CHAPITRE 6
RÉDUCTION

PARTIE 6.1 : ÉLÉMENTS PROPRES

DÉFINITION 6.1 :
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *:*
- *On dit que* λ *est une* **valeur propre** *de* u *s'il existe un vecteur* x *de* E *non nul tel que* $u(x) = \lambda x$.
- *Le* **spectre** *de* u*, noté* $\mathrm{Sp}(u)$*, est l'ensemble des valeurs propres de* u.
- *Si* $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$*, on note* $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ **l'espace propre de** u **associé à** λ.
- *Un vecteur* <u>*non nul*</u> *de* $E_\lambda(u)$ *est appelé* **vecteur propre de** u **associé à la valeur propre** λ.
- *Un vecteur propre est un vecteur non nul* $x \in E$ *tel qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *qui vérifie* $u(x) = \lambda x$.

<u>*REMARQUE FONDAMENTALE 6.1*</u> *:* • *Si* $\lambda = 0$*, alors* $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$ *et si* $\lambda \neq 0$*,* $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.
• *Soit* $e \in E$ *non nul et* $D = \mathrm{Vect}(e)$ *:* $\big(D$ *stable par* $u\big) \iff \big(e$ *vecteur propre de* $u\big)$.

PROPOSITION 6.1 :
Soit E **un espace vectoriel,** $u \in \mathcal{L}(E)$ **et** $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ **2 à 2 distinctes :**
- **les sous-espaces propres** $E_{\lambda_1}(u), \cdots, E_{\lambda_p}(u)$ **sont en somme directe.**
- **Si** $x_1, \cdots, x_p$ **sont des vecteurs propres associés à** $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$**,** $(x_1, \cdots, x_p)$ **est libre.**

PROPOSITION 6.2 :
Si u **et** v **sont deux endomorphismes de** E **qui commutent (c'est-à-dire que** $u \circ v = v \circ u$**) alors les espaces propres de** u **sont stables par** v **(et réciproquement).**

DÉFINITION 6.2 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Les* **valeurs propres***, le* **spectre** *de* A *(noté* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$*) et les* **vecteurs propres** *et les* **espaces propres** *de* A *(notés* $E_\lambda(A)$*) sont ceux de* u *canoniquement associé à* A.

PROPOSITION 6.3 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**, alors** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **et on a :** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
De plus, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ **alors** $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ **et** $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)$.

PROPOSITION 6.4 :
Soit A **et** B **deux matrices de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **semblables (il existe** $P \in GL_n(\mathbb{K})$ **telle que** $B = P^{-1}AP$**), alors** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$ **et pour** $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$**, on a** $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$.

PROPOSITION 6.5 :
Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel de dimension finie et** $u \in \mathcal{L}(E)$.
Pour toute base $\mathcal{B}$ **de** E**, on a** $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\big)$.

DÉFINITION 6.3 :
Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$.
Le **polynôme caractéristique** *de* u *est le polynôme* $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ *associé à la fonction polynomiale définie par* $\lambda \in \mathbb{K} \mapsto \det(\lambda \mathrm{id}_E - u)$*. Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, de même* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$*,* $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.

<u>*REMARQUE 6.2*</u> *:* • *Si* $\mathcal{B}$ *est une base de* E*,* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *alors* $\chi_u = \chi_A$.
• *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$*,* $x \mapsto \det(A + xB)$ *est polynomiale de degré inférieur ou égal à* n.

THÉORÈME ÉNORME 6.6 :
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\deg(\chi_A) = n$ et $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$. Soit E un espace de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\deg(\chi_u) = n$ et $\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.

THÉORÈME 6.7 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a les équivalences suivantes : $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longleftrightarrow (u - \lambda \mathrm{id}_E) \notin GL(E) \Longleftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$.
Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u (dans $\mathbb{K}$).
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors : $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n) \notin GL_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$.
Le spectre de A (sur $\mathbb{K}$) est l'ensemble des racines de χ_A (dans $\mathbb{K}$).

REMARQUE 6.3 : On en déduit, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension n ou si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
- *u admet au plus n valeurs propres distinctes. A admet au plus n valeurs propres complexes distinctes.*
- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u (ou A) possède au moins une valeur propre complexe.*
- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si n est impair, u (ou A) possède au moins une valeur propre réelle.*

PROPOSITION 6.8 :
Si A et B semblables, elles ont les mêmes valeurs propres de mêmes multiplicités car $\chi_A = \chi_B$. De même avec A et ${}^tA$ car $\chi_A = \chi_{{}^tA}$.

REMARQUE HP 6.4 : Soit E un espace de dimension finie, u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme de F induit par u : χ_{u_F} divise χ_u.
Plus généralement, si la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs avec des blocs $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ sur la diagonale, alors : $\chi_u = \prod_{k=1}^{r} \chi_{A_k}$.

THÉORÈME ÉNORME 6.9 :
Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$ (CAYLEY-HAMILTON).

DÉFINITION 6.4 :
Soit E un espace de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **ordre de multiplicité algébrique de** λ, *notée $m_\lambda(u)$ (ou $m_\lambda(A)$) l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme χ_u (ou χ_A).*
L'entier $\dim E_\lambda(u)$ est appelé **l'ordre de multiplicité géométrique de la valeur propre** λ.

THÉORÈME 6.10 :
Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, si $\underline{\chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K}}$ (par ex. si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :
$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u), \quad \mathrm{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda\, m_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}.$$
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda(A)$, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda\, m_\lambda(A)$ et $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$.

REMARQUE 6.5 :
- *Si on a toutes les valeurs propres de A sauf une, on utilise la trace.*
- *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors on sait que $\overline{\lambda}$ l'est aussi et que $E_\lambda(A)$ et $E_{\overline{\lambda}}(A)$ ont même dimension mais λ et $\overline{\lambda}$ ont aussi même ordre de multiplicité algébrique.*

THÉORÈME ÉNORME 6.11 :
Soit E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda(u)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on a $1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant m_\lambda(A)$.

REMARQUE 6.6 : L'ordre géométrique est donc inférieur à l'ordre algébrique pour toute valeur propre.

PARTIE 6.2 : RÉDUCTION EN DIMENSION FINIE

DÉFINITION 6.5 :
Soit E *un espace de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est* **diagonalisable** *s'il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonale.*

PROPOSITION 6.12 :
Si λ est une valeur propre simple, alors $E_\lambda(u)$ (ou $E_\lambda(A)$) est une droite.

DÉFINITION 6.6 :
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ *est* **scindé à racines simples** *ou* **simplement scindé** *(noté souvent SARS) s'il est de degré* $n \geqslant 1$ *et s'il possède* n *racines distinctes deux à deux.*

PROPOSITION 6.13 :
Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u possède n valeurs propres distinctes (si χ_u est SARS) alors $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim E_\lambda(u) = 1$ et u est diagonalisable.

REMARQUE 6.7 : Attention : ce n'est qu'une condition suffisante de diagonalisabilité ; il est clair que id_E *est diagonalisable mais que son polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.*

THÉORÈME 6.14 :
Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- **(i) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.**
- **(ii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.**
- **(iii)** $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right)$.
- **(iii)** $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
- **(iv) Il existe $F_1, \cdots, F_p$ stables par u tels que $E = \sum_{k=1}^{p} F_k$ et $u_{F_1}, \cdots, u_{F_p}$ sont des homothéties.**

REMARQUE FONDAMENTALE 6.8 : Soit E *un espace de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$.

- u *est diagonalisable* $\Longrightarrow E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
- *Si* u *est nilpotent,* u *est diagonalisable* $\Longleftrightarrow u = 0$.

REMARQUE 6.9 : Soit E *un espace vectoriel de dimension* n *et* u *endomorphisme de* E. *Il suffit de trouver des valeurs propres distinctes* $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ *de* u *telles que* $\sum_{k=1}^{r} \dim\left(E_{\lambda_k}(u)\right) = n$ *pour que* u *soit diagonalisable et qu'on puisse conclure que* $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$.

PROPOSITION 6.15 :
Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$. Si $p_1, \cdots, p_r$ est la famille des projecteurs associée à $E = \bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant r} E_{\lambda_k}(u)$:

- $p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}_E$.
- $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \lambda_1^n p_1 + \cdots + \lambda_r^n p_r$.

THÉORÈME ÉNORME 6.16 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\left(u \text{ est diagonalisable}\right) \Longleftrightarrow \left(\chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim\left(E_\lambda(u)\right) = m_\lambda(u)\right).$$

DÉFINITION 6.7 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on dit que* A *est* **diagonalisable** *(dans* $\mathbb{K}$*) si* A *est semblable (dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*) à une matrice diagonale ; s'il existe* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *telle que* $P^{-1}AP$ *est une matrice diagonale.*

PROPOSITION 6.17 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **et** u **canoniquement associé à** A **:**
- A **est diagonalisable** $\Longleftrightarrow$ u **est diagonalisable.**
- **Si** A **est diagonalisable et** $P \in GL_n(\mathbb{K})$ **telle que** $A = PDP^{-1}$ **avec** $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ **alors** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ **et** $P = P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}}$ **où** $\mathcal{B}$ **est une base de vecteurs propres de** u**.**

REMARQUE 6.10 : Plus généralement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* E *de dimension* n*,* $\mathcal{B}$ *une base de* E*,* $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$*, alors :* $\big(A$ *est diagonalisable*$\big) \Longleftrightarrow \big(u$ *est diagonalisable*$\big)$*.*

PROPOSITION 6.18 :
Soit E **un espace vectoriel,** $u \in \mathcal{L}(E)$ **et** $P \in \mathbb{K}[X]$ **:**
- **Si** $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ **alors** $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$**.**
- **Si** $P(u) = 0$ **alors** $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ P(\lambda) = 0$ **; donc** $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ **divise** P**.**

REMARQUE 6.11 : Toutes les valeurs propres de u *sont* **des** *racines de tout polynôme annulateur de* u *alors que ce sont* **les** *racines du polynôme caractéristique de* u *(ou du polynôme minimal de* u*).*

THÉORÈME ÉNORME 6.19 :
Soit E **un** $\mathbb{K}$**-espace de dimension finie et** $u \in \mathcal{L}(E)$ **:**
$\big(u$ **diagonalisable**$\Longleftrightarrow \big(\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0$ **et** P **SARS (dans** $\mathbb{K}$**)**$\big) \Longleftrightarrow \Big(\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ **annule** $u\Big)$**.**

PROPOSITION 6.20 :
Si u **est un endomorphisme diagonalisable de** E**, espace vectoriel de dimension finie, et** F **un sous-espace de** E **stable par** u**, alors l'endomorphisme induit par** u **sur** F **est diagonalisable.**

PROPOSITION 6.21 :
Soit E **de dimension finie et** $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$**, on suppose** u **diagonalisable :**
- $\big(v$ **commute avec** $u\big) \Longleftrightarrow \big($ **tous les sous-espaces propres de** u **sont stables par** $v\big)$**.**
- **Si** $v \circ u = u \circ v$ **et** v **diagonalisable, alors il existe une base de** E **composée de vecteurs propres communs à** u **et** v **(on dit que** u **et** v **codiagonalisent dans** $\mathcal{B}$**).**

REMARQUE 6.12 : Si u *est diagonalisable, alors en notant* $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ *son spectre de cardinal* r*, alors la sous-algèbre* $\mathcal{C}(u)$ *de* $\mathcal{L}(E)$ *(commutant de* u*) est de dimension* $\sum\limits_{k=1}^{r} \mathrm{dim}(E_{\lambda_k}(u))^2$*.*

DÉFINITION 6.8 :
Soit u *un endomorphisme d'un espace* E *de dimension finie, on dit que* u *est* **trigonalisable** *s'il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* u *est triangulaire (supérieure).*
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite* **trigonalisable** *si* $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}AP$ *est triangulaire supérieure.*

THÉORÈME ÉNORME 6.22 :
Soit E **de dimension finie et** $u \in \mathcal{L}(E)$ **:** $\big(u$ **est trigonalisable**$\big) \Longleftrightarrow \big(\chi_u$ **est scindé (sur** $\mathbb{K}$**)**$\big)$**.**

REMARQUE FONDAMENTALE 6.13 : • *Toute matrice est donc trigonalisable sur* $\mathbb{C}$*.*
- *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et si* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *sont les valeurs propres complexes de* A *(comptées avec multiplicité), alors pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, on a* $\mathrm{tr}(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$*.*