DEVOIR 08 : SÉRIES NUMÉRIQUES

PSI 1 2024-2025 **mardi 05 novembre 2024**

QCM

1 RIEMANN *et* D'ALEMBERT *: soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de termes réels strictement positifs*

1.1 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^- \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

1.2 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+ \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

1.3 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}u_n = 3 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

1.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

2 *Série de signe quelconque : soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui tend vers* 0

2.1 $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

2.2 $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} \sin^2(u_n)$ converge

2.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge

2.4 $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge

3 *Comparaison : soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles*

3.1 si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$: $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ACV $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ACV

3.2 si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$: $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ CV $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ CV

3.3 si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$: $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ACV $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ CV

3.4 si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$: $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ CV $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ CV

4 *Séries alternées : soit* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite réelle positive décroissante qui tend vers* 0*, on pose* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$

4.1 $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

4.2 $|R_{n+1}| \leqslant u_n$

4.3 $|R_n| \leqslant u_{n+2}$

4.4 $R_{n+2} \leqslant |u_n|$

Énoncé Énoncer les trois hypothèses et les trois conclusions du critère spécial des séries alternées.

Preuve Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite positive, décroissante et qui tend vers 0. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$, $a_n = S_{2n}$ et $b_n = S_{2n+1}$, montrer que les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

On rappelle que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'EULER ($\gamma \sim 0.577$).

a. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le réel S_{3n} en fonction de H_{3n} et H_n.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n}$. Montrer que les suites $(S_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{3n+2})_{n\geqslant 0}$ convergent aussi.

c. En déduire l'existence et la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour des entiers $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Pour quelles valeurs de α le terme u_n est défini pour tout entier $n \geqslant 2$?
Dans ce cas, pour quelles valeurs de α la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ est-elle absolument convergente ?
Toujours dans ce cas, effectuer un développement asymptotique de u_n à l'ordre 2 (deux termes significatifs) et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

DEVOIR 08 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 08	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

1.1 Faux : pour $u_n = \frac{1}{n}$ par exemple **1.2** Vrai : car alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers 0 donc divergence grossière **1.3** Vrai : à partir d'un certain rang $u_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ et RIEMANN **1.4** Faux : pour $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$.

2.1 Vrai : ACV implique CV **2.2** Vrai : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \sin^2(u_n) > 0$ **2.3** Faux : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (CSSA) et $u_n^2 = \frac{1}{n}$ **2.4** Vrai : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $u_n^2 \underset{+\infty}{=} o(|u_n|)$ et comparaison.

3.1 Vrai : $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|$ et $|u_n| \geqslant 0$ **3.2** Faux : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge alors que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge. **3.3** Vrai : $|u_n| \underset{+\infty}{=} o(|v_n|)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} |v_n|$ converge **3.4** Faux : $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$.

4.1 Vrai : CSSA **4.2** Vrai : $|R_{n+1}| \leqslant |u_{n+2}| = u_{n+2} \leqslant u_n$ **4.3** Faux : si $u_n = \frac{1}{2^n}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \frac{2}{3}$ et, après calculs, $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3\times 2^n}$ et $|R_n| > u_{n+2}$ **4.4** Vrai : $|R_{n+2}| \leqslant |u_{n+3}| = u_{n+3} \leqslant u_n$.

Énoncé Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que la suite $\big(|u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 alors $\sum u_n$ converge. De plus, pour $n \geqslant -1$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Preuve $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$ car $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De même, $b_{n+1} - b_n = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$ donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, $a_n - b_n = S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ or $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0 en tant que suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$. Ainsi, $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 1 **a.** $S_{3n} = \sum\limits_{k=1}^{3n} u_k = \Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\Big) + \Big(-\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6}\Big) + \cdots + \Big(-\frac{1}{2(3n-2)} - \frac{1}{2(3n-1)} + \frac{1}{3n}\Big)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ donc $S_{3n} = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3k} = -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{H_n - H_{3n}}{2}$.

b. On en déduit que $S_{3n} \underset{+\infty}{=} \frac{\ln(n) + \gamma - \ln(3n) - \gamma + o(1)}{2} \underset{+\infty}{=} -\frac{\ln(3)}{2} + o(1)$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n} = -\frac{\ln(3)}{2}$. Comme $S_{3n+1} = S_{3n} + u_{3n+1}$ et $S_{3n+2} = S_{3n+1} + u_{3n+2}$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{3n+2} = -\frac{\ln(3)}{2}$.

c. Comme $(S_{3n})_{n\geqslant 1}$, $(S_{3n+1})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{3n+2})_{n\geqslant 0}$ tendent vers $-\frac{\ln(3)}{2}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ CV et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \ell = -\frac{1}{2}\ln(3)$.

Exercice 2 Si $\alpha \leqslant 0$, u_3 n'est pas définie car $n^\alpha + (-1)^3 \leqslant 0$. Si $\alpha > 0$, $n^\alpha + (-1)^n > 0$ pour $n \geqslant 2$ et u_n est défini. Comme $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ACV $\Longleftrightarrow \alpha > 2$. Si $\alpha > 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}}$ donc $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\Big(\frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\Big)$ et $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ et $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} < 0$. $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ CV (CSSA) car $\Big(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\Big)_{n\geqslant 2}$ décroît vers 0 car $\alpha > 0$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ CV$\Longleftrightarrow \alpha > \frac{2}{3}$. Par somme, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ CV$\Longleftrightarrow \alpha > \frac{2}{3}$.