TD 09 : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 15 novembre 2024**

9.1 <u>*E3A PSI 2017*</u> Corentin Gatellier On considère les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1}x^2}{x^4+n}$ pour $n \geqslant 1$.

a. Convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$? On note f la somme de cette série.

b. Convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

c. Montrer qu'il n'existe aucun intervalle (non singleton) de $\mathbb{R}$ sur lequel $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement.

d. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

9.2 <u>*CCP PSI 2018*</u> Pauline Lamaignère II Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$.

a. Quel est le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+n^2}$?

b. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

c. Y a-t-il convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

d. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Qu'en déduire quant à la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$?

9.3 <u>*CCP PSI 2016 et 2017 et 2019*</u> Samy Essabar II et Roland Tournade I et Romain Galea I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $g_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n e^t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_n(t)dt$.

a. Montrer que $\forall t \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n'(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$.

b. En déduire que $\forall t \in [0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g_n(t) - 1| \leqslant \dfrac{te^t}{n}$.

c. Étudier la convergence simple de $(I_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0;1]$.

d. Y a-t-il convergence uniforme de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0;1]$?

9.4 <u>*Mines PSI 2021*</u> Pierre-Issa Lacourte I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : x \mapsto \ln(1 + e^{-nx})$ et, en cas de convergence, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition I de f.

b. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur I.

c. Montrer que f admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ et la déterminer.

d. On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

9.5 <u>*CCINP PSI 2021*</u> Juliette Maricourt I Pour $n \geqslant 2$, soit $u_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Montrer que $\forall x \in D,\ \forall n \geqslant 2,\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d. En déduire que la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D.

e. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

9.6 *Mines PSI 2021* Alexandre Marque II

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{sh}\,(t)}\,dt$ converge.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{sh}\,(t)}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1+(2n+1)^2}$.

9.7 *CCINP PSI 2023* Paul-Antoine Baury-Carpentier II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant \dfrac{C}{1+x^2}$.

On pose $f : x \mapsto \varphi(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\varphi(x+n) + \varphi(x-n)\big)$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

a. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est 1-périodique.

c. Montrer que $\varphi \times g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

9.8 *CCINP PSI 2023* Hugo Delval II

On note $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en cas de convergence.

a. Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > 0$.

c. f est-elle continue sur D_f ? Calculer sa limite en $+\infty$.

d. Montrer que $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt$. En déduire un équivalent de f en 0^+.

e. Étudier la convergence normale et uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur D_f.

9.9 *CCINP PSI 2023* Fares Keraustret I

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}x^n}{n!}$.

En cas de convergence, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

c. Étudier la convergence simple de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f(x)$.

d. Soit $a > 0$, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;a]$.

e. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

9.10 *CCINP PSI 2023* Sacha Meslier II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : [-1;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sin\left(nx\,e^{-nx^2}\right)$.

a. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.

b. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.

c. En considérant $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[-1;1]$?