DEVOIR MAISON 5 : DUHAMEL-RAABE

PSI 1 2024/2025 **pour le jeudi 07 novembre 2024**

PARTIE 1 : LA RÈGLE DE DUHAMEL-RAABE

1 Si $\lambda < 0$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$ d'après l'énoncé donc, comme $-\frac{\lambda}{n} > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ est positif à partir d'un certain rang ce qui prouve l'existence d'un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$. Ainsi, $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$ ce qui interdit la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0. La série $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ diverge grossièrement.}}$

2 Comme $\forall n \geqslant 1,\ v_n = \frac{1}{n^\beta}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $(1+x)^{-\beta} \underset{0}{=} 1 - \beta x + o(x)$.

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{=} \frac{\beta-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{=} \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \mu = \beta - \lambda.}$

3.1 Comme $\beta - \lambda < 0$, d'après la question 2, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\beta-\lambda}{n} < 0$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est négatif pour n assez grand ce qui montre l'existence d'un entier naturel N tel que $\boxed{\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.}$

3.2 Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ n'ont que des termes strictement positifs, on a $\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$ d'après la question 3.1 donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ est décroissante d'où $\forall n \geqslant N,\ \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_N}{v_N} = K$. Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant K v_n.}$

3.3 Comme la série de RIEMANN $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge (car $\beta > 1$), il en est de même de $\sum_{n\geqslant 1} (K v_n)$ par opérations. Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant K v_n$, la série $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}}$

4 Si $\lambda \in [0;1[$, prenons $\beta = 1$, alors $\beta - \lambda = 1 - \lambda > 0$ donc, d'après la question 2, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-\lambda}{n} > 0$. Comme avant, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ce qui implique $\forall n \geqslant N,\ \frac{u_n}{v_n} \geqslant \frac{u_N}{v_N} = K$ d'où $u_n \geqslant K v_n$. Comme $K = n u_N > 0$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ diverge (série harmonique), la série $\sum_{n\geqslant 1} (K v_n)$ diverge aussi. Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ diverge.}}$

PARTIE 2 : APPLICATIONS

1 $\sum_{n\geqslant 2} x_n$ est une série de RIEMANN divergente (harmonique) et $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n}{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Une comparaison série-intégrale donne (grâce à la décroissance de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^2}$ sur $]1; +\infty[$) :
$\forall k \geqslant 3,\ y_k = f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$ donc, en sommant, on parvient par la relation de CHASLES à la majoration $\forall n \geqslant 3,\ \sum_{k=3}^{n} y_k \leqslant \int_2^n \dfrac{dt}{t\ln(t)^2} = \left[-\dfrac{1}{\ln(t)}\right]_2^n = \dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{1}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 2} y_n$ est convergente ($y_n \geqslant 0$ donc les sommes partielles forment une suite croissante et majorée donc convergente). De plus

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln(1+(1/n))}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+(1/n))}{\ln(n)} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o\Big(\frac{1}{n\ln(n)}\Big) \underset{+\infty}{=} 1 + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

ce qui permet de simplifier

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n}{n+1} \times \frac{\ln^2(n)}{\ln^2(n+1)} \underset{+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) \times \left(1 + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^{-2} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} x_n \text{ diverge et } \sum_{n\geqslant 2} y_n \text{ converge alors que } \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \underset{+\infty}{=} \dfrac{y_{n+1}}{y_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big).}$ On peut ainsi être dans le cas $\lambda = 1$ avec convergence ou divergence de la série correspondante (les termes x_n et y_n sont bien strictement positifs dès que $n \geqslant 2$) : le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de DUHAMEL-RAABE.

2 Pour $n \geqslant 2$, par télescopage multiplicatif, on a $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Ainsi, comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et qu'on connaît le développement limité $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, on trouve $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{6n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Comme $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est à termes strictement positifs car $\forall k \geqslant 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, on est dans le cas précédent avec $\lambda = \dfrac{1}{6} < 1$ donc, d'après la question 3.3 de la partie 1, $\boxed{\sum_{n\geqslant 2} w_n \text{ diverge.}}$

3.1 Pour $n \geqslant 1$, $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(t^4+1)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\dfrac{1}{(t^4+1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{4n}}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN ($4n \geqslant 4 > 1$). Par conséquent, $\boxed{I_n = \int_0^{+\infty} f_n \text{ existe pour } n \geqslant 1.}$

3.2 Pour $n \geqslant 1$, on pose $u : t \mapsto f_n$ et $v : t \mapsto t$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{t}{(t^4+1)^n} = 0$. Ainsi, par intégration par parties, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^{+\infty} + 4n\int_0^{+\infty} \frac{t^4dt}{(1+t^4)^{n+1}} = 4n\Big(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}}\Big)$$

en écrivant $t^4 = (t^4+1) - 1$ et par linéarité de l'intégrale (tout converge) donc $\boxed{I_n = 4n(I_n - I_{n+1}).}$

3.3 D'après la question précédente, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{4n} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{4n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Comme $\sum_{n\geqslant 1} I_n$ est une séries à termes strictement positifs, on conclut avec la question 3.3 de la partie 1 (ici $\lambda = \dfrac{1}{4} < 1$) que $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} I_n \text{ diverge.}}$