CHAPITRE 6
RÉDUCTION

⊙ L'objectif dans ce chapitre, pour un endomorphisme u sur un espace vectoriel de dimension finie E, est de trouver des bases $\mathcal{B}$ telles que les matrices de u dans $\mathcal{B}$ soient les plus simples possibles : diagonales, triangulaires, diagonales par blocs, triangulaires par blocs....

En d'autres termes, par la formule de changement de bases, il s'agit de trouver, parmi toutes les matrices semblables à une matrice carrée, la matrice la plus simple.

Cette théorie de la "réduction" est connue depuis la deuxième moitié du XIX^e siècle, elle a été développée par Karl Weierstrass (allemand 1815-1897), Léopold Kronecker (allemand 1823-1891) et Camille Jordan (français 1838-1922) ; Kronecker et Jordan se sont d'ailleurs écharpés épistolairement quant à la paternité de sa découverte.

En 1878, Georg Frobenius (allemand 1849-1917) élargit la théorie pour englober les résultats de ses prédécesseurs et donne une réduction universelle de tout endomorphisme sur tout corps, il établit la preuve du théorème de Cayley-Hamilton de Arthur Cayley (anglais 1838-1922) et William Rowan Hamilton (irlandais 1805-1865) qui aurait du porter son nom. Il signe avec Oscar Perron (allemand 1880-1975) un théorème sur les valeurs et vecteurs propres de certaines matrices qui trouvera son application principale en probabilités pour préciser l'évolution des chaînes de Markov (Andreï Markov, russe 1856-1922).

Il y a différents types de réduction des matrices carrées (ou des endomorphismes en dimension finie bien sûr) : celles de Jordan ou Frobenius, celles de Dunford (dûe à Chevalley !), les décompositions LU, QR, de Cholesky... chacune répondant à une exigence particulière de calcul numérique.

On trouve des applications importantes de la réduction en mécanique quantique où les observables (position, vitesse, énergie,...) sont des opérateurs sur l'espace vectoriel des fonctions d'onde, et les valeurs propres de ces opérateurs jouent un rôle fondamental dans cette théorie.

TABLE DES MATIÈRES

⊙ Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps commutatif $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

PROGRAMME

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année. Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- *l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres) ;*
- *l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).*

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

1 : Éléments propres

Contenus	Capacités & Commentaires
Droite stable par un endomorphisme.	
Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.	Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$. Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Si un polynôme P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$.

2 : Polynôme caractéristique

Contenus	Capacités & Commentaires
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.	Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.
Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
Théorème de Cayley-Hamilton.	La démonstration n'est pas exigible.

3 : Diagonalisation en dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable, à des exemples de systèmes diffé-

	-rentiels à coefficients constants. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E.	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Polynôme caractéristique scindé à racines simples. Traduction matricielle.

4 : Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle. Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.
L'endomorphisme induit par un endomorphisme diago--nalisable sur un sous-espace stable est diagonalisable.	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.	

5 : Trigonalisation en dimension finie

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible. Traduction matricielle.
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

PARTIE 6.1 : ÉLÉMENTS PROPRES

6.1.1 : Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

DÉFINITION 6.1 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- *On dit que λ est une* **valeur propre** *de u s'il existe un vecteur x de E non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Cette dernière équation est appelée* **équation aux éléments propres**.
- *Le* **spectre** *de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u.*
- *Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ (appelé* **sous-espace propre de u associé à λ** *si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$).*
- *Un vecteur non nul de $E_\lambda(u)$ est appelé* **vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.**
- *Un* **vecteur propre de u** *est un vecteur non nul $x \in E$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ qui vérifie $u(x) = \lambda x$.*

REMARQUE 6.1 : • Soit $e \in E$ non nul et $D = \mathrm{Vect}(e)$: $\big(D$ stable par $u\big) \Longleftrightarrow \big(e$ vecteur propre de $u\big)$.

- *Si p est la projection $p_{F,G}$ (avec F et G différents de $\{0_E\}$), $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$, $E_0(p) = G$ et $E_1(p) = F$.*

PROPOSITION : LES SOUS-ESPACES PROPRES ASSOCIÉS À DES VALEURS PROPRES NON NULLES SONT INCLUS DANS L'IMAGE 6.1 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda = 0$, $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Si $\lambda \neq 0$, $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

EXEMPLE 6.1 : • Si $\varphi : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto XP \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Sp}(\varphi) = \emptyset$.

- Si $D \in \mathcal{L}\big(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\big)$ est défini par $D(f) = f'$, alors $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto e^{\lambda t}\big)$.

EXERCICE 6.2 : Si $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées et Δ est l'endomorphisme de E défini par $\Delta\big((u_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, déterminer le spectre de Δ et les sous-espaces propres.

PROPOSITION SUR LA LIBERTÉ D'UNE FAMILLE DE VECTEURS PROPRES ASSOCIÉS À DES VALEURS PROPRES DIFFÉRENTES 6.2 :
Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$:

- **Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont p valeurs propres 2 à 2 distinctes de u alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \cdots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.**
- **Si $x_1, \cdots, x_p$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes alors $(x_1, \cdots, x_p)$ est une famille libre.**

REMARQUE 6.2 : Si E est de dimension n, il y a donc au maximum n valeurs propres distinctes de u.

EXEMPLE 6.3 : • Les fonctions $\big(t \mapsto e^{\lambda t}\big)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ forment une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Les suites géométriques $\Big((\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \cdots, (\lambda_p^n)_{n \in \mathbb{N}}\Big)$ forment une famille libre dans l'espace des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont p complexes distincts 2 à 2. Donc $\big((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}\big)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est libre.
- Les fonctions $\big(p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_p}\big)$ forment une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ si $p_\alpha(t) = t^\alpha$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ distincts 2 à 2. D'où $\big(p_\alpha\big)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

PROPOSITION : STABILITÉ DES SOUS-ESPACES PROPRES SI COMMUTATION 6.3 :
Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent (c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$) alors les espaces propres de u sont stables par v (et réciproquement).

6.1.2 : Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée

DÉFINITION 6.2 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les **valeurs propres**, *le* **spectre** *de A (noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$) et les* **vecteurs propres** *et les* **sous-espaces propres** *de A (notés $E_\lambda(A)$) sont ceux de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canon. associé à A.*

REMARQUE 6.3 : En d'autres termes :
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longleftrightarrow \big(\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0$ *et* $AX = \lambda X\big)$.
- $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *est vecteur propre de A si* $X^T = (x_1 \cdots x_n)$ *vérifie* $AX = \lambda X$ *et* $X \neq 0$.
- *Dans ce cas, on dit que X est une* **colonne propre de A associée à la valeur propre** λ.
- *Si* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, *on pose* $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *est la matrice* **conjuguée** *de A.*

EXEMPLE 6.4 *:* Cherchons les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION SUR LA RELATION ENTRE SPECTRES RÉELS ET COMPLEXES ET SOUS-ESPACE PROPRE DU CONJUGUÉ POUR UNE MATRICE RÉELLE 6.4 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
De plus, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.

EXEMPLE 6.5 *:* Dans l'exemple précédent, $E_{1+i}(A)$ et $E_{1-i}(A)$ sont deux droites de $\mathbb{C}^2$.

PROPOSITION SUR LES SPECTRES DE DEUX MATRICES SEMBLABLES 6.5 :
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables (c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$), alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$ et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on a $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$.

REMARQUE 6.4 : Si deux matrices A et B sont semblables, elles ont donc même rang, même trace, même déterminant, même spectre, mêmes dimensions de leurs sous-espaces propres.

PROPOSITION 6.6 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\big)$.

6.1.3 : Polynôme caractéristique

DÉFINITION 6.3 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le **polynôme caractéristique** *de u est le polynôme $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ associé à la fonction polynomiale définie par $\lambda \in \mathbb{K} \mapsto \det(\lambda \mathrm{id}_E - u)$.*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le **polynôme caractéristique** *de A est le polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ associé à la fonction polynomiale définie par : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.*

REMARQUE 6.5 : • Si $\mathcal{B}$ est une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $\chi_u = \chi_A$.

- *Inversement χ_A est le polynôme caractéristique de u canoniquement associé à A.*
- *Si p est un projecteur de E de dimension n, alors $\chi_p = X^{n-\mathrm{tr}(p)}(X-1)^{\mathrm{tr}(p)}$.*
- *Avant, la définition était $\chi_A = \det(A - XI_n)$ (abus de notation usuel). Attention !*

EXEMPLE 6.6 : Soit $J = (1)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, calculons χ_J.

REMARQUE 6.6 : Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, alors $x \mapsto \det(A + xB)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n telle que $\det(A + xB) = \det(B)x^n + \cdots + \det(A)$.

THÉORÈME SUR LA CONNAISSANCE DE CERTAINS COEFFICIENTS DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE (ÉNORME) 6.7 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E, alors nous avons $\deg(\chi_u) = n$ et $\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\det(u)$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\deg(\chi_A) = n$ et $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\det(A)$.

THÉORÈME SUR LA CARACTÉRISATION DES VALEURS PROPRES PAR LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE 6.8 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a les équivalences suivantes : $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff (u - \lambda \mathrm{id}_E) \notin GL(E) \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u (dans $\mathbb{K}$).

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors : $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff (A - \lambda I_n) \notin GL_n(\mathbb{K}) \iff \chi_A(\lambda) = 0$.

Le spectre de A (sur $\mathbb{K}$) est l'ensemble des racines de χ_A (dans $\mathbb{K}$).

REMARQUE FONDAMENTALE 6.7 : On en déduit :

- *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension n, alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.*
- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors A admet au plus n valeurs propres complexes distinctes.*
- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u (ou A) possède au moins une valeur propre complexe.*
- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si n est impair, u (ou A) possède au moins une valeur propre réelle.*

PROPOSITION 6.9 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \in GL(E) \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.

ORAL BLANC 6.7 : Soit $n \geqslant 2$, A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $AB - BA = \alpha A$.
a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kB - BA^k = \alpha k A^k$.
b. En considérant, $f : M \mapsto MB - BM$, prouver que la matrice A est nilpotente.

PROPOSITION SUR L'ÉGALITÉ DES POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES DE DEUX MATRICES SEMBLABLES 6.10 :
Si A et B semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

De même, $\chi_A = \chi_{A^T}$ donc A et A^T ont les mêmes valeurs propres de mêmes multiplicités.

REMARQUE 6.8 : Si A et B sont semblables, elles ont donc même rang, même trace, même déterminant, même spectre, mêmes dimensions de leurs sous-espaces propres et même polynôme caractéristique.

REMARQUE HP 6.9 : (mais fondamentale)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme de F induit par u : χ_{u_F} divise χ_u.

Plus généralement, si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_r)$ (par blocs), alors $\chi_u = \prod_{k=1}^{r} \chi_{A_k}$.

6.1.4 : Théorème de Cayley-Hamilton

PROPOSITION SUR LA MATRICE COMPAGNON D'UN POLYNÔME 6.11 :

Soit $P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ **avec** $(a_0, \cdots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ **et** $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$ **qui est appelée la matrice compagnon du polynôme** P**, alors** $\chi_A = P$**.**

THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON (ÉNORME) 6.12 :

Soit E **de dimension** n **et** u **un endomorphisme de** E**, alors** $\chi_u(u) = 0$**.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**, alors** $\chi_A(A) = 0$**.**

DÉMONSTRATION : non exigible.

EXERCICE CONCOURS 6.8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier qu'il existe $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$. Déterminer ces constantes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ en considérant l'endomorphisme de Δ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

6.1.5 : Ordres de multiplicité des valeurs propres

DÉFINITION 6.4 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **ordre de multiplicité algébrique de la valeur propre** λ *l'ordre de multiplicité de la racine λ de χ_u ; on la note $m_\lambda(u)$.*
On dit que λ est une **valeur propre simple** *de u si $m_\lambda(u) = 1$,* **double** *si $m_\lambda(u) = 2$, etc...*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. On appelle **ordre de multiplicité algébrique de la valeur propre** λ *l'ordre de multiplicité de la racine λ de χ_A ; on la note $m_\lambda(A)$.*
On dit que λ est une valeur propre simple de A si $m_\lambda(u) = 1$, double si $m_\lambda(A) = 2$, etc...

REMARQUE 6.10 : • Ainsi, $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$ si et seulement si $m_\lambda(u) = 0$.
• Soit A et B deux matrices semblables, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $m_\lambda(A) = m_\lambda(B) = m_\lambda(A^T)$.

EXERCICE 6.9 : Soit $A = (\delta_{\mathrm{Max}(i,j),n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculons ses valeurs propres.

THÉORÈME SUR LES RELATIONS ENTRE LA TRACE, LE DÉTERMINANT ET LES ORDRES DE MULTIPLICITÉS DES VALEURS PROPRES 6.13 :
Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, si χ_u <u>est scindé sur $\mathbb{K}$</u> (donc en particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u), \quad \mathrm{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda\, m_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda(A)$, $\quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda\, m_\lambda(A)$ **et** $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$.

<u>ORAL BLANC 6.10</u> : Soit $n \geqslant 2$ et $\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$ défini par $\varphi(M) = M + \mathrm{tr}(M)I_n$. Déterminer la trace et le déterminant de φ.

<u>REMARQUE 6.11</u> : Si l'on connaît toutes les valeurs propres de A sauf une, on peut se servir de la trace.

<u>EXERCICE 6.11</u> : Soit X et Y deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui sont définis par $X^T = (x_1 \cdots x_n)$ et $Y^T = (y_1 \cdots y_n)$, trouvons alors les valeurs propres de $A = XY^T$.

<u>REMARQUE 6.12</u> : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors on sait que $\overline{\lambda}$ l'est aussi et que $E_\lambda(A)$ et $E_{\overline{\lambda}}(A)$ ont même dimension mais λ et $\overline{\lambda}$ ont aussi même ordre de multiplicité algébrique.

<u>EXEMPLE 6.12</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\det(A) \geqslant 0$.

DÉFINITION 6.5 :
Soit E de dimension finie, u un endomorphisme de E et λ une valeur propre de u, l'entier $\dim E_\lambda(u)$ est appelé **l'ordre de multiplicité géométrique de la valeur propre λ**.

THÉORÈME SUR UNE INÉGALITÉ ENTRE LES ORDRES DE MULTIPLICITÉ ALGÉBRIQUE ET GÉOMÉTRIQUE D'UNE VALEUR PROPRE 6.14 :
Soit E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u)$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on a $1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant m_\lambda(A)$.

<u>REMARQUE 6.13</u> : L'ordre de multiplicité géométrique est donc inférieur à l'ordre de multiplicité algébrique pour toute valeur propre. Ces inégalités peuvent bien sûr être strictes.

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 6.14</u> : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace de dimension n. Alors :

$$u \text{ est nilpotent} \iff \chi_u = X^n \iff u^n = 0.$$

Pour u nilpotent, 0 est valeur propre de multiplicité algébrique n donc $1 \leqslant \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) \leqslant n$.

<u>EXEMPLE 6.13</u> : Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE 6.2 : RÉDUCTION EN DIMENSION FINIE

6.2.1 : Diagonalisation

DÉFINITION 6.6 :
Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$, *on dit que* u *est* **diagonalisable** *s'il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonale.*

PROPOSITION : ORDRE GÉOMÉTRIQUE D'UNE VALEUR PROPRE SIMPLE 6.15 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Si λ est une valeur propre simple de u (ou de A) alors $E_\lambda(u)$ (ou $E_\lambda(A)$) est une droite.

DÉFINITION 6.7 :
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ *est* **scindé à racines simples** *ou* **simplement scindé** *(noté souvent SARS) s'il est de degré* $n \geqslant 1$ *et s'il possède* n *racines distinctes deux à deux.*

PROPOSITION SUR UNE CONDITION SUFFISANTE DE DIAGONALISABILITÉ 6.16 :
Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u possède n valeurs propres distinctes (si χ_u est scindé à racines simples) alors u est diagonalisable et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim E_\lambda(u) = 1$.

THÉORÈME SUR DES CARACTÉRISATIONS DE LA DIAGONALISABILITÉ 6.17 :
Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- **(i) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.**
- **(ii)** $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big)$.
- **(iii)** $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
- **(iv) Il existe $F_1, \cdots, F_p$ stables par u tels que $E = \sum_{k=1}^{p} F_k$ et $u_{F_1}, \cdots, u_{F_p}$ sont des homothéties.**
- **(v) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.**

REMARQUE FONDAMENTALE 6.15 : Soit E *un espace de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$.

- u *est diagonalisable* $\Longrightarrow E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
- *Si* u *est nilpotent,* u *est diagonalisable* $\Longleftrightarrow u = 0$.

***EXERCICE CONCOURS 6.14* :** CCP PSI 2014 Alizée + Petites Mines PSI 2014 Benjamin

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.

Version PM : Montrer que f est diagonalisable et expliciter ses éléments propres.

Version CCP : Montrer que f est un endomorphisme. Quel est le noyau de f ? L'image de f ?

Donner les espaces propres de f, en déduire que f est diagonalisable.

REMARQUE FONDAMENTALE 6.16 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et u endomorphisme de E. Il suffit de trouver des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ de u telles que $\sum_{k=1}^{r} \dim\left(E_{\lambda_k}(u)\right) \geqslant n$ pour que u soit diagonalisable et qu'on puisse conclure que $Sp(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$.

ORAL BLANC 6.15 : Centrale PSI 2013

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $Z = (z_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $z_{1,j} = z_{2n,j} = 1$, $\forall k \in [\![2;2n-1]\!]$, $z_{k,2n+1-k} = 1$ et toutes les autres cases de la matrice Z sont nulles : ceci se visualise très bien car les 1 de Z forment la lettre Z.

a. Déterminer le rang de Z. Montrer que Z est diagonalisable.

b. En déduire le déterminant de $M = Z + \sqrt{2} I_{2n}$.

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS DES PROJECTEURS SPECTRAUX 6.18 :
Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $Sp(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$. Si $p_1, \cdots, p_r$ est la famille des projecteurs associée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(u)$ alors :

- $p_1 + \cdots + p_r = id_E$.
- $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \lambda_1^n p_1 + \cdots + \lambda_r^n p_r$.

REMARQUE 6.17 : S'il existe des endomorphismes $p_1, \cdots, p_r$ de E de dimension finie qui vérifient $p_1 + \cdots + p_r = id_E$, et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = 0$ et $u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_r p_r$: u est diagonalisable.

THÉORÈME SUR UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE DIAGONALISABILITÉ AVEC LES ORDRES DE MULTIPLICITÉ (ÉNORME) 6.19 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence :

$$\left(u \text{ est diagonalisable}\right) \Longleftrightarrow \left(\chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda \in Sp(u),\ \dim\left(E_\lambda(u)\right) = m_\lambda(u)\right).$$

REMARQUE FONDAMENTALE 6.18 : On retient que si u est diagonalisable, alors χ_u est scindé.

EXERCICE 6.16 : L'endomorphisme u de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-il diagonalisable ?

REMARQUE 6.19 : On se rappelle avoir déjà vu que si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n tel que χ_u possède n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ alors u est diagonalisable.

Attention : ce n'est qu'une condition suffisante de diagonalisabilité ; il est clair que id_E est diagonalisable mais que son polynôme caractéristique $(X-1)^n$ n'est pas à racines simples.

EXERCICE CONCOURS 6.17 : Centrale PSI 2013 Pierre-Simon

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

DÉFINITION 6.8 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on dit que* A *est* **diagonalisable** *(dans* $\mathbb{K}$*) si* A *est semblable (dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*) à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *telle que* $P^{-1}AP$ *est une matrice diagonale.*

PROPOSITION SUR LA RELATION MATRICE/ENDOMORPHISME 6.20 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **et** u **l'endomorphisme de** $\mathbb{K}^n$ **canoniquement associé à** A **:**

- A **est diagonalisable** $\Longleftrightarrow$ u **est diagonalisable.**
- **Si** A **est diagonalisable et** $P \in GL_n(\mathbb{K})$ **telle que** $A = PDP^{-1}$ **avec** $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ **alors** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ **et** $P = P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}}$ **où** $\mathcal{B}$ **est une base de vecteurs propres de** u**.**

REMARQUE 6.20 : Plus généralement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* E *de dimension* n*,* $\mathcal{B}$ *une base de* E*,* $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$*, alors :* $\big(A$ *est diagonalisable*$\big) \Longleftrightarrow \big(u$ *est diagonalisable*$\big)$*.*

6.2.2 : Polynômes annulateurs et diagonalisation

EXERCICE CONCOURS 6.18 : Centrale PSI 2013

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0; n]\!]$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r.

a. Montrer que M est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.

b. En déduire qu'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à $r + 1$ tel que $P(M) = 0$.

c. Montrer par un exemple qu'il n'existe pas toujours de polynôme Q de degré inférieur ou égal à r (à choisir) tel que $Q(M) = 0$.

THÉORÈME : LES VALEURS PROPRES SONT DES RACINES DE TOUT POLYNÔME ANNULATEUR D'UN ENDOMORPHISME (D'UNE MATRICE) 6.21 :
Soit E **un espace vectoriel,** $u \in \mathcal{L}(E)$**, ,** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**,** $P \in \mathbb{K}[X]$ **et** $\lambda \in \mathbb{K}$**.**

- **Si** $P(u) = 0$ **alors** $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ P(\lambda) = 0$**. Donc** $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ **divise** P**.**
- **Si** $P(A) = 0$ **alors** $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ P(\lambda) = 0$**. Donc** $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ **divise** P**.**

REMARQUE 6.21 : Plus généralement, avec les mêmes notations, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ *alors* $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$*. Et si* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$*, alors* $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(A)\big)$*.*

THÉORÈME : CARACTÉRISATION DE DIAGONALISABILITÉ AVEC UN POLYNÔME ANNULATEUR SCINDÉ À RACINES SIMPLES (ÉNORME) 6.22 :
Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie et** $u \in \mathcal{L}(E)$**, ou** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **:**

$$\big(u \text{ diagonalisable}\big) \Longleftrightarrow \big(\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0 \text{ et } P \text{ scindé à racines simples (dans } \mathbb{K})\big).$$

$$\big(A \text{ diagonalisable}\big) \Longleftrightarrow \big(\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P(A) = 0 \text{ et } P \text{ scindé à racines simples (dans } \mathbb{K})\big).$$

EXEMPLE 6.19 ***:*** Reprenons l'étude de $A = (\delta_{\mathrm{Max}(i,j),n})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ORAL BLANC 6.20 ***:*** Centrale PSI 2013

Soit $n \geqslant 2$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose $A = (a_{h,k})_{1\leqslant h,k\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $a_{h,k} = \omega^{(k-1)(h-1)}$.

a. Dans le cas où $n = 3$, calculer χ_A.

b. Calculer A^2. Montrer que A est diagonalisable.

THÉORÈME : CARACTÉRISATION DE DIAGONALISABILITÉ PAR LE POLYNÔME ANNULATEUR MINIMAL SCINDÉ À RACINES SIMPLES (ÉNORME) 6.23 :

Soit E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$: $\big(u$ diagonalisable$\big) \Longleftrightarrow \big(P = \prod\limits_{\lambda\in Sp(u)} (X-\lambda)$ vérifie $P(u) = 0\big)$.

De même, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\big(A$ diagonalisable$\big) \Longleftrightarrow \big(P = \prod\limits_{\lambda\in Sp(A)} (X-\lambda)$ vérifie $P(A) = 0\big)$.

REMARQUE HP 6.22 : *(mais fondamentale) Dans toute cette remarque, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie et que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable. On pose $Sp(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$.*

- *Le polynôme $\pi_u = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$ est donc le polynôme minimal de u.*
- *Si $(L_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ sont les polynômes d'interpolation de* LAGRANGE *associés aux valeurs propres de u, c'est-à-dire $L_j(X) = \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} \left(\dfrac{X-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}\right)$, alors $\big(L_j(u)\big)_{1\leqslant j\leqslant p}$ est la* **famille des projecteurs spectraux** *associés à la décomposition $E = \bigoplus\limits_{j=1}^{p} E_{\lambda_j}(u)$. D'abord $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow L_i(u)\circ L_j(u) = 0$, et :*

$$\sum_{j=1}^{p} L_j(u) = id_E,\quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j L_j(u) = u \quad \textit{et} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ u^m = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^m L_j(u).$$

- $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}(id_E, \cdots, u^{p-1}) = \mathrm{Vect}\big(L_1(u), \cdots, L_p(u)\big)$.

EXERCICE 6.21 ***:*** Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION DE DIAGONALISABILITÉ D'UN ENDOMORPHISME INDUIT 6.24 :

Si u est un endomorphisme diagonalisable de E, espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace de E stable par u, alors l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

REMARQUE HP 6.23 : *Par* CAYLEY-HAMILTON, *le polynôme minimal est un diviseur du polynôme caractéristique. Ainsi, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\pi_u = \prod\limits_{\lambda\in Sp(u)} (X-\lambda)^{n_\lambda(u)}$ où $1 \leqslant n_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u)$. Les valeurs propres de u sont exactement* les *racines du polynôme minimal et du polynôme caractéristique.*

6.2.3 : Commutation et codiagonalisation (HP)

PROPOSITION DE CODIAGONALISATION SI LES ENDOMORPHISMES SONT DIAGONALISABLES ET COMMUTENT (HP) 6.25 :
Soit E de dimension finie et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$; on suppose u diagonalisable :

- **$\big(v$ commute avec $u\big) \iff \big($ tous les sous-espaces propres de u sont stables par $v\big)$.**
- **Si $v \circ u = u \circ v$ et v diagonalisable, alors il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à u et v (on dit que u et v codiagonalisent dans $\mathcal{B}$).**

REMARQUE HP 6.24 : Si u est diagonalisable, en notant $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ son spectre de cardinal r, la sous-algèbre $\mathcal{C}(u)$ de $\mathcal{L}(E)$ (commutant de u) est de dimension $\sum\limits_{k=1}^{r} \dim\big(E_{\lambda_k}(u)\big)^2$.

ORAL BLANC 6.22 : Résoudre l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

6.2.4 : Polynômes annulateurs et trigonalisation

DÉFINITION 6.9 :
Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension finie, on dit que u est **trigonalisable** *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire (supérieure).*
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **trigonalisable** *(dans $\mathbb{K}$) s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire (supérieure).*

REMARQUE 6.25 : On se rappelle avoir vu sur les matrices, si E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$:
$\big(u$ est trigonalisable$\big) \iff \big(\exists \mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ est stable par $u\big)$.

THÉORÈME : CARACTÉRISATION DE TRIGONALISABILITÉ (ÉNORME) 6.26 :
Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$: $\big(u$ est trigonalisable$\big) \iff \big(\chi_u$ est scindé (sur $\mathbb{K}$)$\big)$.
De même, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\big(A$ est trigonalisable$\big) \iff \big(\chi_A$ est scindé (sur $\mathbb{K}$)$\big)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 6.26 : • Toute matrice est donc trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A (comptées avec multiplicité), alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les valeurs propres complexes de A^k sont $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$ ce qui permet d'affirmer par exemple que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.*

REMARQUE 6.27 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 homogène et à coefficients constants : pour étudier la suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on étudie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; on note $\Delta = a^2 + 4b$, $\lambda_1 = \dfrac{a+\delta}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{a-\delta}{2}$ où δ est une racine carrée de Δ ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{a}{2}$ si $\Delta = 0$) :

- *si $\Delta \neq 0$, on a : $\exists(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$.*
- *si $\Delta = 0$, on a : $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha n + \beta)\lambda^n$.*

EXERCICE 6.23 **:** Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

COMPÉTENCES

- trouver des valeurs propres et des vecteurs propres des endomorphismes en résolvant l'équation vectorielle $u(x) = \lambda x$ (dimension infinie) ou le système linéaire $AX = \lambda X$ (dimension finie).
- déterminer l'ordre géométrique d'une valeur propre λ de A en étudiant le rang de $A - \lambda I_n$.
- calculer efficacement le polynôme caractéristique d'une matrice.
- se servir de χ_A pour connaître le spectre de A : trace, déterminant, racines, multiplicités.
- statuer sur la diagonalisabilité d'une matrice en comparant les différents ordres de ses valeurs propres.
- établir la diagonalisabilité d'un endomorphisme en trouvant des polynômes annulateurs adéquats.
- maîtriser les techniques de la trigonalisation de matrices non diagonalisables.