TD 10 : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 22 novembre 2024**

10.1 *Mines PSI 2014* Lucie

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

a. Trouver l'ensemble de définition de f.

b. Donner la classe de f.

c. Trouver une équation différentielle dont f est solution.

10.2 *Centrale Maths1 PSI 2015* Arnaud Dubessay

Soit $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n+x}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Donner le domaine de définition de f. Où f est-elle continue ?

b. f peut-elle coïncider avec une fonction polynomiale sur un segment ?

10.3 *X PSI 2017* Vincent Bouget II

Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

a. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de I.

b. Calculer sa somme.

10.4 *Mines PSI 2017* Sam Mamers I

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n)\big)$.

a. Étudier la convergence simple et uniforme de cette série de fonctions sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

10.5 *Mines PSI 2015 et 2019* Mathieu Dubes I et Maël Classeau I

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

d. La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

10.6 *CCINP PSI 2021 et 2022* Thomas Boudaud I et Camille Pucheu II

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi : I = [-a; a] \to \mathbb{R}$ continue, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |\varphi(x)| \leqslant c|x|$.

On cherche les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues telles que (P) : $f(0) = 0$ et $\forall x \in I,\ f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.

a. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ converge pour $x \in I$ et que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est continue sur I.

b. Montrer que S est solution de (P).

c. Montrer que la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle.

d. En déduire l'ensemble des solutions de (P).

e. Si on suppose φ de classe C^1 sur I, montrer que S est aussi de classe C^1 sur I.

10.7 *Centrale Maths1 PSI 2023* Antoine Jeanselme

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x)^n}$.

a. Montrer la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$.

b. Est-ce qu'il y a convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $]0;1]$?

c. Existence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

10.8 *Mines PSI 2023* Rémi Darrieumerle I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\eta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$.

a. Déterminer les ensembles de définition de η et ζ.

b. Pour $x > 1$, exprimer $\eta(x)$ en fonction de $\zeta(x)$.

c. Montrer que η est de classe C^1 sur son ensemble de définition.

d. Trouver deux réels a et b tels que $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{=} \dfrac{a}{x-1} + b + o(1)$.

10.9 *Mines PSI 2022 et 2023* Paul Mayé I et Alban Dujardin I

En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c. Trouver un équivalent de $f'(x)$, puis de $f(x)$, quand x tend vers 0^+.

d. Quelles sont les variations de f ?

e. Trouver les limites de f en $\pm\infty$.

f. Tracer la courbe représentative de f.

10.10 *Mines PSI 2023* Paul Bats I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(n+x)}$.

a. Trouver le domaine de définition D de f.

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur D.

c. Pour $x \in D$, calculer $xf(x) - f(x+1)$.

d. En déduire des équivalents de f en 0^+ et en $+\infty$.

e. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

10.11 *Mines PSI 2021 (3) et 2023 (2)* Quentin Granier IV et Baptiste Pozzobon III et Raffi Sarkissian III et Raphaël Déniel III et Tom Graciet III

Montrer que $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$.

10.12 *CCINP PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit $f :]0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^x}$ et, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln^n(x)dx$.

a. Montrer l'existence de $I_{n,p}$ pour toutes valeurs des entiers naturels n et p.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N},\ I_{n,p} = -\dfrac{n}{p+1}I_{n-1,p}$.

c. Montrer que f est intégrable sur $]0;1]$.

d. Montrer que $\int_0^1 \dfrac{1}{x^x}dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n}$.