^n}{1 - x_n}\right) - 1 = \frac{2x_n - 1 - x_n^{n+1}}{1 - x_n}$ car $x_n \neq 1$ donc $2x_n - 1 - x_n^{n+1} = 0$ (1).

Or $\forall n \geqslant 2,\ x_n \leqslant x_2$ donc $0 \leqslant_n^{n+1} < x_2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < x_2 < 1$ et on en déduit par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} x_n^{n+1} = 0$. En passant à la limite (elles existent) dans (1), on a $2\ell - 1 = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

3.110 Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. En posant $r_n = \frac{u_n}{v_n}$, on a $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \times \frac{v_n}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{v_n}{v_{n+1}} \underset{+\infty}{=} \frac{1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{=} \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{\alpha - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Il suffit donc de prendre α tel que $1 < \alpha < \lambda$ et $\frac{r_{n+1}}{r_n} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{\alpha - \lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ implique donc l'existence d'un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \frac{r_{n+1}}{r_n} \leqslant 1$. On en déduit que la suite (r_n) est donc décroissante à partir du rang n_0, elle est donc bornée (car positive). Ainsi $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ et comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge par RIEMANN, on a aussi la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ à termes positifs.

3.111 La fonction $t \mapsto \cos(nt^2)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc u_n existe. On a clairement $u_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1$, on effectue le changement de variable $u = \sqrt{n}t$ et on obtient $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \cos(u^2)du$.

La fonction $h : u \mapsto \cos(u^2) = \frac{2u\cos(u^2)}{2u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h(u) = f(u)g'(u)$ avec $g(u) = \sin(u^2)$ et $f(u) = \frac{1}{2u}$. Comme $\lim\limits_{u\to 0^+} f(u)g(u) = \lim\limits_{u\to+\infty} f(u)g(u) = 0$, la convergence de $\int_0^{+\infty} fg'$ équivaut à celle de $\int_0^{+\infty} f'g$ et en cas de convergence on a $\int_0^{+\infty} h = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u^2)}{2u^2}du$. Or la fonction $k : u \mapsto \frac{\sin(u^2)}{2u^2}$ se prolonge par continuité en 0 et $k(u) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^2}\right)$ donc k est même intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\int_0^{+\infty} h$ converge.

Posons $I = \int_0^{+\infty} h$. Par le changement de variable $v = u^2$, on a $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u^2)}{2u^2}du = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v\sqrt{v}}dv$ car $v \mapsto \sqrt{v}$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, strictement croissante et de classe C^1.

Par CHASLES : $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(v)}{v\sqrt{v}}dv$. Posons $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(v)}{v\sqrt{v}}dv$, avec le changement de variable $v = w + n\pi$, il vient $u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(w)}{(n\pi+w)^{3/2}}dw$ car $\sin(n\pi+w) = (-1)^n\sin(w)$.

- Comme $\sin$ est strictement positive sur $]0;\pi[$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est alternée.
- $|u_{n+1}| = \int_0^\pi \frac{\sin(w)}{((n+1)\pi+w)^{3/2}}dw < \int_0^\pi \frac{\sin(w)}{((n+1)\pi)^{3/2}}dw < \int_0^\pi \frac{\sin(w)}{(n\pi+w)^{3/2}}dw = |u_n|$ donc $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante. Enfin $|u_n| \leqslant \int_0^\pi \frac{1}{(n\pi+w)^{3/2}}dw \leqslant \frac{\pi}{(n\pi)^{3/2}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$.

On conclut par le CSSA que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge (on le savait déjà) et surtout que le signe de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = I$ est celui de $u_0 > 0$. Ainsi $I > 0$. Par conséquent : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{I}{\sqrt{n}}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge d'après RIEMANN.

3.112 Une petite étude de fonctions montre que $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $[e;+\infty[$ donc sur $[4;+\infty[$.

Ainsi, pour $p \geqslant 4$: $\int\limits_p^{p+1} \frac{\ln t}{t}dt \leqslant \frac{\ln p}{p} \leqslant \int\limits_{p-1}^{p} \frac{\ln t}{t}dt$ et en sommant : $\forall n \geqslant 4$, $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + w_n$ où $\int\limits_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}dt \leqslant w_n \leqslant \int\limits_3^{n} \frac{\ln t}{t}dt$ d'où $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}$. Pour $n \geqslant 4$: $v_n - v_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \int\limits_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}dt$ donc $(v_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante et minorée d'après ce qui précède donc elle converge vers ℓ et on a donc $u_n \underset{\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$.

Pour $n \geqslant 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k-1)}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k} - \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$. Donc, il vient $S_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^n \ln n}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$ car $H_n \underset{\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$. Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + o(1)$, la série proposée converge vers $\frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$. On pouvait dire que cette série convergeait sans ce calcul car elle vérifie le CSSA.

3.113 Clairement $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et on montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ donc $x_{n+1} - x_n > 0$ et la suite est croissante. Si elle convergeait vers $\ell \geqslant x_0 > 0$ alors, en passant à la limite dans (1), $\ell = \ell + \frac{1}{\ell}$: NON ! Ainsi, elle ne peut pas converger, donc elle tend vers $+\infty$ car elle est croissante.

Par télescopage, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{x_n}=\sum_{n\geqslant 0}(x_{n+1}-x_n)$ a la même nature que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ donc elle diverge. En élevant $x_{k+1}=x_k+\frac{1}{x_k}$ au carré, on a $x_{k+1}^2-x_k^2=2+\frac{1}{x_k^2}$. On somme pour $k\in[\![0;n]\!]$ pour obtenir par télescopage encore : $x_{n+1}^2-x_0^2=2n+2+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2}$. On en déduit que $x_{n+1}^2\geqslant 2(n+1)$ donc $\frac{1}{x_n^2}\leqslant\frac{1}{2n}$ dès que $n\geqslant 1$. Ainsi : $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2}\geqslant\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. On sait que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$ donc $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2}\underset{+\infty}{=}o(n)$. Comme $x_{n+1}^2=2n+2+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2}+x_0^2$, il vient $x_{n+1}^2=2n+o(n)$ donc $x_{n+1}^2\underset{+\infty}{\sim}2n$ ce qui donne au final $x_n\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{2n}$.

3.114 Si $u_n\in[0;\pi]$, alors $1-\cos(u_n)\in[0;2]\subset[0;\pi]$. Par récurrence, on a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0;\pi]$. Soit $f:[0;\pi]\to[0;\pi]$ définie par $f(x)=1-\cos(x)$ de sorte que $u_{n+1}=f(u_n)$. La fonction f est croissante sur $[0;\pi]$ car $f'(x)=\sin(x)\geqslant 0$. Ainsi, on sait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone. De plus, $u_1=1-\cos(u_0)\leqslant u_0$ car une petite étude de la fonction $g:x\mapsto f(x)-x$ de dérivée $g'(x)=\sin(x)-1\leqslant 0$ (et ne s'annulant qu'en $x=\frac{\pi}{2}$) montre que $\forall x\in]0;\pi],\ g(x)<0$. Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, minorée par 0 : elle converge vers un réel $\ell\in[0;\pi]$. Par continuité de f, en passant à la limite dans $u_{n+1}=f(u_n)$, on a $f(\ell)=\ell\iff g(\ell)=0\iff\ell=0$. Si $u_0=0$, alors $\forall n\geqslant 0,\ u_n=0$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge clairement.

Sinon, $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$, par le DL de $\cos$ en 0 à l'ordre 2, on a $u_{n+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{u_n^2}{2}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{u_n}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et on conclut que $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge absolument par la règle de D'ALEMBERT.

3.115 D'abord, comme $\alpha>1$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge d'après RIEMANN donc R_n est bien défini en tant que reste de série convergente. Comme la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, pour $k\geqslant 2$, on a par comparaison série/intégrale $\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^\alpha}$. On somme pour k allant de $n+1$ à ∞ (tout converge) et on a :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}=\left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{+\infty}=\int_{n+1}^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant R_n\leqslant\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}=\left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_n^{+\infty}=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit bien que $R_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Comme $\alpha>1$, $S_n\underset{+\infty}{\sim}\zeta(\alpha)\neq 0$. On a donc $\frac{R_n}{S_n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\zeta(\alpha)}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Toujours d'après RIEMANN, on peut conclure que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{R_n}{S_n}$ si et seulement si $\alpha>2$.

3.116 Pour $n\geqslant 1$, $u_n=\ln(2n+(-1)^n)-\ln(2n)=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)=\frac{(-1)^n}{2n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{4n^2}\right)$ donc on peut écrire $u_n=v_n+w_n$ avec $v_n=\frac{(-1)^n}{2n}$ et $w_n=u_n-v_n\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{4n^2}$. $\sum_{n\geqslant 1}v_n$ converge d'après le CSSA et $\sum_{n\geqslant 1}w_n$ converge absolument par le critère de RIEMANN $(2>1)$. Par somme la série numérique $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge. Or d'après le premier développement, on a $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{(-1)^n}{2n}$ donc $|u_n|\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}|u_n|$ diverge toujours par le critère de RIEMANN. On en déduit que $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ est semi-convergente.

3.117 On pose $u_n=\left((n+(-1)^n)^\alpha-n^\alpha\right)=n^\alpha\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^\alpha-1\right)\underset{+\infty}{=}n^\alpha\left(1+\alpha\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)$ d'où $u_n=\alpha v_n+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}w_n$ avec $v_n=\frac{(-1)^n}{n^{1-\alpha}}$ et $w_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^{2-\alpha}}>0$. Comme $1-\alpha>0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}v_n$ converge par le CSSA. Comme $2-\alpha>1$, la série $\sum_{n\geqslant 1}w_n$ converge absolument. Par somme, $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge.

3.118 On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ dès que $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$ (avec convergence absolue). On ne peut pas dériver en complexe donc on se doit d'utiliser un produit de CAUCHY pour faire apparaître ce n. Ainsi, si $|z| < 1$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1.1\right)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$.
Ainsi, comme $\left|\frac{1}{1+2i}\right| < 1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+2i)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(1+2i)^n} = \frac{(1+2i)^2}{(1+2i)((1+2i)-1)^2} = -\frac{1}{4} - \frac{i}{2}$.

3.119 La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a les inégalités $\forall k \in [\![n+1;2n]\!]$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$. En sommant, $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leqslant u_n \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$. Ainsi $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} \leqslant u_n \leqslant [2\sqrt{t}]_n^{2n} = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$. Or $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} = 2\sqrt{2n+1} - 2\sqrt{n+1}$ donc, en factorisant, cela donne $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} = 2\sqrt{n}\left(\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$ donc $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$. L'encadrement précédente nous montre alors par le théorème des gendarmes que $u_n \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

3.120 Posons $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ si $n \geqslant 2$, alors comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ donc, en notant $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, on a $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}} < 0$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge par le CSSA car $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers 0. La série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$ (signe constant).
Ainsi $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge si et seulement si $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

3.121 Si $|a| \geqslant 1$, comme $\lim_{n\to+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor = +\infty$, la suite $\left(a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ est alors grossière. Si $a = 0$, comme $\forall n \geqslant 1$, $a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 0$, on a convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$.
Si $a \in]0;1[$, comme $\sqrt{n} - 1 < \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant \sqrt{n}$, il vient $a^{\sqrt{n}} \leqslant a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} < a^{\sqrt{n}-1} = \frac{1}{a}a^{\sqrt{n}}$ car $t \mapsto a^t$ est décroissante. Or $n^2a^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\ln(a)-2\ln(n)}$ et $\sqrt{n}\ln(a) - 2\ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}\ln(a) \to -\infty$ par croissances comparées donc $\lim_{n\to+\infty} n^2a^{\sqrt{n}} = 0$. Ainsi $a^{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 0} a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ converge.
Si $a \in \left]-1;0\right[$, $|a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}| = |a|^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ donc, par le cas précédent : $\sum_{n\geqslant 0} a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ converge absolument donc converge. Au final : $\sum_{n\geqslant 1} a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ converge si et seulement si $-1 < a < 1$.

3.122 Soit on se rappelle (mais c'est hors programme) que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) + \gamma + o(1)$ et on soustrait pour avoir $H_{2n+1} - H_n \underset{+\infty}{=} \ln(2n+1) - \ln n + \gamma - \gamma + o(1) \underset{+\infty}{=} \ln(2) + o(1)$ et le tour est joué, soit on utilise les sommes de RIEMANN car $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est continue sur $[0;1]$.
Par théorème sur les sommes de RIEMANN, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(H_{2n} - H_n\right) = \int_0^1 f(x)dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln(2)$. Or $\lim_{n\to+\infty}(H_{2n+1} - H_{2n}) = 0$ donc ceci montre aussi que $\lim_{n\to+\infty}(H_{2n+1} - H_n) = \ln 2$.
Comme $\sum_{k=1}^{n} k^2 \geqslant n^2$, on a $a_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. On décompose en éléments simples : $\frac{6}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1}$. Par les méthodes habituelles, on trouve : $a = 6$, $b = 6$ et $c = -24$. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 6\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - 4\frac{1}{2k+1}\right) = 6\left(2H_n + \frac{1}{n+1} - 1 - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)$

et $S_n = 6\big(2H_n + \frac{1}{n+1} - 1 - 4\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - 4\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + 4\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\big) = 6\big(2H_n + \frac{1}{n+1} - 1 - 4H_{2n} - \frac{1}{2n+1} + 4 + 2H_n\big)$.
Avec la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 18 - 24\ln(2) \sim 1,36$.

3.123 Soit $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|^{n\pi}dx$ car $|\sin(x)| \leqslant 1$ pour $x \in [n\pi;(n+1)\pi]$. Comme $x \mapsto |\sin(x)|$ est π-périodique, on a encore $0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi} |\sin(x)|^{n\pi}dx$. Puisque $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, on a par symétrie $0 \leqslant u_n \leqslant 2\int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n\pi}dx$. En posant $f_n : x \mapsto \sin(x)^{n\pi}$, la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle (continue) sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x) = 1$ avec φ intégrable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n\pi}dx = \int_0^{\pi/2} 0dx = 0$.
On étudie la fonction $g : t \mapsto \sin t - \frac{2}{\pi}t$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, g est deux fois dérivable et $g'(t) = \cos(t) - \frac{2}{\pi}$ et $g''(t) = -\sin(t)$. Ainsi, g' est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et comme $g'(0) > 0$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, il existe un unique $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Ainsi, g est croissante sur $[0;\alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha;\frac{\pi}{2}\right]$ donc g est positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ car $g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ceci justifie bien que $\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$.
On reporte dans l'intégrale et, toujours avec des arguments de symétrie puisque $\sin(\pi - x) = \sin(x)$:

$$u_n \geqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|^{(n+1)\pi}dx = 2\int_0^{\pi/2} |\sin(x)|^{(n+1)\pi}dx \geqslant 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi}x\right)^x dx \geqslant 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi}x\right)^{(n+1)\pi}dx.$$

Or $2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi}x\right)^{(n+1)\pi}dx = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{(n+1)\pi} \int_0^{\pi/2} x^{(n+1)\pi}dx = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{(n+1)\pi} \frac{1}{(n+1)\pi+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(n+1)\pi+1}$ ce qui fait que $u_n \geqslant \frac{\pi}{(n+1)\pi+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
La fonction $F : x \mapsto \int_1^x |\sin(t)|^t dt$ est clairement dérivable et croissante donc F admet une limite (finie ou $+\infty$) en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone. Or $F((n+1)\pi) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ d'après la relation de Chasles. Comme on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = +\infty$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} F((n+1)\pi) = +\infty$. On en déduit donc que $\int_1^{+\infty} |\sin(x)|^x dx$ diverge aussi.

3.124 **a.** $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln(t)}{t^2} = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$, ainsi f est décroissante sur $[e;+\infty[$ donc sur $[3;+\infty[$. Ainsi, $\forall k \geqslant 4$, $\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt (\leqslant f(k-1))$ et, pour $n \geqslant 4$, en sommant ces inégalités pour $k \in [\![4;n]\!]$, comme $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, on a l'encadrement suivant,
$\int_4^{n+1} f(t)dt \leqslant u_n - f(2) - f(3) \leqslant \int_3^n f(t)dt \Longleftrightarrow \frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2(4)}{2} \leqslant u_n - f(2) - f(3) \leqslant \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}$
car une primitive de f est $t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{2}$. Comme $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, par encadrement, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.
b. Posons $d_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ pour $n \geqslant 1$. Il s'agit de montrer que $(d_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $c \in \mathbb{R}$.

<u>Méthode 1</u> : posons, pour tout entier $k \geqslant 1$, $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$. D'après **a.**, on a $\forall k \geqslant 4$, $0 \leqslant w_k \leqslant f(k-1) - f(k)$. En sommant et par télescopage, on a $0 \leqslant \sum\limits_{k=4}^{n} w_k \leqslant f(3) - f(n) \leqslant f(3)$. Les sommes partielles la série $\sum\limits_{n\geqslant 4} w_n$ sont majorées donc, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 4} w_n$ est à termes positifs, elle

converge d'après une propriété du cours. Or, par CHASLES, $\sum_{k=4}^{n} w_k = \int_3^n f(t)dt - u_n + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$ donc $\sum_{k=4}^{n} w_k = \frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} - u_n + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2}$. En notant la somme de la série $W = \sum_{n=4}^{+\infty} w_n$, on a donc $\frac{\ln^2(n)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2} - u_n + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln(2)}{2} \underset{+\infty}{=} W + o(1)$ ce qui donne le développement asymptotique attendu, $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln^2(3)}{2} - W + o(1) \underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + c + o(1)$ avec $c = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln^2(3)}{2} - W$.

Méthode 2 : pour $n \geqslant 4$, $d_n - d_{n-1} = u_n - u_{n-1} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1))^2 = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t} dt$. La première inégalité (de droite) de la question **a.** montre que $(d_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante. De plus, la seconde inégalité de la question **a.** (à gauche) montre que $u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \geqslant f(2) + f(3) - \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln 4)^2$. Comme $\frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \geqslant 0$, on en déduit que $d_n \geqslant f(2) + f(3) - \frac{1}{2}(\ln 4)^2$ donc $(d_n)_{n\geqslant 4}$ est minorée donc elle converge (vers c) par le théorème de la limite monotone.

Méthode 3 : pour $n \geqslant 2$, $d_n - d_{n-1} = u_n - u_{n-1} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1))^2 = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1))^2$. Or $\ln^2(n) - \ln^2(n-1) = (\ln(n) + \ln(n-1))(\ln(n) - \ln(n-1)) = \left(2\ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \times \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ donc $\ln^2(n) - \ln^2(n-1) \underset{+\infty}{=} \left(2\ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \frac{2\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$. Ainsi, on obtient $d_n - d_{n-1} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum_{n\geqslant 2}(d_n - d_{n-1})$ converge absolument par comparaison à une série de RIEMANN donc, par dualité suite-série, la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ converge (vers c).

Avec les trois méthodes, $\lim_{n\to+\infty} d_n = c \in \mathbb{R}$ donc $d_n \underset{+\infty}{=} c + o(1)$ d'où $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + c + o(1)$ avec $c \in \mathbb{R}$.

c. Pour $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k-1)}{2k-1} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$. Puisque $\ln(2k) = \ln(2) + \ln(k)$, il vient $S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = (\ln 2)H_n + u_n - u_{2n}$. Ainsi, d'après ce qui précède, $S_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(2)(\ln(n) + \gamma) + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln(2n))^2 + o(1)$ avec **a.** ce qui donne $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$ car $\ln(2n)^2 = \ln(2)^2 + 2\ln(2)\ln(n) + \ln(n)^2$. Comme $S_{2n+1} \underset{+\infty}{=} S_{2n} + o(1)$, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$. Comme $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$. Au final, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2}\ln(2)\big(2\gamma - \ln(2)\big)$.

3.125 **a.** Pour $n \geqslant 1$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante car $\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = (1+x)e^x > 0$. De plus, par croissances comparées, $f_n(0) = -n < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. Par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-n;+\infty[$ donc $\exists! u_n > 0,\ f_n(u_n) = 0$ car $0 \in [-n;+\infty[$ et $f_n(0) \neq 0$.

b. Soit $n \geqslant 3$, on a $f_n(1) = e - n < 0$ car $e \sim 2,72$ et $f_n(\ln(n)) = n\ln(n) - n = n(\ln(n) - 1) > 0$ car $n > e$ donc $f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(\ln(n))$ et on conclut par stricte croissance de f_n que $1 < u_n < \ln(n)$.

Comme $u_n e^{u_n} = n$, on obtient $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$ donc $0 \leqslant \ln(n) - u_n = \ln(u_n) \leqslant \ln(\ln(n))$. Or, par croissances comparées, $\ln(\ln(n)) \underset{+\infty}{=} o(\ln(n))$ donc, par encadrement, $\ln(n) - u_n \underset{+\infty}{=} o(\ln(n))$ ce qui est la définition de l'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

c. Comme $u_n - \ln n = -\ln(u_n)$, on peut espérer montrer que $u_n - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(\ln(n))$. On étudie donc $u_n - \ln(n) + \ln(\ln(n)) = \ln\left(\dfrac{\ln(n)}{u_n}\right)$ qui tend vers 0 car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{u_n} = 1$ par la question précédente. Ainsi, $u_n - \ln(n) + \ln(\ln(n)) \underset{+\infty}{=} o(1) \underset{+\infty}{=} o(\ln(\ln(n)))$ ce qui, encore une fois, se traduit par $u_n - \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(\ln(n))$.

3.126 Comme $n+(-1)^n > 0$ pour $n \geqslant 2$, u_n est bien défini. De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+(-1)^n) = +\infty$ et $\dfrac{1}{n+(-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc, comme $\sin(x) \underset{0}{=} x + O(x^2)$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} (-1)^n\left(\dfrac{1}{n+(-1)^n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$. Mais $\dfrac{1}{n+(-1)^n} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right)$ donc $\dfrac{1}{n+(-1)^n} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} (-1)^n\left(\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En posant $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{n}$, on a donc $v_n \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'après le calcul précédent. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ décroît et tend vers 0 et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN car $2 > 1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge par somme.
Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est alternée, on aurait pu s'intéresser à la décroissance de $(|u_n|)_{n\geqslant 2}$. Or $(|u_n|)_{n\geqslant 2}$ est positive et tend vers 0 mais elle n'est pas décroissante car $|u_{2n+1}| = \sin\left(\dfrac{1}{2n}\right) > \sin\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) = |u_{2n}|$.