

DEVOIR MAISON 4:MINES PSI 2015 MATHS1

PSI 1 2024/2025

pour le mardi 05 novembre 2024

PARTIE 1 : PRÉLIMINAIRES

1] Comme on connaît le développement en série entière de la fonction exponentielle, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$. Ainsi,

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c\lambda^n}{n!} = ce^\lambda$ et l'unique choix de $c \in \mathbb{R}$ qui permette $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{c\lambda^n}{n!} \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, c'est-à-dire $(\frac{c\lambda^n}{n!})_{n \geq 0} \in \mathcal{P}$, est le choix $\boxed{c = e^{-\lambda}}$.

2] On note tout d'abord que $P = (1 - p, p, 0, \dots)$ et $Q = (1 - q, q, 0, \dots)$ sont bien des éléments de \mathcal{P} car $(p, 1 - p, q, 1 - q) \in (\mathbb{R}_+)^4$ et $p + (1 - p) = q + (1 - q) = 1$. Ainsi, la quantité $\text{dist}(P, Q)$ est bien définie. Soit une partie A de \mathbb{N} . Distinguons les trois cas suivants :

- Si $A \cap \{0, 1\} = \emptyset$, alors $|P(A) - Q(A)| = |0 - 0| = 0$.
- Si $A \cap \{0, 1\} = \{0\}$ ou $A \cap \{0, 1\} = \{1\}$, alors $|P(A) - Q(A)| = |1 - p - (1 - q)| = |p - q|$.
- Si $A \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$, alors $|P(A) - Q(A)| = |1 - 1| = 0$.

Par conséquent, $\forall A \subset \mathbb{N}, |P(A) - Q(A)| \leq |p - q|$ et cette valeur est atteinte en prenant la partie $A = \{0\}$ par exemple. Ainsi, $\boxed{\text{dist}(P, Q) = \text{Max}_{A \subset \mathbb{N}} |P(A) - Q(A)| = |p - q|}$.

3] Pour $f \in \mathcal{F}$, on choisit de noter $\|f\|_\infty = \text{Sup}\{|f(n)| \mid n \in \mathbb{N}\}$ (qui existe puisque f est bornée). On a alors, pour $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}, |f(n)p_n| \leq \|f\|_\infty p_n$. Or la série $\sum_{n \geq 0} \|f\|_\infty p_n$ converge puisque $P \in \mathcal{P}$

donc, par comparaison, $\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)p_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

PARTIE 2 : CARACTÉRISATION

4] Soit $f \in \mathcal{F}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, |nf(n)p_n^{(\lambda)}| \leq ne^{-\lambda} \|f\|_\infty \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \|f\|_\infty \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ par définition de P_λ et puisque f est bornée. Comme la série exponentielle $\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ converge (sa somme est e^λ comme ci-dessus), par

comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 0} nf(n)p_n^{(\lambda)} \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$

5] Comme ci-dessus, puisque $nf(n)p_n^{(\lambda)} = 0$ pour $n = 0$ et que $nf(n)p_n^{(\lambda)} = (\lambda e^{-\lambda})f(n) \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=1}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=1}^{+\infty} nf(n)e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = (\lambda e^{-\lambda}) \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On effectue un changement d'indice ($k = n - 1$) dans la dernière somme pour obtenir, pour $f \in \mathcal{F}$, la relation

suivante : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k+1) \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} \quad (1)}$.

6 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f_k \in \mathcal{F}$ telle que $f_k(k) = 1$ et $\forall n \neq k, f_k(n) = 0$, c'est-à-dire $f_k = \mathbf{1}_{\{k\}}$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, f_k(n) = \delta_{k,n}$ (symbole de KRONECKER). En appliquant (1) à f_k pour $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $kq_k = \lambda q_{k-1}$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} n \delta_{k,n} p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{k,n+1} p_n^{(\lambda)}$. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, q_k = \frac{\lambda^k}{k!} q_0$.

- Initialisation : c'est immédiat pour $k = 0$ ($q_0 = q_0$).

- Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que $q_{k-1} = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} q_0$. Alors, $q_k = \frac{\lambda}{k} q_{k-1} = \frac{\lambda}{k} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} q_0 = \frac{\lambda^k}{k!} q_0$.

Par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, q_k = \frac{\lambda^k}{k!} q_0$. Puisque $Q \in \mathcal{P}, q_0 = e^{-\lambda}$ avec la question 1 : $Q = \mathcal{P}_\lambda$.

PARTIE 3 : RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE STEIN

7 Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On peut définir par récurrence une fonction $f_a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (c'est-à-dire une suite réelle) en posant $f_a(0) = a$ et, pour tout entier $n \geq 0, f_a(n+1) = \frac{1}{\lambda} (n f_a(n) + \tilde{h}(n))$ en exploitant la relation (2) ce qui prouve que $f_a \in \mathcal{S}_h$. Si $a \neq b, f_a \neq f_b$ car $f_a(0) = a \neq b = f_b(0)$: on a donc prouvé qu' il existe une infinité d'éléments de \mathcal{S}_h . Réciproquement, soit $f \in \mathcal{S}_h$, posons $a = f(0)$, alors puisque f et f_a vérifie la même relation de récurrence (2) et ont le même terme initial $f(0) = f_a(0) = a$, on montre facilement par récurrence que $f = f_a$. On a donc établi que $\mathcal{S}_h = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Soit $f \in \mathcal{S}_h$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$.

- Initialisation : pour $n = 1$, la relation (3) se résume à $\lambda f(1) = \tilde{h}(0)$ et elle est bien vérifiée puisque quand on prend $n = 0$ dans la relation (2), $\lambda f(1) = h(0) - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)} = \tilde{h}(0)$ par définition de \tilde{h} .

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$. La relation (2) donne alors $\lambda f(n+1) = n f(n) + \tilde{h}(n) = \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{n!}{\lambda^n} \tilde{h}(n) \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^n \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$, ce qui prouve, en divisant par λ , le résultat au rang $n+1$, à savoir $f(n+1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^n \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$.

Par principe de récurrence, on conclut que $\forall f \in \mathcal{S}_h, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$ (3).

8 Comme h est bornée, $h(k) = O(p_k^{(\lambda)})$ donc, par comparaison, $\sum_{k \geq 0} h(k) p_k^{(\lambda)}$ converge. On pose $\ell_h = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}$

donc, par définition de $\tilde{h}, \tilde{h}(n) = h(n) - \ell_h$. On a aussi $\ell_h = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!}$ par définition de \mathcal{P}_λ .

Ainsi, \tilde{h} étant bornée (somme d'une fonction bornée et d'une constante), $\sum_{k \geq 0} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$ converge et il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - \ell_h \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda \ell_h - \ell_h e^\lambda = 0.$$

Soit $f \in \mathcal{S}_h$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$ d'après la question 7. Or, d'après ce qui précède, on a aussi $\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} = - \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$. En reportant dans

l'expression de $f(n)$, on a bien $\forall f \in \mathcal{S}_h, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = - \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$ (4).

9 Si $f \in \mathcal{S}_n$, d'après la question précédente et comme \tilde{h} est bornée, la série $\sum_{k \geq n} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$ converge absolument (série exponentielle), donc $\forall n \geq 1$, $|f(n)| \leq \|\tilde{h}\|_\infty \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ par inégalité triangulaire. Le changement d'indice $j = k - n$ donne la nouvelle majoration $\forall n \geq 1$, $|f(n)| \leq \frac{\|\tilde{h}\|_\infty}{n} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{n! \lambda^j}{(j+n)!}$. En remarquant que $\frac{n!}{(j+n)!} = \frac{1}{(n+1) \dots (n+j)} \leq \frac{1}{(0+1) \dots (0+j)} = \frac{1}{j!}$, on en déduit que, comme $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^\lambda$, que

$$\forall n \geq 1, |f(n)| \leq \frac{\|\tilde{h}\|_\infty}{n} e^\lambda \leq \|\tilde{h}\|_\infty e^\lambda.$$

Ainsi, f est bornée avec la borne effective $\|f\|_\infty \leq \text{Max}(|f(0)|, \|\tilde{h}\|_\infty e^\lambda)$. On a même $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$.

PARTIE 4 : PROPRIÉTÉ DE LIPSCHITZ

10 Comme à la question 8, $\ell_h = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}$. Or $\ell_h = p_m^{(\lambda)} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$ car $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$, d'où $\tilde{h}(k) = h(k) - p_m^{(\lambda)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En reprenant la formule (3), il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$.

Si $n \leq m$, la première somme ci-dessus est nulle donc $\forall n \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $f_m(n) = -\frac{(n-1)! p_m^{(\lambda)}}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$.

11 En utilisant cette fois-ci la relation (4), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$. Si

$n > m$, tous les termes de la première somme sont nuls et ainsi $\forall n > m$, $f_m(n) = \frac{(n-1)! p_m^{(\lambda)}}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On en déduit immédiatement avec la question 10 que $\forall n \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $f_m(n) \leq 0$ et $\forall n \geq m+1$, $f_m(n) \geq 0$.

12 Par définition, on a $\Delta f_m(n) = f_m(n+1) - f_m(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :

- Si $n \in \llbracket 1; m-1 \rrbracket$, avec la formule de la question 10 pour $f_m(n+1)$ et $f_m(n)$ car $n \leq m$ et $n+1 \leq m$, on a $\Delta f_m(n) = -\frac{n! p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(n-1)! p_m^{(\lambda)}}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{(n-1)! p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{n+1}} \left[(\lambda - n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right) - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \right]$.

Pour montrer que cette quantité est négative, on montre que le crochet est négatif, c'est-à-dire aussi que

$$\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!},$$

ce qui revient à dire (changement d'indice à gauche et regroupement des termes à droite) que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \leq n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Nous montrons maintenant que cette inégalité a bien lieu en remarquant que $\frac{n}{k!} \geq \frac{1}{(k-1)!}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et que donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \leq n \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{k!} \leq n \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Si $n > m$, on utilise cette fois la formule de la question 11 pour les deux termes $f_m(n+1)$ et $f_m(n)$ car $n > m$ et $n+1 > m$ et on obtient $\Delta f_m(n) = \frac{(n-1)! p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{n+1}} \left[(n-\lambda) \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) - \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \right]$. Pour

montrer que cette quantité est négative, il suffit de montrer que le crochet est négatif, c'est-à-dire

$$\text{aussi que } n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}.$$

Ceci est vrai car $\frac{n}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)!}$ quand $k \geq n$.

On a finalement prouvé que $\forall n \notin \{0, m\}$, $\Delta f_m(n) \leq 0$.

13 Par définition, $\Delta f_0(0) = f_0(1) - f_0(0)$. Or, comme $1 \in \mathbb{N}^*$, $f_0(1)$ s'obtient avec la question 11 et vaut

$$\frac{0!p_0^{(\lambda)}}{\lambda^1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1). \text{ Ainsi, } \boxed{\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - f_0(0)} \text{ (erreur d'énoncé dans l'énoncé original).}$$

Pour $m > 0$, $\Delta f_m(m) = f_m(m+1) - f_m(m)$. D'après la question 11, $f_m(m+1) = \frac{m!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{m+1}} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ et d'après

la question 10, $f_m(m) = -\frac{(m-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!}$ d'où $\Delta f_m(m) = \frac{m!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{m+1}} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(m-1)!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Comme $\frac{m!p_m^{(\lambda)}}{\lambda^{m+1}} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$, ceci donne $\Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$. Il suffit de faire rentrer $\frac{\lambda}{m}$

et de changer d'indice pour conclure que
$$\boxed{\Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^m \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right)} \text{ avec } m > 0.$$

14 Comme la seconde relation de la question précédente ne vaut que si $m > 0$, on distingue deux cas :

- Si $m = 0$, la question 12 montre que Δf_m est négative sur $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^*$: $\text{Sup}_{n \geq 1} \Delta f_0(n) \leq 0 \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$.
- Si $m > 0$, les questions 12 et 13 montrent que $\text{Sup}_{n \geq 1} \Delta f_m(n) = \Delta f_m(m)$ car si $n \neq m$, $\Delta f_m(n) \leq 0$ et $\Delta f_m(m) > 0$. Or, en majorant $\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $\frac{k}{m} \leq 1$ ci-dessus, on majore avec la question 13,

$$\Delta f_m(m) \leq \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Ainsi, que m soit nul ou strictement positif, on a
$$\boxed{\text{Sup}_{n \geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}}.$$

15 Soit $c \in \mathbb{R}$ et $g = h + c$ de sorte que $g \in \mathcal{F}$ car g est aussi bornée. On a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$\tilde{g}(n) = g(n) - \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)p_k^{(\lambda)} = (h(n) + c) - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)} - c \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(\lambda)}, \text{ ce qui montre, comme } \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(\lambda)} = 1, \text{ que}$$

$\tilde{g}(n) = h(n) + c - c - \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)p_k^{(\lambda)} = \tilde{h}(n)$. D'après ce qui précède et les formules (3), les valeurs sur \mathbb{N}^* des éléments de \mathcal{S}_h et de \mathcal{S}_g sont égales. Comme les valeurs en 0 ne changent pas l'appartenance à \mathcal{S}_h ou à \mathcal{S}_g , ces deux ensembles sont donc égaux. En prenant $c = -\text{Inf}_{k \in \mathbb{N}} h(k)$ qui existe car h est bornée,
$$\boxed{\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h+}}$$
.

16 Soit $n \geq 1$ fixé. Avec la question 10, dès que $m \geq n$, on a $f_m(n) = A_n p_m^{(\lambda)}$ en notant $A_n = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$ (qui ne dépend bien que de n). Comme la fonction h_+ est bornée, on a $h_+(m)f_m(n) = O(p_m^{(\lambda)})$ et, comme

la série $\sum_{m \geq 0} p_m^{(\lambda)}$ converge, par théorème de comparaison,
$$\boxed{\text{la série } \sum_{m \geq 0} h_+(m)f_m(n) \text{ est convergente.}}$$

17 Comme $\sum_{m \geq 0} h_+(m)f_m(n)$ converge d'après la question 16, $f(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)f_m(n)$ permet de définir une

fonction f de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , sous-entendu que $f(0)$ est quelconque. Par linéarité sur les séries convergentes, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lambda f(n+1) - n f(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)(\lambda f_m(n+1) - n f_m(n))$. Or $\lambda f_m(m+1) - n f_m(m) = 1 - p_m^{(\lambda)}$ et

$\lambda f_m(n+1) - n f_m(n) = -p_m^{(\lambda)}$ si $n \neq m$ car $f_m \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$. Ainsi, $\lambda f(n+1) - n f(n) = h_+(n) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)p_m^{(\lambda)}$,

ce qui signifie exactement que
$$\boxed{f \text{ appartient à l'ensemble } \mathcal{S}_{h_+} \text{ qui est égal à } \mathcal{S}_h} \text{ d'après la question 15.}$$

18 Toutes les fonctions de \mathcal{S}_h prennent les mêmes valeurs sur \mathbb{N}^* d'après la relation (3) de la question 7. Comme on vient de trouver un élément de \mathcal{S}_h , on peut dire que pour tout élément de \mathcal{S}_h , on a

$$\forall n \geq 1, f(n+1) - f(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)(f_m(n+1) - f_m(n)) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)\Delta f_m(n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme h_+ est à valeurs positives et que $\Delta f_m(n)$ est négatif pour tout $m \neq n$ d'après la question 12 et que $\Delta f_n(n) > 0$ d'après la question 13, $f(n+1) - f(n) \leq h_+(n)\Delta f_n(n)$. D'après la question 14, $\Delta f_n(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$ ce qui, comme h_+ est à valeurs positives, montre que $f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}h_+(n)$. Enfin, toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $h_+(n) = h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k)$ et on peut multiplier par

$$\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \geq 0 \text{ pour conclure que } \boxed{\forall n \geq 1, f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right)}.$$

PARTIE 5 : APPLICATION PROBABILISTE

19 Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\omega \in \Omega$ (l'univers sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires). Puisque X_k suit une loi de BERNOULLI, distinguons deux cas selon la valeur de $X_k(\omega)$:

- Si $X_k(\omega) = 0$, alors $X_k(\omega)f(S)(\omega) = X_k(\omega)f(S(\omega)) = X_k(\omega)f(W_k+1)(\omega) = X_k(\omega)f(W_k(\omega)+1) = 0$.
- Si $X_k(\omega) = 1$, comme dans ce cas on a la relation $S(\omega) = W_k(\omega) + X_k(\omega) = W_k(\omega) + 1$, il vient à nouveau $X_k(\omega)f(S)(\omega) = X_k(\omega)f(S(\omega)) = X_k(\omega)f(W_k+1)(\omega) = X_k(\omega)f(W_k(\omega)+1) = f(S(\omega))$.

Ainsi, $\forall \omega \in \Omega$, $X_k(\omega)f(S)(\omega) = X_k(\omega)f(W_k+1)(\omega)$, donc $\boxed{X_k f(S) = X_k f(W_k+1)}$ (égalité de fonctions).

Comme les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes mutuellement, toute fonction des variables aléatoires de la famille $(X_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}}$ est indépendante de X_k (lemme des coalitions). C'est en particulier le cas de X_k et de $f(W_k) = f\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n X_i\right)$. Puisque l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes est le produit de leur deux espérances et que l'espérance d'une variable aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre p vaut p , on a bien $\boxed{\mathbb{E}(f(W_k)X_k) = \mathbb{E}(f(W_k))\mathbb{E}(X_k) = r_k \mathbb{E}(f(W_k))}$.

20 Comme $\lambda = \sum_{k=1}^n r_k$ et $S = \sum_{k=1}^n X_k$, $\lambda f(S+1) - S f(S) = \sum_{k=1}^n (r_k f(S+1) - X_k f(S))$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - S f(S)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(r_k f(S+1) - X_k f(S)) = \sum_{k=1}^n (r_k \mathbb{E}(f(S+1)) - \mathbb{E}(X_k f(S))).$$

Or, d'après la question 19, comme on a encore X_k et $f(W_k+1)$ indépendantes avec le lemme des coalitions, on trouve $r_k \mathbb{E}(f(W_k+1)) = \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(f(W_k+1)) = \mathbb{E}(X_k f(W_k+1)) = \mathbb{E}(X_k f(S))$. On injecte ceci dans la relation précédente pour avoir, toujours par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - S f(S)) = \sum_{k=1}^n (r_k \mathbb{E}(f(S+1)) - r_k \mathbb{E}(f(W_k+1))) = \sum_{k=1}^n r_k (\mathbb{E}(f(S+1)) - \mathbb{E}(f(W_k+1))).$$

Comme à la question 19, on montre que $f(S+1) - f(W_k+1)$ et $X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))$ sont égales :

- Si $X_k(\omega) = 0$, $S(\omega) = W_k(\omega)$ donc $f(S(\omega)+1) - f(W_k(\omega)+1) = X_k(\omega)(f(W_k(\omega)+2) - f(W_k(\omega)+1)) = 0$.

- Si $X_k(\omega) = 1$, comme dans ce cas on a la relation $S(\omega) = W_k(\omega) + X_k(\omega) = W_k(\omega) + 1$, il vient $f(S(\omega) + 1) - f(W_k(\omega) + 1) = f(W_k(\omega) + 2) - f(W_k(\omega) + 1) = X_k(\omega)(f(W_k(\omega) + 2) - f(W_k(\omega) + 1))$.

Ainsi, pour $(h, f) \in \mathcal{F}^2$, la relation $\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - S f(S)) = \sum_{k=1}^n r_k \mathbb{E}(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1)))$.

Remarque : l'hypothèse $f \in \mathcal{S}_h$ ne sert à rien, seule l'hypothèse $f \in \mathcal{F}$ de la question 19 est utile.

21 Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $f_A \in \mathcal{S}_{1_A}$, par la relation (2), on a $\forall j \in \mathbb{N}$, $\lambda f_A(j+1) - j f_A(j) = \mathbf{1}_A(j) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)}$.

Par ailleurs, par la formule de transfert, on a $\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)) = \sum_{j=0}^n (\lambda f_A(j+1) - j f_A(j)) \mathbb{P}(S=j)$.

Combinons les deux dernières formules pour obtenir

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)) = \sum_{j=0}^n \mathbf{1}_A(j) \mathbb{P}(S=j) - \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)} \mathbb{P}(S=j) \right)$$

Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)}$ est une constante relativement à j , on obtient

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)) = \sum_{j \in A} \mathbb{P}(S=j) - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(k) p_k^{(\lambda)} \right) \left(\sum_{j=0}^n \mathbb{P}(S=j) \right) = \sum_{j \in A} \mathbb{P}(S=j) - \sum_{k \in A} p_k^{(\lambda)}$$

car $\sum_{j=0}^n \mathbb{P}(S=j) = 1$ puisque S est à valeurs dans $[[0; n]]$. Avec les notations de l'énoncé, cela donne la relation

simplifiée $\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)) = \text{loi}(S)(A) - P_\lambda(A)$, et ceci indépendamment de la fonction f_A choisie dans \mathcal{S}_{1_A} .

Si on revient à la définition de la distance définie par l'énoncé, on obtient donc la formule souhaitée, c'est-à-dire $\text{dist}(\text{loi}(S), P_\lambda) = \sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S))|$ où f_A est un élément de \mathcal{S}_{1_A} .

22 Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $f_A \in \mathcal{S}_{1_A}$ de sorte que $f_A \in \mathcal{F}$. Par indépendance de X_k et W_k pour $k \in [[1; n]]$, on a

$\mathbb{E}(X_k(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1))) = r_k (\mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(f_A(W_k+2)) - \mathbb{E}(X_k) \mathbb{E}(f_A(W_k+1)))$ et, comme $\mathbb{E}(X_k) = r_k$, $\mathbb{E}(X_k(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1))) = r_k^2 (\mathbb{E}(f_A(W_k+2)) - \mathbb{E}(f_A(W_k+1)))$, et avec la question 20

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)) = \sum_{k=1}^n r_k^2 \mathbb{E}(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1)).$$

Avec la formule (5) et car $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(k) \leq 1$ car $h = \mathbf{1}_A$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, on a

$|f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$. Il reste à combiner le tout pour conclure que

$$|\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S))| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^n r_k^2,$$

et comme le majorant est indépendant de A , la question 21 donne enfin

$$\text{dist}(\text{loi}(S), P_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^n r_k^2.$$

On retrouve la loi des événements rares ; en effet, si $\forall k \in [[1; n]]$, $r_k = \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda > 0$, alors on a bien $\lambda = \sum_{k=1}^n r_k$ et S suit une loi binomiale de paramètres $n, \frac{\lambda}{n}$. L'inégalité précédente, appelée inégalité de LE CAM, montre

que $\text{dist}(\text{loi}(S), P_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \frac{\lambda^2}{n} = \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda})}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(\text{loi}(S), P_\lambda) = 0$.