CHAPITRE 5
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PARTIE 5.1 : MODES DE CONVERGENCE

DÉFINITION 5.1 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$. *On dit que :*

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I *vers* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ *(sa* **limite simple***) si* $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I *vers* f *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ *(*$f_n - f$ *bornée si* n *assez grand).*
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment de** I *vers* f *si pour tout segment* $[a;b] \subset I$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a;b]$ *(comme son nom l'indique).*

<u>*REMARQUE 5.1*</u> : • *Convergence simple :* $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

- *Convergence uniforme :* $\forall \varepsilon > 0\ , \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
- *Conv. unif. sur tout segment :* $\forall \varepsilon > 0,\ \forall [a;b] \subset I,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [a;b],\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
- *CVS :* n_0 *dépend de* ε *et* x. *CVU :* n_0 *dépend de* ε *seulement. CVUTS :* n_0 *dépend de* ε *et de* a, b.
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I, *elle le fait sur tout partie* J *de* I.
- *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I, *elle le fait sur tout partie* J *de* I.
- *Pour* I *segment, les notions de convergence uniforme sur* I *et sur tout segment de* I *sont équivalentes.*

PROPOSITION 5.1 :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVU vers** f **sur** $I \Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVU vers** f **sur TS de** $I \Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **CVS vers** f **sur** I.

DÉFINITION 5.2 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions, on dit que :*

- $\sum f_n$ **converge simplement sur** I *si* $\forall x \in I,\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *converge. On note* $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *sa somme.*
- $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I *si* $\left(S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *ou encore que* $\left(R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* I *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_\infty = 0$*).*
- $\sum f_n$ **converge uniformément sur tout segment de** I *si* $\forall [a;b] \subset I$, $\sum f_n$ *CVU sur* $[a;b]$.
- $\sum f_n$ **converge normalement sur** I *si* $\sum\limits_{n\geqslant n_0} ||f_n||_{\infty,I}$ *converge (*f_n *bornée pour* n *assez grand).*
- $\sum f_n$ **converge normalement sur tout segment de** I *si* $\forall [a;b] \subset I$, $\sum f_n$ *CVN sur* $[a;b]$.

<u>*REMARQUE 5.2*</u> : • *Si* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *CVS sur* I *alors* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CVS vers la fonction nulle sur* I.

- *Si* $\sum f_n$ *CVS (resp. CVU, CVN) sur* I *et si* $J \subset I$, *alors* $\sum f_n$ *CVS (resp. CVU, CVN) sur* J.
- *Si* $\sum f_n$ *CVN sur* I, *alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CVU vers la fonction nulle sur* I.
- *Si* $\sum f_n$ *CVN sur tout segment de* I *alors* $\forall x \in I,\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *CVA.*
- *S'il existe* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$ *avec* $\sum \alpha_n$ *CV, alors* $\sum f_n$ *CVN sur* I.

THÉORÈME 5.2 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions. À propos de convergence sur** I **:**

$\sum f_n$ **CVN** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVNTS** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVUTS** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVS et aussi**

$\sum f_n$ **CVN** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVU** $\Longrightarrow \sum f_n$ **CVUTS** $\Longrightarrow \sum f_n$**CVS.**

PARTIE 5.2 : CONTINUITÉ ET LIMITE

THÉORÈME 5.3 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions qui converge uniformément sur** I **(ou sur tout segment de** I**) vers la fonction** $f : I \to \mathbb{K}$**, alors :**

(i) Soit $a \in I$**, si pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue en** a **alors** f **est continue en** a**.**

(ii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue sur** I **alors** f **est continue sur** I**.**

THÉORÈME ÉNORME 5.4 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions. On suppose que :**

(i) $\sum f_n$ **CVU (ou CVN ou CVUTS ou CVNTS) sur** I **vers** S**,**

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur** I**.**

Alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **est continue sur** I**.**

<u>REMARQUE 5.3</u> : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$*,* a *un réel adhérent à* I *(*$a = \pm\infty$ *est possible). On suppose :*

(H_1) *la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *(vers* f*),*

(H_2) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* f_n *admet une limite finie* ℓ_n *en* a*.*

Alors $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$ *i.e.* $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.

THÉORÈME ÉNORME 5.5 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions et** a **un réel adhérent à** I **(**$a = \pm\infty$ **est possible) ; on suppose de plus avoir les deux hypothèses suivantes :**

(H_1) **la série de fonctions** $\sum f_n$ **converge uniformément (ou normalement) sur** I **vers** S**,**

(H_2) **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **admet une limite finie** ℓ_n **en** a**.**

Alors $\sum \ell_n$ **converge et** $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ **i.e.** $\lim\limits_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$**.**

<u>REMARQUE 5.4</u> : Ce théorème de la double limite est faux (dans la remarque et le théorème précédents) si par exemple $a = \mathrm{Sup}(I) \notin I$ *et qu'on a juste convergence uniforme sur tout segment de* I *(ou convergence normale sur tout segment de* I *dans le cas des séries de fonctions).*

EN PRATIQUE : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *:*

- *On détermine la limite simple* f *de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *Pour montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f*, on calcule* $||f_n - f||_\infty$ *(étude de fonction) ou on cherche* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tendant vers* 0 *telle que* $\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- *Pour montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément sur* I*, on cherche une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tende pas vers* 0.
- *On étudie la convergence simple de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *: ensemble de définition* D *de* $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$,
- *On étudie la convergence normale sur* D *(éventuellement sur tout segment de* D*).*
- *À défaut, on cherche à établir la convergence uniforme en étudiant* $||R_n||_\infty$ *et en la majorant.*
- *On cherche limite ou équivalent de* $S(x)$ *aux bornes par comparaison série-intégrale ou double limite.*

PARTIE 5.3 : INTÉGRATION ET DÉRIVATION

THÉORÈME ÉNORME 5.6 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**
(H_1) **La suite** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur le segment** $[a;b]$ **vers** f.
(H_2) **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.
Alors f **est continue sur** $[a;b]$ **et** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_a^b f_n(t)dt\Big) = \int_a^b \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\Big)dt$.

<u>*REMARQUE 5.5*</u> *: On peut généraliser ce théorème à un intervalle borné* I *qui n'est pas un segment si on suppose les fonctions* f_n *intégrables sur* I.

THÉORÈME ÉNORME 5.7 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**
(H_1) **La série** $\sum f_n$ **converge uniformément sur le segment** $[a;b]$ **vers** S.
(H_2) **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.
Alors S **est continue sur** $[a;b]$**,** $\sum \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt$ **converge et** $\displaystyle\int_a^b S(t)dt = \int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)dt$.

THÉORÈME 5.8 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a;b],\, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions, on suppose que :**
(H_1) **La série** $\sum f_n$ **converge normalement sur le segment** $[a;b]$ **vers** S.
(H_2) **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue sur le segment** $[a;b]$.
Alors en plus du th. 5.10, $\sum \displaystyle\int_a^b |f_n(t)|dt$ **CV et** $\displaystyle\int_a^b \big|S(t)\big|dt = \int_a^b \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big|dt \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b |f_n(t)|dt$.

THÉORÈME ÉNORME 5.9 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **une suite de fonctions. On suppose que :**
(H_1) **la série** $\sum f_n$ **converge simplement sur** I **vers** S,
(H_2) **les fonctions** f_n **et la fonction** S **sont continues par morceaux sur** I,
(H_3) **les fonctions** f_n **sont intégrables sur** I **et la série** $\sum \Big(\displaystyle\int_I |f_n|\Big)$ **converge.**
Alors S **est intégrable sur** I**,** $\sum \displaystyle\int_I f_n$ **converge et** $\displaystyle\int_I S = \int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$ **(TITT).**

THÉORÈME ÉNORME 5.10 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que :
(H_1) **la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f,**
(H_2) **pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I,**
(H_3) **$(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I) vers g.**
Alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$, ie $\forall x \in I$, $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'_n(x)\right)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.6 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que :
(H_1) *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f,*
(H_2) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur I,*
(H_3) *pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou uniformément sur tout segment de I) (vers φ_k).*
Alors f est de classe C^∞ sur I et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = \varphi_k \iff \forall x \in I$, $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n^{(k)}(x)\right)$.

THÉORÈME 5.11 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $p \geqslant 2$, si :
(H_1) **toutes les fonctions f_n sont de classe C^p sur I,**
(H_2) **les suites $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement sur I (vers φ_k) pour $k \in [\![0; p-1]\!]$,**
(H_3) **$\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I) (vers φ_p).**
Alors on peut conclure (on admet que ces conditions suffisent) :
(R_1) **$f = \varphi_0$ est de classe C^p sur I.**
(R_2) **$\forall k \in [\![0; p]\!], f^{(k)} = \varphi_k$, c'est-à-dire : $\forall k \in [\![0; p]\!]$, $\forall x \in I$, $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n^{(k)}(x)\right)$.**

THÉORÈME ÉNORME 5.12 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que :
(H_1) **la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S,**
(H_2) **pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I,**
(H_3) **$\sum f'_n$ converge uniformément sur I (ou uniformément sur tout segment de I).**
Alors S est de classe C^1 sur I et $S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f'_n$ ie $\forall x \in I$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(f'_n(x)\right)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.7 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que :
(H_1) *la série $\sum f_n$ converge simplement sur I,*
(H_2) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur I,*
(H_3) *$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I).*
Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur I et $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.

THÉORÈME 5.13 :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $p \geqslant 2$, si :
(H_1) **pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^p sur I,**
(H_2) **les séries $\sum f_n^{(k)}$ convergent simplement sur I pour $k \in [\![0; p-1]\!]$,**
(H_3) **$\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I (ou uniformément sur tout segment de I).**
Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p sur I et $\forall x \in I$, $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.

REMARQUE 5.8 : On peut a fortiori avoir les mêmes conclusions en remplaçant la convergence uniforme (ou uniforme sur tout segment) par la convergence normale (ou normale sur tout segment).