DEVOIR 09 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PSI 1 2024-2025 **mardi 12 novembre 2024**

QCM

1 *Normes : exemples et contre-exemples dans* $\mathbb{R}^3$*, l'application* N *qui à un vecteur* $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *associe ..... est-elle une norme dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

1.1 $N(v) = x^2 + (x+y)^2 + (x+y+z)^2$

1.2 $N(v) = \mathrm{Max}(|x+y|, |y+z|, |x+z|)$

1.3 $N(v) = |x| + |y+z| + |x+y+z|$

1.4 $N(v) = |x+z| + |y-z|$

2 *Normes : soit* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels,* $u : E \to F$ *linéaire,* N *et* N' *deux normes sur* F *et* $\lambda > 0$

2.1 $N + N'$ est une norme sur F

2.2 $N \times N'$ est une norme sur F

2.3 $x \mapsto N\big(u(x)\big)$ est une norme sur E

2.4 λN est une norme sur F

3 *Équivalence des normes : soit* E *un espace vectoriel muni de deux normes* N_1 *et* N_2 *telles que* $N_1 \leqslant N_2$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs non nuls de* E *et* $\ell \in E$

3.1 si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme N_2 alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme N_1

3.2 si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)} = +\infty$, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes

3.3 si E de dimension finie alors $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in E,\ N_2(x) \leqslant \alpha N_1(x)$

3.4 si E est quelconque alors $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in E,\ N_2(x) \leqslant \alpha N_1(x)$

4 *Suites : soit* $E = \mathbb{R}^3$ *normé par* $||\,.\,||_\infty$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes de vecteurs de* E *dont les limites sont respectivement* $\ell \in E$ *et* $\ell' \in E$*, soit aussi* $\lambda \in \mathbb{K}$ *; on note* $u_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$

4.1 la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$

4.2 la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$

4.3 la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$

4.4 les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent

Définition Donner la définition d'une norme N sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Vous définirez l'application et vous donnerez ses propriétés avec les quantificateurs.

Preuve Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose, si $f \in E$, $||f||_\infty = \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{x\in[0;1]} |f(x)| = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ (qui existe car $|f|$ est continue sur un segment).
Montrer l'homogénéité de $||\,.\,||_\infty$; c'est-à-dire que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in E,\ ||\lambda f||_\infty = |\lambda|\,||f||_\infty$.

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $N : E \to \mathbb{R}_+$ par $\forall P \in E,\ N(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} |P(k)|$.
Montrer que N est une norme sur E. Est-ce une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ qu'on munit des deux normes (c'est admis ici et classique) N_∞ et $||\,.\,||_\infty$ définies par : $\forall P = aX^2 + bX + c \in E,\ N_\infty(P) = \mathrm{Max}(|a|, |b|, |c|)$ et $||P||_\infty = \mathop{\mathrm{Max}}\limits_{t\in[-1;1]} |P(t)|$.
Déterminer la constante β optimale (la plus petite possible) telle que $\forall P \in E,\ ||P||_\infty \leqslant \beta N_\infty(P)$.
En évaluant P (sous la forme ci-dessus) en $-1, 0, 1$: $a = \dfrac{P(1) + P(-1) - 2P(0)}{2}$, $b = \dfrac{P(1) - P(-1)}{2}$ et $c = P(0)$.
En déduire une constante α telle que $\forall P \in E,\ N_\infty(P) \leqslant \alpha ||P||_\infty$. Est-elle optimale (la plus petite possible) ?

DEVOIR 09 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 09	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X			
2	X			X	
3	X		X		
4		X	X	X	

1.1 Faux : les carrés empêchent l'homogénéité **1.2** Vrai : $x+y=y+z=x+z=0 \Longrightarrow x=y=z=0$ et les 3 propriétés sont assez simples à vérifier **1.3** Faux : la séparation n'est pas vérifiée car $x=y+z=x+y+z$ peut se faire avec $x=0$, $y=1$ et $z=-1$ **1.4** Faux : même chose $N(1,-1,-1)=0$.
2.1 Vrai : on vérifie les 3 propriétés **2.2** Faux : l'homogénéité n'est plus valable **2.3** Faux : ça ne marche que si u est injective sinon on n'a plus la séparation **2.4** Vrai : clair.
3.1 Vrai : si $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ N_2(u_n - \ell) \leqslant \varepsilon$, alors $\forall n \geqslant n_0,\ N_1(u_n-\ell) \leqslant N_2(u_n-\ell) \leqslant \varepsilon$
3.2 Faux : cette limite empêche N_1 de dominer N_2 **3.3** Vrai : toutes les normes sont équivalentes en dimension finie **3.4** Faux : mais c'est faux en dimension quelconque.
4.1 Faux : on ne peut pas multiplier des vecteurs dans cet espace **4.2** Vrai : du cours **4.3** Vrai : du cours **4.4** Vrai : la convergence d'une suite de vecteurs est équivalente en dimension finie à la convergence de toutes ses suites coordonnées dans une base quelconque.

Définition Une norme sur ce $\mathbb{K}$-espace E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :

(C_1) $\forall x \in E,\ N(x)=0 \Longrightarrow x=0_E$ (axiome de séparation),

(C_2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x)$ (homogénéité),

(C_3) $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x)+N(y)$ (inégalité triangulaire).

Preuve Soit $f \in E$. D'abord, si $\lambda = 0$, $||0.f||_\infty = 0 = |0|\,||f||_\infty$. Soit maintenant $\lambda \neq 0$.

• Preuve 1 : c'est un maximum, $\exists x_0 \in [0;1]$, $||f||_\infty = |f(x_0)|$. Ainsi $\forall x \in [0;1]$, $|(\lambda f)(x)| = |\lambda||f(x)| \leqslant |\lambda||f(x_0)|$. Or $|\lambda||f(x_0)|$ est une valeur prise par la fonction $|\lambda f|$, ainsi $||\lambda f||_\infty = |\lambda||f(x_0)| = |\lambda|||f||_\infty$.

• Preuve 2 : Pour $x \in [0;1]$, $|(\lambda f)(x)| = |\lambda||f(x)| \leqslant |\lambda||f(x_0)|$ (un majorant de $|\lambda f|$) donc $||\lambda f||_\infty \leqslant |\lambda|\,||f||_\infty$. On applique ceci à $\dfrac{1}{\lambda}$ et (λf) donc $\left|\left|\dfrac{1}{\lambda}(\lambda f)\right|\right|_\infty \leqslant \left|\dfrac{1}{\lambda}\right| ||\lambda f||_\infty$. Par antisymétrie de $\leqslant$, on a bien $||\lambda f||_\infty = |\lambda|||f||_\infty$.

Exercice 1 Soit P et Q deux polynômes de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Séparation</u> : si $N(P)=0$, $\forall k \in [\![0;n]\!],\ |P(k)|=0$ et P a $n+1$ racines distinctes donc $P=0$ car $\deg(P) \leqslant n$.
<u>Homogénéité</u> : $N(\lambda P) = \sum\limits_{k=0}^{n} |(\lambda P)(k)| = \sum\limits_{k=0}^{n} |\lambda||P(k)| = |\lambda| \sum\limits_{k=0}^{n} |P(k)| = |\lambda| N(P)$.
<u>Inégalité triangulaire</u> : $N(P+Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} |(P+Q)(k)| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} (|P(k)|+|Q(k)|) = N(P)+N(Q)$.
Au final : N est bien une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$. Pas sur $\mathbb{R}[X]$ car $N(P)=0$ avec $P = \prod\limits_{k=0}^{n}(X-k) \neq 0 \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 Par inégalité triangulaire : $\forall t \in [-1;1],\ |P(t)| \leqslant |at^2|+|bt|+|c| \leqslant 3N_\infty(P)$ donc $\beta = 3$ convient et elle est optimale car $||P||_\infty = 3N_\infty(P)$ pour $P = X^2+X+1 \neq 0$. Il suffit de résoudre le système $P(0)=c$, $P(1)=a+b+c$ et $P(-1)=a-b+c$ pour avoir $a = \dfrac{P(1)+P(-1)-2P(0)}{2}$, $b = \dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$ et $c = P(0)$.
Toujours par inégalité triangulaire : $|a| \leqslant 2||P||_\infty$, $|b| \leqslant ||P||_\infty$ et $|c| \leqslant ||P||_\infty$ donc $N_\infty(P) \leqslant 2||P||_\infty$.
Cette constante $\alpha = 2$ est optimale car $2 = N_\infty(P) = 2||P||_\infty$ pour $P = 2X^2-1 \neq 0$ par exemple.