TD 08 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 08 novembre 2024**

8.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$, $N_1(M) = \sum_{j=1}^{n} \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j}|$ et $N_2(M) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} \left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \right)$.

a. Montrer que N_1 est une norme sur E. On admet que N_2 est aussi une norme sur E.

b. Déterminer les constantes optimales α et β telles que $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$.

8.2 *Normes p* Soit $(p, q) \in]1; +\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et x, y deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note bien sûr $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $y = (y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$.

a. Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab \leqslant \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q$.

b. En déduire que si $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant 1$.

c. En déduire l'inégalité de HÖLDER : $\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \times \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}$.

d. Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|x_k + y_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}$. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}$.

e. Prouver que $||\,.\,||_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

f. Justifier que $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_p \leqslant n^{1/p} ||x||_\infty$. Que vaut donc $\lim_{p \to +\infty} ||x||_p$?

g. Établir, si $1 \leqslant r < s$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $||x||_s \leqslant ||x||_r \leqslant n^{1/r - 1/s} ||x||_s$. Ces constantes sont-elles optimales ?

8.3 *Centrale PSI 2013* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la subdivision régulière $x_0 = 0 < x_1 = 1 < \cdots < x_n = n$ de $[0; n]$.
On définit aussi E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : [0; n] \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[0; n]$ et qui sont affines sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$.
On munit E_n des normes (admis) $||\,.\,||_\infty$ et $||\ ||_1$ telles que $||f||_\infty = \underset{x \in [0;n]}{\text{Sup}} |f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^n |f(x)| dx$.

a. Justifier que E_n est de dimension finie et en déterminer la dimension en fonction de n.

b. Justifier qu'il existe α_n, β_n optimales avec $\forall f \in E_n$, $\alpha_n ||f||_\infty \leqslant ||f||_1 \leqslant \beta_n ||f||_\infty$. Donner β_n.

c. Déterminer la valeur exacte de α_1 et justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

d. Pour $f \in E_n$, montrer que si $||f||_\infty = 1$ et $||f||_1 < \dfrac{1}{2}$ alors le maximum de f est atteint en 0 ou n.

En déduire, pour $n \geqslant 2$, que : $\alpha_n = 2\sqrt{\alpha_{n-1} + \dfrac{1}{2}} - 1 - \alpha_{n-1}$. Que vaut donc $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$?

8.4 Soit E l'espace formé des fonctions lipschitziennes $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ telles que $f(a) = 0$. Montrer que l'application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que $N(f) = \text{Inf}\left\{ k \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \forall (x, y) \in [a; b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \right\}$ est une norme sur E.
Indication : on pourra montrer que cette borne inférieure est en fait un minimum.

8.5 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice antisymétrique telle que $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Que peut-on dire de B ?

8.6 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2}$.

Indication : étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$, et étudier la fonction $f \circ f$.

8.7 *Mines PSI 2018* Titouan Sancier I

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*) \mid f \text{ bijective et } f' = f^{-1}\}$.

a. Trouver une fonction $f \in E$ de la forme $f : x \mapsto cx^\alpha$ où c et α sont réels.

b. Soit $f \in E$, donner la limite de f en 0. Prouver que f et f^{-1} sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $f \in E$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$.

8.8 *X PSI 2021* Clément Lopez II

a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

8.9 *X PSI 2021* Arthur Riché II

Soit $a \in \mathbb{C}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Trouver les valeurs de a telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Indication : traiter d'abord le cas réel.

8.10 *ENS Cachan PSI 2021* Titouan Nguyen

Pour une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, on pose $V(f) = \underset{n\geqslant 1}{\mathrm{Sup}}\left(\underset{0\leqslant t_0\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant 1}{\mathrm{Sup}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|f(t_k)-f(t_{k-1})\right|\right)\right)$. On note aussi $BV = \{f : [0;1] \to \mathbb{R} \mid V(f) < +\infty\}$. Pour une fonction $f \in BV$, on dit que f est à variations bornées.

a. Une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ lipschitzienne appartient-elle à BV ?

b. Une fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ monotone appartient-elle à BV ?

c. Donner un exemple de fonction continue $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f \notin BV$.

d. Soit $f \in BV$, la fonction f est-elle bornée ?

e. L'application $N : BV \to \mathbb{R}_+$ définie par $N(f) = |f(0)| + V(f)$ fait-elle de BV un espace vectoriel normé ?

f. Si $(f,g) \in BV^2$ a-t-on nécessairement $fg \in BV$?

g. Soit $(f,g) \in BV^2$ avec $g : [0;1] \to [0;1]$ monotone, montrer que $f \circ g \in BV$.

h. Soit $(f,g) \in BV^2$ avec $g : [0;1] \to [0;1]$, la condition f monotone implique-t-elle que $f \circ g \in BV$?

8.11 *CCINP PSI 2023* Olivier Farje I

Soit $E = \left\{f \in C^1\left([0;1], \mathbb{R}\right) \mid f(0) = 0\right\}$ et N_1, N_2 les deux applications définies sur E par $N_1(f) = ||f+f'||_\infty$ et $N_2(f) = ||f'||_\infty$ (les normes infinies sont calculées sur $[0;1]$).

a. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.

b. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.