Correction du DS3

Problème I : (extrait de Centrale PSI 1997 maths 1)

Partie I :

1. a) On a (séries de Riemann) $\boxed{I_A = I_C =]1, +\infty[\text{ donc } \gamma = \delta = 1}$

b) Comme $|u_n(x)| = \dfrac{\ln(n)}{n^{x+2}}$, si $x \leqslant -1$ alors, par croissances comparées, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(|u_n(x)|)$ donc $\sum |u_n(x)|$ diverge et si $x > -1$, on choisit y tel que $1 < y < x+2$ de sorte que l'on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^y}\right)$, toujours par croissances comparées, donc $\sum |u_n(x)|$ converge. On a donc $\boxed{I_A =]-1, +\infty[\text{ et } \delta = -1}$

Si $x \leqslant -2$ alors $(u_n(x))$ ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n(x)$ diverge. Si $x > -2$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial (on étudie la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{x+2}}$, de dérivée $t \mapsto \dfrac{1-(1+2)\ln t}{t^{x+3}}$, pour vérifier la décroissance de $(|u_n(x)|)$ à partir d'un rang $n \geqslant e^{\frac{1}{x+2}}$). On a donc $\boxed{I_C =]-2, +\infty[\text{ et } \gamma = -2}$

2. a) On a $I_A \subset I_C$ donc $\boxed{\gamma \leqslant \delta}$

b) $u_n(x+1+\varepsilon) = u_n(x) \times \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ et comme $\sum u_n(x)$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$ et $u_n(x+1+\varepsilon) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, ce qui prouve que $\boxed{\sum u_n(x+1+\varepsilon) \text{ est absolument convergente}}$

On a prouvé $x \in I_C \Rightarrow 1+x+\varepsilon \in I_A$ donc $\delta \leqslant \gamma+1+\varepsilon$, ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\boxed{\delta \leqslant \gamma + 1}$

c) Avec l'exemple de **I.1**.a, on a $\gamma = \delta = -1$.

d) Avec l'exemple de **I.1**.b, on a $\delta = -1 = \gamma + 1$.

3. On a $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n^{x+1/2}} - \dfrac{1}{2n^{x+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{x+1}}\right)$.

On a donc $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{x+1/2}}$, positif, donc $\sum u_n(x)$ converge absolument si et seulement si $x + \dfrac{1}{2} > 1$; on a donc $I_A = \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ et $\boxed{\delta = \dfrac{1}{2}}$

On a $u_n(x) - \dfrac{(-1)^n}{n^{x+1/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{x+1}}$, négatif, donc si $x > 0$, $\sum \left[u_n(x) - \dfrac{(-1)^n}{n^{x+1/2}}\right]$ converge ; de plus $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{x+1/2}}$ converge, donc $\sum u_n(x)$ converge. Par contre, si $x \leqslant 0$, la série $\sum \left[u_n(x) - \dfrac{(-1)^n}{n^{x+1/2}}\right]$ diverge ; si $x > -\dfrac{1}{2}$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{x+1/2}}$ converge, donc $\sum u_n(x)$ diverge et si $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$, $(u_n(x))$ ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n(x)$ diverge. On déduit de tout cela $I_C =]0, +\infty[$ et $\boxed{\gamma = 0}$

Partie II

1. On a $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\ln(n+1))^x}$ donc $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(|u_n(x)|)$, ce qui donne $\boxed{I_A = \emptyset}$

Par contre, on vérifie, en étudiant la fonction $t \mapsto \sqrt{t}(\ln(t+1))^x$ que la suite $(|u_n(x)|)$ est décroissante à partir d'un certain rang (car $\dfrac{(\ln(1+t))^{x-1}}{2\sqrt{t}}\left[\ln(1+t) + \dfrac{2xt}{1+t}\right] \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc est positive au voisinage de $+\infty$), de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(x)| = 0$ donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n(x)$ converge pour tout réel x, ie $\boxed{I_C = \mathbb{R}}$

2. Il suffit de prendre $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lambda_n = \ln[\ln(n+1)]$ pour avoir $I_A = I_C = \emptyset$.

3. Comme $I_A \subset I_C$, il suffit de trouver un couple (a_n, λ_n) pour lequel $I_A = \mathbb{R}$: si $a_n = 2^{-n}$ et $\lambda_n = \ln(n)$, on a $u_n(x) = \dfrac{1}{2^n n^x} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $I_A = I_C = \mathbb{R}$.

Partie III

1. Comme (λ_n) est positive, on a $x < y \Rightarrow |u_n(y)| \leqslant |u_n(x)|$, donc si $x \in I_A$ alors $\sum |u_n(x)|$ converge puis, par majoration $\sum |u_n(y)|$ converge, ie $y \in I_A$. On en déduit que $\boxed{I_A \text{ est un intervalle non majoré}}$

2. Si $x > \gamma$, par définition de la borne inférieure, x ne minore pas I_C donc il existe $y \in I_C$ tel que $x > y > \gamma$. La série $\sum u_n(y)$ converge et on a $0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(y)$, puisque $a_n \geqslant 0$, donc $\boxed{\sum u_n(x) \text{ converge}}$

3. a) La fonction $u \mapsto f(u)e^{-\alpha u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $t \mapsto F(t)e^{(\alpha-x)t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus F admet une limite finie en $+\infty$ donc est bornée au voisinage de $+\infty$. On en déduit $F(t)e^{(\alpha-x)t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-(x-\alpha)t}\right)$ et comme $x-\alpha>0$, on a $\boxed{t \mapsto F(t)e^{(\alpha-x)t} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^+}$

b) Les fonctions F et $t \mapsto e^{(\alpha-x)t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\lambda_n]$ donc, par intégration par parties (sur un segment), on a $\displaystyle\int_0^{\lambda_n} f(t)e^{-\alpha t} \times e^{(\alpha-x)t}\,\mathrm{d}t = \left[F(t)e^{(\alpha-x)t}\right]_0^{\lambda_n} - (\alpha-x)\int_0^{\lambda_n} F(t)a^{(\alpha-x)t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x-\alpha)\int_0^{+\infty} F(t)e^{(x-\alpha)t}\,\mathrm{d}t$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. La suite $\boxed{\left(\displaystyle\int_0^{\lambda_n} f(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 1} \text{ est donc convergente}}$

4. a) On a $\varphi(t) = \begin{cases} 1-|t-1| & \text{si } t\in[0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) φ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$, $\lim\limits_{0^-}\varphi = \lim\limits_{0^+}\varphi = 0 = \varphi(0)$ et $\lim\limits_{2^-}\varphi = \lim\limits_{2^+}\varphi = 0 = \varphi(2)$ donc $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

φ est nulle hors de $[0,2]$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_0^2 (1-|t-1|)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (2-t)\,\mathrm{d}t = \boxed{1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi}$

5. a) Si $\varphi\left(\dfrac{t-\lambda_n}{r_n}\right) \neq 0$ alors $0 < \dfrac{t-\lambda_n}{r_n} < 2$ donc $\lambda_n < t < 2r_n + \lambda_n < \lambda_{n+1}$. La suite (λ_n) étant strictement croissante, il existe au plus un entier n tel que $t \in]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ donc $\boxed{\text{au plus un entier } n \text{ pour lequel } \varphi\left(\dfrac{t-\lambda_n}{r_n}\right) \neq 0}$

b) On déduit de la question précédente $g(t) = \dfrac{a_n}{r_n}\varphi\left(\dfrac{t-\lambda_n}{r_n}\right)$ sur $]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ et comme $\lim\limits_0 \varphi = 0$, $\lim\limits_{\lambda_n^+} g = 0 = g(\lambda_n)$ et $g=0$ sur $[2r_n+\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ donc $\lim\limits_{\lambda_{n+1}^-} g = 0 = g(\lambda_{n+1})$. On conclut que $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

c) On a $\displaystyle\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_p}{r_p}\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} \varphi\left(\frac{t-\lambda_p}{r_p}\right)\mathrm{d}t$; on pose $u = \dfrac{t-\lambda_p}{r_p}$, la fonction $u \mapsto \lambda_p + r_p u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{(\lambda_{p+1}-\lambda_p)r_p} \varphi(u) r_p\,\mathrm{d}u = r_p\int_{\mathbb{R}}\varphi$ car $(\lambda_{p+1}-\lambda_p)r_p > 2$ et $\varphi = 0$ hors de $[0,2]$. On a donc $\boxed{\displaystyle\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = a_p}$

6. Avec la propriété admise, $\sum u_n(x)$ et $\sum v_n(x)$ sont de même nature. De plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(x) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_{n+1}} g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u$, on a donc $\sum u_n(x)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^{\lambda_n} g(u)e^{-xu}\,\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 1}$ converge. Si $x>\gamma$, il existe $y \in I_C$ tel que $\sum u_n(y)$ converge donc $\left(\displaystyle\int_0^{\lambda_n} g(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 1}$ converge. D'après la question **III.3**, pour vérifier que $\sum u_n(x)$ converge, il suffit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u$ converge, on va donc chercher à prouver la convergence de cette intégrale : soit $t\in\mathbb{R}$, il existe n tel que $\lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1}$; on a alors

$$\int_0^t g(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\lambda_n} g(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u + \int_{\lambda_n}^t g(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u.$$

Comme quand t tend vers $+\infty$, λ_n tend vers $+\infty$, il suffit de prouver que $\displaystyle\int_{\lambda_n}^t g(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$: on utilise ce qui a été fait avant avec la suite $(|a_n|)$ à la place de (a_n) (tous les calculs faits sur g n'utilisaient rien de particulier sur la suite (a_n)) ; on a, en notant $\widetilde{g}$ la fonction (positive) construite avec $(|a_n|)$

$$\left|\int_{\lambda_n}^t g(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{\lambda_n}^t \widetilde{g}(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \widetilde{g}(u)e^{-yu}\,\mathrm{d}u \leqslant e^{-y\lambda_n}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \widetilde{g}(u)\,\mathrm{d}u = |u_n(y)|$$

Comme $y\in I_C$, la série $\sum u_n(y)$ converge donc la suite $(u_n(y))$ tend vers 0. On déduit donc de tout ceci que $\boxed{\sum u_n(x) \text{ converge}}$ On vient de justifier $]\gamma,+\infty[\subset I_C$ et comme $\gamma = \inf(I_C)$, $\boxed{I_C \text{ est un intervalle}}$

Problème II : (extrait de Centrale PSI 2013 maths 2)

Question préliminaire :

1. On a $1+\dfrac{z}{n}=\left(1+\dfrac{a}{n}\right)+\dfrac{b}{n}$ donc $\boxed{\left|1+\dfrac{z}{n}\right|=\sqrt{\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^2+\dfrac{b^2}{n^2}}}$ et pour n assez grand, $1+\dfrac{a}{n}>0$ donc un argument de $1+\dfrac{z}{n}$ est $\boxed{\theta_n=\arctan\left(\dfrac{b/n}{1+a/n}\right)}$

2. On a $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=\left[\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^2+\dfrac{b^2}{n^2}\right]^{n/2}e^{in\theta_n}$. Puis, comme $\lim\dfrac{b/n}{1+a/n}=0$, $\theta_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{b/n}{1+a/n}$ et $\lim n\theta_n=b$; enfin $\left[\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^2+\dfrac{b^2}{n^2}\right]^{n/2}\underset{+\infty}{=}\exp\left[\dfrac{n}{2}\ln\left(1+\dfrac{2a}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right]\underset{+\infty}{=}\exp\left[n\left(\dfrac{a}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^a$.
On en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^{(a+ib)}=e^z}$

Partie I :

1. On vérifie $\boxed{(A+I_3)(A-2I_3)=0}$
2. Si $\left(1+\dfrac{X}{n}\right)^n=(X+1)(X-2)Q+a_nX+b_n$ alors $\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=-a_n+b_n\\ \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n=2a_n+b_n\end{cases}$ donc le reste de la division euclidienne de $\left(1+\dfrac{X}{n}\right)^n$ par $(X+1)(X-2)$ est $\boxed{\dfrac{1}{3}\left[\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right]X+\dfrac{1}{3}\left[\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n+2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right]}$
3. $\left(I_3+\dfrac{1}{n}A\right)^n=a_nA+b_nI_3$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\dfrac{e^2-e^{-1}}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\dfrac{e^2+2e^{-1}}{3}$, donc $\boxed{E(A)=\dfrac{e^2-e^{-1}}{3}A+\dfrac{e^2+2e^{-1}}{3}I_3}$
Il suffit de choisir $Q=\dfrac{e^2-e^{-1}}{3}X+\dfrac{e^2+2e^{-1}}{3}$ pour que $Q(A)=E(A)$.

Partie II :

1. Si $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ alors $\left(I_p+\dfrac{1}{n}D\right)^n=\mathrm{diag}\left(\left(1+\dfrac{\lambda_1}{n}\right)^n,\dots,\left(1+\dfrac{\lambda_p}{n}\right)^n\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\boxed{\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_p}\right)=E(D)}$
Comme $E(D)$ est diagonale, on a $\det(E(D))=e^{\lambda_1}\times\cdots\times e^{\lambda_p}\neq0$ donc $\boxed{E(D)\text{ est inversible}}$
2. Si $P\in\mathbb{K}[X]$, on a $P(D)=\mathrm{diag}(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n))$ donc $P(D)=E(D)$ si et seulement si $\forall i\in[\![1,n]\!]\,,P(\lambda_i)=e^{\lambda_i}$.
Il suffit donc d'introduire $\mu_1,\dots,\mu_r$ les coefficients diagonaux de D deux à deux distincts (les λ_i ne le sont pas forcément) et $P\in\mathbb{K}_{r-1}[X]$ tel que $P(\mu_i)=e^{\mu_i}$ (interpolation de Lagrange) pour avoir $P(D)=E(D)$.
3. On a $E(D+D')=\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1+\lambda'_1},\dots,e^{\lambda_p+\lambda'_p}\right)$ donc $\boxed{E(D+D')=E(D)E(D')}$
4. a)
   - $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel
   - $PMP^{-1}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ donc $N_P(M)$ existe
   - $\|\ \|$ est une norme donc à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc N_P est aussi à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
   - Si $N_P(M)=0$ alors $PMP^{-1}=0$ car $\|\ \|$ est une norme puis $M=0$ car P est inversible
   - Comme $\|\ \|$ est une norme, $N_P(\lambda M)=\|P\lambda MP^{-1}\|=|\lambda|\times\|PMP^{-1}\|=|\lambda|\times N_P(M)$
   - De même, $N_P(M+M')=\|PMP^{-1}+PM'P^{-1}\|\leqslant\|PMP^{-1}\|+\|PM'P^{-1}\|=N_P(M)+N_P(M')$

   On en déduit que $\boxed{N_P\text{ est une norme sur }\mathcal{M}_p(\mathbb{K})}$

   b) On vérifie $N_P(D_k-\Delta)=\|PD_kP^{-1}-P\Delta P^{-1}\|$ donc (D_k) converge vers Δ pour la norme N_P si et seulement si (PD_kP^{-1}) converge vers $P\Delta P^{-1}$ pour la norme $\|\ \|$. Comme $M_p(\mathbb{K})$ est de dimension finie, les normes N_P et $\|\ \|$ sont équivalentes donc ces convergences équivalentes sont indépendantes de la norme utilisée.
5. En utilisant la question précédente, comme $\left(I_p+\dfrac{1}{n}A\right)=P\left(I_p+\dfrac{1}{n}D\right)^nP^{-1}$, on a $\boxed{E(A)=PE(D)P^{-1}}$
6. $E(A)$ et $E(D)$ sont semblables donc $\det(E(A))=\det(E(D))$, puis $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(D)=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i$, et $\boxed{\det(E(A))=e^{\mathrm{Tr}(A)}}$
7. On a $xI_p+A=P(xI_p+D)P^{-1}$ et xI_p+D est diagonale donc $E(xI_p+A)$ existe et $E(xI_p+A)=PE(xI_p+D)P^{-1}$ puis $E(xI_p+A)=PE(xI_p)E(D)P^{-1}=Pe^xI_pE(D)P^{-1}$ donc $\boxed{E(xI_p+A)=e^xE(A)}$

Partie III :

1. On a $A^{j-1}X=0\Rightarrow A^jX=A0=0$ donc $\boxed{\ker(A^{j-1})\subset\ker(A^j)}$ Supposons une égalité $\ker(A^{j-1})=\ker(A^j)$ pour $j\leqslant k$ et soit $X\in\ker(A^k)=\mathbb{K}^p$, on a $0=A^kX=A^j(A^{k-j}X)$ donc $A^{k-j}X\in\ker(A^j)=\ker(A^{j-1})$ donc $0=A^{j-1}(A^{k-j}X)=A^{k-1}X$. On aurait donc $\mathbb{K}^n=\ker(A^{k-1})$, ie $A^{k-1}=0$ ce qui est absurde.

2. On a, pour $j \leqslant k$, $\dim(\ker(A^j)) \geqslant 1+\dim(\ker(A^{j-1}))$ donc $\dim(\ker(A^j)) \geqslant j$ (par récurrence) ; pour $j = k$, comme $\ker(A^k) = \mathbb{K}^p$, on obtient $\boxed{k \leqslant p}$

3. I_p et A commutent donc $\left(I_p + \dfrac{1}{n}A\right)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}A^j$ donc, si $n \geqslant p$, $\left(I_p + \dfrac{1}{n}A\right)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}A^j$; il s'agit d'une somme finie de suites. On étudie la limite de chaque terme : $\dfrac{1}{n^j}\dbinom{n}{j} = \dfrac{1}{j!}\times\dfrac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n^j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{j!}$ car tous les termes du numérateur sont équivalents à n et il y en a un nombre fixé (donc c'est un produit de j équivalents). On en déduit $\boxed{E(A) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}A^j}$

4. $Q = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}X^j$ convient.

5. Comme $AB = BA$, pour $n \geqslant p$, on a $\left(I_p + \dfrac{1}{n}(A+B)\right)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}A^j \times \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-j}$. Il s'agit à nouveau d'une somme finie, le résultat admis par l'énoncé est aussi valable pour $i = 0$ puisque c'est la définition de $E(B)$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j}A^j \times \left(I_p + \frac{1}{n}B\right)^{n-j} = \frac{1}{j!}A^jE(B)$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}(A+B)\right)^n = \sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}A^jE(B) = E(A)E(B)$, c'est-à-dire $\boxed{E(A)E(B) = E(A+B)}$

6. A et xI_p commutent, $E(xI_p) = e^xI_p$ existe donc $E(xI_p + A) = E(xI_p)E(A)$ puis $\boxed{E(xI_p + A) = e^xE(A)}$

7. On remarque que $E(A) - I_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j!}A^j$ peut se factorier en $E(A) - I_p = AM$ avec $M \in \mathbb{K}[A]$ donc $AM = MA$. On alors $(E(A) - I_p)^k = A^kM^k = 0$ donc $\boxed{E(A) - I_p \text{ est nilpotente}}$

Partie IV :

1. Comme $P(A) = 0$, on a $P_n(A) = R_n(A)$.

2. On commence par vérifier que la famille $(J_q^i)_{0\leqslant i\leqslant q-1}$ est libre : on vérifie $J_q^q = 0$ et $J_q^{q-1} \neq 0$ (par calculs matriciels). Si $\displaystyle\sum_{i=0}^{q-1}\alpha_iJ_q^i = 0$ alors en multipliant par J_q^{q-1}, il reste $\alpha_0J_q^{q-1} = 0$ donc $\alpha_0 = 0$; on montre alors par récurrence que tous les α_i sont nuls en supposant $\alpha_0 = \dots = \alpha_i = 0$ et en multipliant la relation initiale par J_q^{q-i-2}, on trouve $\alpha_{i+1} = 0$ (déjà vu de nombreuses fois !).

Si $\displaystyle\sum_{i=0}\beta_i(xI_p+J_q)^i = 0$ alors $0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{i}\beta_i\binom{i}{j}x^{i-j}J_q^j = \sum_{j=0}^{q-1}\left(\sum_{i=j}^{q-1}\beta_i\binom{i}{j}x^{i-j}\right)J_q^j$ donc pour tout $j \in [\![0, q-1]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{i=j}^{q-1}\beta_i\binom{i}{j}x^{i-j} = 0$; il s'agit d'un système linéaire triangulaire supérieur (dont les inconnues sont les β_i) et dont les coefficients diagonaux valent 1. L'unique solution est alors $\beta_0 = \dots = \beta_{q-1} = 0$ donc $\boxed{\left((xI_p + J_q)^i\right)_{0\leqslant i\leqslant q-1} \text{ est libre}}$

3. Si $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}a_iB^i = 0$ alors $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}a_iX^i$ est annulateur de B donc de chaque bloc $(\lambda_iI_{n_i} + J_{n_i}) = B_i$. Comme $J_{n_i}^{n_i} = 0$, on a $(B_i - \lambda_iI_{n_i})^{n_i} = 0$; si on effectue la division euclidienne de Q par $(X-\lambda_i)^{n_i}$, $Q = Q_i(X-\lambda_i)^{n_i} + R_i$ avec $\deg(R_i) \leqslant n_i - 1$, alors on a $R_i(B_i) = 0$. La liberté des matrices $(B_i^j)_{0\leqslant j\leqslant n_i-1}$ impose alors $R_i = 0$. On vient donc de prouver que λ_i est une racine de Q de multiplicité $\geqslant n_i$. Ceci étant valable pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, Q est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{n_i} = P$. Comme $\deg(P) = p > \deg(Q)$, $Q = 0$ et tous les a_i sont nuls puis $\boxed{(B^i)_{0\leqslant i\leqslant p-1} \text{ est libre}}$

4. D'après **III.7**, en appliquant le résultat sur chaque bloc diagonal, on obtient $E(B) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}P_n(B)$ existe et $\boxed{E(B) = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}E(J_{n_1}), \dots, e^{\lambda_k}E(J_{n_k}))}$

La suite $(R_n(B))$ est donc une suite de $\mathbb{K}_{p-1}[B]$ convergente ; $(B^i)_{0\leqslant i\leqslant p-1}$ est une base de $\mathbb{K}_{p-1}[B]$ donc si on écrit $R_n(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}a_i(n)X^i$, la convergence de $R_n(B) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}a_i(n)B^i$ équivaut à la convergence des suites $(a_i(n))_{n\geqslant 1}$. Tous les coefficients de R_n convergent quand n tend vers $+\infty$ donc $\boxed{\text{la suite de polynômes } (R_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$

5. Comme $R_n(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}a_i(n)A^i$ et comme toutes les suites $(a_i(n))_{n\geqslant 1}$ convergent, $(R_n(A))$ converge et $\boxed{E(A) \text{ existe}}$