DEVOIR MAISON 6 : NORMES

PSI 1 2024/2025 **pour le mardi 19 novembre 2024**

On note E *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions continues de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *:* $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$*.*

Soit $(\alpha, \alpha') \in [0;1]^2$*, pour une fonction* $f \in E$*, on pose* $N_{\alpha,\alpha'}(f) = \underset{x\in[\alpha;1]}{\operatorname{Sup}} |f(x)| + \int_0^{\alpha'} |f(x)|dx$*.*

1 Norme ou pas norme *: soit* $(\alpha, \alpha') \in [0;1]^2$

1.1 Pour $f \in E$, montrer que $N_{\alpha,\alpha'}(f)$ est bien défini et positif.

1.2 Montrer que : $\big(N_{\alpha,\alpha'} \text{ est une norme}\big) \iff \big(\alpha \leqslant \alpha'\big)$.

2 Premier cas *: soit trois réels* α, α', α'' *tels que* $0 \leqslant \alpha < \alpha' < \alpha'' \leqslant 1$

2.1 Montrer que pour $f \in E$, on a : $N_{\alpha,\alpha'}(f) \leqslant N_{\alpha,\alpha''}(f) \leqslant (1 + \alpha'' - \alpha')N_{\alpha,\alpha'}(f)$.

Que peut-on en conclure quant aux normes $N_{\alpha,\alpha'}$ et $N_{\alpha,\alpha''}$?

2.2 Justifier qu'on a toujours : $\forall f \in E,\ N_{\alpha',\alpha''}(f) \leqslant N_{\alpha,\alpha''}(f)$.

On considère, pour n *assez grand (c'est-à-dire* $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\alpha'-\alpha}{2}$*), la fonction* $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ *affine par morceaux (affine sur les intervalles* $\left[0; \dfrac{\alpha'+\alpha}{2} - \dfrac{1}{n}\right]$, $\left[\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} - \dfrac{1}{n}; \dfrac{\alpha'+\alpha}{2}\right]$, $\left[\dfrac{\alpha'+\alpha}{2}; \dfrac{\alpha'+\alpha}{2} + \dfrac{1}{n}\right]$ *et* $\left[\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} + \dfrac{1}{n}; 1\right]$*) et qui vérifie* $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} - \dfrac{1}{n}\right) = 0$, $f\left(\dfrac{\alpha'+\alpha}{2}\right) = 1$, $f\left(\dfrac{\alpha'+\alpha}{2} + \dfrac{1}{n}\right) = 0$ *et* $f(1) = 0$.

2.3 Tracer (rapidement) l'allure du graphe de la fonction f_n (n quelconque).

Que vaut la fonction f_n sur l'intervalle $[0;\alpha]$? Que vaut-elle sur $[\alpha';1]$?

Calculer $N_{\alpha,\alpha''}(f_n)$ et $N_{\alpha',\alpha''}(f_n)$ et en déduire que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

3 Second cas *: soit* $(\alpha, \beta) \in [0;1]^2$ *avec* $\alpha < \beta$*, on veut "comparer" les normes* $N_{\alpha,\alpha}$ *(noté dorénavant* N_α*) et* $N_{\beta,\beta}$ *(noté bien sûr aussi* N_β *dans la suite)*

3.1 Prouver que $\forall f \in E,\ N_\beta(f) \leqslant (1 + \beta - \alpha)N_\alpha(f)$.

3.2 Montrer que la constante $1 + \beta - \alpha$ de la question 3.1 est optimale ; c'est-à-dire que pour un réel positif k, on a : $\big(\forall f \in E,\ N_\beta(f) \leqslant kN_\alpha(f)\big) \Longrightarrow k \geqslant 1 + \beta - \alpha$.

3.3 Les deux normes N_α et N_β sont-elles équivalentes ?