TD 08 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 08 novembre 2024**

8.1 **a.** Pour tout couple $(i_0,j) \in [\![1;n]\!]^2$, par définition du maximum, on a $|m_{i_0,j}| \leqslant \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j}|$. En sommant ces inégalités sur la ligne i_0, on obtient $\forall i_0 \in [\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j}| = N_1(M)$ ce qui montre N_1 domine N_2 car $\forall M \in E$, $N_2(M) = \underset{1\leqslant i_0\leqslant n}{\text{Max}} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}| \right) \leqslant N_1(M) = 1.N_1(M)$ (1). Or, on a égalité dans l'inégalité (1) pour la matrice $M = E_{1,1} \neq 0$. Ainsi, la constante optimale (minimale) α est $\alpha = 1$. En effet, s'il existait une constante $\alpha > 1$ telle que $\forall M \in E$, $\alpha N_2(M) \leqslant N_1(M)$, alors pour $M = E_{1,1}$, on aurait $N_2(M) = N_1(M) = 1$ donc $\alpha \leqslant 1$ ce qui est absurde.

b. Pour tout couple $(i,j_0) \in [\![1;n]\!]^2$, comme on somme des quantités positives, $|m_{i,j_0}| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$. Ainsi, en passant au maximum, $\forall j_0 \in [\![1;n]\!]$, $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j_0}| \leqslant \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = N_2(M)$ donc, en sommant ces inégalités pour toutes les colonnes, $N_1(M) = \sum\limits_{j_0=1}^{n} \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}} |m_{i,j_0}| \leqslant nN_2(M)$ (2). Or, on a égalité dans l'inégalité (2) pour $M = I_n \neq 0$. Ainsi, la constante optimale (minimale) β est $\beta = n$ (comme avant).

8.2 **a.** • <u>Si $a = 0$</u>, l'inégalité $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ est vraie car $0 \leqslant \frac{1}{q}b^q$.

• <u>Si $a > 0$</u>, on étudie l'application $\varphi_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(t) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}t^q - at$. φ_a est dérivable et $\forall t > 0$, $\varphi'_a(t) = t^{q-1} - a$ donc φ_a est minimale pour $t_0 = a^{1/(q-1)}$ (faire le tableau de variations) en lequel elle vaut $\varphi_a(t_0) = 0$ car $p = \frac{q}{q-1}$. Ainsi φ_a est positive donc $\varphi_a(b) \geqslant 0$ ce qui revient à $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

On peut surtout utiliser la concavité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ car, comme on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ =1, il vient $\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ donc, par croissance de $\exp$, on trouve bien l'inégalité attendue, à savoir $\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geqslant ab$.

b. On applique l'inégalité de la question **a.** à $a = |x_k|$ et $b = |y_k|$ pour $k \in [\![1;n]\!]$ et on somme, ce qui donne l'inégalité $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \frac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q}\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ par hypothèse.

c. Si tous les coefficients d'un des deux vecteurs sont nuls, cette inégalité se ramène à $0 \leqslant 0$: ça va ! Sinon, on a $\alpha = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} > 0$ et $\beta = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} > 0$ et on peut appliquer l'inégalité de la question **b.** avec $\frac{x_k}{\alpha}$ dans le rôle de x_k et $\frac{y_k}{\beta}$ dans celui de y_k. Comme sont respectées les conditions $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{\alpha}\right|^p = \frac{1}{\alpha^p}\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p = 1$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|\frac{y_k}{\beta}\right|^q = \frac{1}{\beta^q}\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q = 1$, il vient $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k y_k}{\alpha\beta}\right| \leqslant 1$ d'après **b.** puis l'inégalité de HÖLDER $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \alpha\beta = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$.

d. On écrit l'inégalité de la question **b.** avec x_k à la place de x_k (ça c'est bon) et $(x_k + y_k)^{p-1}$ à la place de y_k. Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(|x_k + y_k|^{p-1}\right)^q = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(|x_k + y_k|\right)^{(p-1)q} = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p$ car $(p-1)q = p$, cela donne $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/q}$ et par symétrie entre x et y, on obtient aussi

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\Big)^{1/q}.$$

Comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|x_k+y_k| \leqslant |x_k|+|y_k|$ par inégalité triangulaire, on a $|x_k+y_k|^p \leqslant (|x_k|+|y_k|)|x_k+y_k|^{p-1}$ donc, en sommant, il vient $\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1}$ d'où on déduit l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p \leqslant \left(\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{1/p}\right) \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\Big)^{1/q} \quad (1).$$

Si $\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p = 0$, l'inégalité demandée est vraie. Sinon, on divise (1) par $\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\Big)^{1/q} > 0$ pour avoir $\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\Big)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{1/p}$ or $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$ par hypothèse et on obtient l'inégalité souhaitée. Dans tous les cas, on a $\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{1/p}$.

e. Inégalité triangulaire : on vient de le faire à la question précédente.

Séparation : soit $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $||x||_p = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 0$. Cette somme nulle de termes positifs montre que tous les termes sont nuls donc $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|x_k|^p = 0 \Longleftrightarrow x_k = 0$. Ainsi, $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$, alors $||\lambda x||_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\Big)^{1/p} = \Big(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}$ dont on déduit bien $||\lambda x||_p = \big(|\lambda|^p\big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} = |\lambda|\, ||x||_p$.

Par conséquent, $||\,.\,||_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $||x||_p = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

f. On a $\big(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|\big)^p = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_k|^p\big)$. Comme $t \mapsto t^{1/p}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $||x||_\infty \leqslant ||x||_p \leqslant n^{1/p}||x||_\infty$. Comme $\lim_{n\to+\infty} n^{1/p} = 1$, par encadrement, $\lim_{p\to+\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

g. Pour $x=0$, cette double inégalité est clairement vérifiée et revient à $0 \leqslant 0 \leqslant 0$.

Pour $x \neq 0$, on a $||x||_s > 0$. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a $|x_k|^s \leqslant ||x||_s^s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^s$ donc $|x_k| \leqslant ||x||_s$ ce qui prouve que $y_k = \dfrac{|x_k|}{||x||_s} \in [0;1]$. Comme $1 \leqslant r < s$, on en déduit que $0 \leqslant y_k^s \leqslant y_k^r$, c'est-à-dire que $\dfrac{|x_k|^s}{||x||_s^s} \leqslant \dfrac{|x_k|^r}{||x||_s^r}$, on somme pour $k \in [\![1;n]\!]$ pour avoir $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x_k|^s}{||x||_s^s} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x_k|^r}{||x||_s^r} \Longleftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{||x||_r^r}{||x||_s^r}$ donc $||x||_s \leqslant ||x||_r$ (2).

Ensuite on applique l'inégalité de Hölder en paramétrant correctement : x_k^r à la place de x_k, 1 à la place de y_k, $\dfrac{r}{s} < 1$ à la place de $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{s-r}{s} < 1$ à la place de $\dfrac{1}{q}$; on vérifie la condition $\dfrac{r}{s} + \dfrac{s-r}{s} = 1$ et on obtient $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^r \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} (|x_k|^r)^{s/r}\Big)^{r/s} \Big(\sum_{k=1}^{n} 1\Big)^{(s-r)/s}$, ce qui revient à $||x||_r \leqslant n^{1/r-1/s}||x||_s$ (3). Ces constantes sont optimales car l'inégalité (2) est une égalité pour $x = e_1$ et l'inégalité (3) pour $x = (1,\cdots,1) = \sum_{k=1}^{n} e_k$.

8.3 **a.** $E_n \subset C^0([0;n],\mathbb{R})$ et la fonction nulle appartient clairement à E_n. De plus, par structure d'espace vectoriel des fonctions continues et affine sur un intervalle, E_n est stable par combinaison linéaire (la continuité sur $[0;n]$ et le caractère affine sur tout segment $[k;k+1]$ se conservent). Par conséquent, E_n est un espace vectoriel car c'est un sous-espace vectoriel de $C^0([0;n],\mathbb{R})$. L'application $\theta_n : E_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\forall f \in E_n$, $\theta_n(f) = \big(f(0),\cdots,f(n)\big)$ est linéaire et sa bijectivité provient du fait qu'une fonction f de E_n est entièrement caractérisée par ses valeurs en les entiers $k \in [\![0;n]\!]$ puisque qu'elle est affine sur les segments

$[k;k+1]$. Comme un isomorphisme conserve les dimensions, on en déduit que $\dim(E_n) = n+1$.

b. On sait que toutes les normes sur des espaces vectoriels de dimension finie sont équivalentes. Or $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||_1$ sont deux normes classiques dans $C^0([0;n], \mathbb{R})$ donc a fortiori dans E_n, ce qui justifie l'existence de deux constantes a_n et b_n strictement positives telles que $\forall f \in E_n,\ a_n||f||_\infty \leqslant ||f||_1 \leqslant b_n||f||_\infty$. Considérons $\alpha_n = \mathrm{Sup}\left(\{a \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ a||f||_\infty \leqslant ||f||_1\}\right)$ et $\beta_n = \mathrm{Inf}\left(\{b \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ ||f||_1 \leqslant b||f||_\infty\}\right)$. Ces deux constantes existent bien car $\{a \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ a||f||_\infty \leqslant ||f||_1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car elle contient a_n) et majorée par exemple par n car si on prend f la fonction constante égale à 1 sur $[0;n]$, on a bien $f \in E_n$, $||f||_\infty = 1$ et $||f||_1 = n$; de même $\{b \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ ||f||_1 \leqslant b||f||_\infty\}$ est une partie non vide (car elle contient b_n) de $\mathbb{R}_+$ minorée par 0. Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, ces deux constantes α_n et β_n sont bien optimales (maximale pour α_n et minimale pour β_n).

Par définition de la norme infinie et croissance de l'intégrale (ici $0 < n$), pour toute $f \in E_n$, on a la majoration $||f||_1 = \int_0^n |f| \leqslant \int_0^n ||f||_\infty = n||f||_\infty$ donc $\beta_n \leqslant n$ et on a égalité dans cette inégalité pour la fonction non nulle f constante égale à 1 sur $[0;n]$ avec $f \in E_n$. Ainsi, toute constante $b < n$ n'est pas dans $\{b \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ ||f||_1 \leqslant b||f||_\infty\}$ ce qui prouve que $\beta_n = n = \mathrm{Min}\left(\{b \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall f \in E_n,\ ||f||_1 \leqslant b||f||_\infty\}\right)$.

c. Pour trouver α_n, par homogénéité des deux normes $||\,.\,||_\infty$ et $||\,.\,||_1$, on peut se restreindre aux fonctions f telles que $||f||_\infty = 1$ et peut imposer, comme f affine atteint son maximum en valeur absolue soit en 0 soit en 1) que $f(0) = 1$ (quitte à changer f en $-f$ si $f(0) = -1$, en $x \mapsto f(1-x)$ si $f(1) = 1$ ou en $x \mapsto -f(1-x)$ si $f(1) = -1$). On veut rendre minimum $||f||_1$ avec cette condition que $f(0) = 1 = ||f||_\infty$ et f affine sur $[0;1]$ ce qui nous conduit à prendre $f(x) = 1 - ax$ avec $a \in [1;2]$ (pour que la fonction f passe du côté négatif en 1 et diminue $||f||_1$ tout en vérifiant $||f||_\infty = 1$). On calcule alors $||f||_1 = \int_0^{1/a}(1-ax)dx + \int_{1/a}^1 (ax-1)dx$ donc $||f||_1 = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{a} + \dfrac{(a-1)^2}{a}\Big) = h(a)$ (somme de deux aires de triangles). h est dérivable sur $[1;2]$ et on trouve $h'(a) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a^2}$ donc h est minimale pour $a = \sqrt{2}$ où $||f||_1 = h(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$. Ainsi, $\alpha_1 = \sqrt{2} - 1 \sim 0,414$.

Pour $n \geqslant 2$ quelconque, soit $f : [0;n] \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 1 - x$ pour $x \in [0;1]$ et $f_0(x) = 0$ sinon. Alors on a clairement $f_0 \in E_n$ et on calcule aisément $||f_0||_\infty = 1$ et $||f_0||_1 = \dfrac{1}{2}$ de sorte que puisque $\forall f \in E_n,\ \alpha_n||f||_\infty \leqslant ||f||_1$, on en déduit que $\alpha_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.

d. Dans ces conditions, si le maximum de f n'était pas atteint en 0 ou en n, alors il serait atteint (par structure de $f \in E_n$) en $x_i = i$ avec $i \in [\![1;n-1]\!]$ et on aurait au minimum une aire de α_1 comme intégrale de part et d'autre de x_i ($\int_{i-1}^i |f| \geqslant \alpha_1$ et $\int_i^{i+1} |f| \geqslant \alpha_1$) d'après l'étude de la question **c.**. Alors on aurait $||f||_1 \geqslant \int_{i-1}^{i+1} |f| \geqslant 2\alpha_1 > \dfrac{1}{2}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, f atteint son maximum en 0 ou en n.

Par symétrie, on peut imposer $f(0) = 1$ et $f(x) = 1 - ax$ pour $x \in [0;1]$ avec $a \in [1;2]$ (encore une fois pour respecter $|f||_\infty = 1$ et pour minimiser $||f||_1$) ; alors $||f||_1 = \int_0^n |f| = \int_0^1 |f| + \int_1^n |f|$ et cette dernière intégrale (par définition de α_{n-1}) est minimale si $\int_1^n |f| = |f(1)|\alpha_{n-1}$ (par une translation de $[1;n]$ à $[0;n-1]$ et une affinité de rapport $|f(1)|$ sur les ordonnées) donc $\alpha_n \geqslant \dfrac{1}{a} - 1 + \dfrac{a}{2} + (a-1)\alpha_{n-1} = h_n(a)$.

Comme avant, la fonction h_n est dérivable sur $[1;2]$, $h_n'(a) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a^2} + \alpha_{n-1}$ donc h_n est minimale en

$\lambda_n = \left(\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \in [1;2[$ (car $\alpha_{n-1} \leqslant \frac{1}{2}$ d'après **c.**). Après calculs, on trouve (en prenant pour $f \in E_n$ la fonction affine correspondant à ce choix de $a = \lambda_n$ et à une fonction optimale au rang $n-1$ sur l'intervalle $[1;n]$) que $\alpha_n = \underset{[1;2]}{\mathrm{Min}}(h_n) = h_n(\lambda_n) = 2\sqrt{\alpha_{n-1}+\frac{1}{2}} - 1 - \alpha_{n-1}$.

Soit $\varphi : \left[0;\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = 2\sqrt{x+\frac{1}{2}} - 1 - x$ de sorte que $\forall n \geqslant 1,\ \alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$. On a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}} - 1$ donc φ croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Comme $\alpha_1 = \sqrt{2}-1$ et $\alpha_2 = 2\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \sim 0,498$, on montre classiquement que $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et, comme elle est majorée par $\frac{1}{2}$, elle converge vers $\ell \leqslant \frac{1}{2}$ qui est un point fixe de φ car φ est continue. Or $\varphi(x) = x \Longleftrightarrow 2\sqrt{x+\frac{1}{2}} = 2x+1 \Longleftrightarrow 4x+2 = 4x^2+4x+1$ pour $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ ce qui donne $\varphi(x) = x \Longleftrightarrow 4x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Par conséquent, la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\frac{1}{2}$. Elle le fait même très vite, de manière quadratique, car $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; faire un dessin et constater avec TAYLOR-LAGRANGE que $\alpha_{n+1} - \frac{1}{2} = \varphi(\alpha_n) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\varphi''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\alpha_n - \frac{1}{2}\right)^2$.

8.4 Si $f \in E$, posons $A(f) = \left\{k \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|\right\}$. Alors $A(f)$ est une partie non vide (car f est lipschitzienne) et minorée par 0 donc $N(f) = \mathrm{Inf}(A(f))$ existe. Si $(k,k') \in A(f)^2$ et $k'' \in [k;k']$, alors $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y| \leqslant k''|x-y|$ donc $k'' \in A(f)$. Par conséquent $[k;k'] \subset A(f)$ et $A(f)$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. $A(f)$ n'est pas majoré car si $k \in A(f)$ et $k' > k$ alors $k' \in A(f)$. On ne peut donc avoir que $A(f) =]N(f);+\infty[$ ou $A(f) = [N(f);+\infty[$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $N(f)+\varepsilon \in A(f)$ d'après ce qui précède donc $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant (N(f)+\varepsilon)|x-y|$ ce qui, quand ε tend vers 0^+, devient $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant N(f)|x-y|$. Ainsi $N(f) \in A(f)$ ce qui prouve que $N(f) = \mathrm{Min}(A(f))$. On a donc $A(f) = [N(f);+\infty[$.

<u>Séparation</u> : si $f \in E$ et $N(f) = 0$, alors $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant 0.|x-y| = 0 \Longrightarrow f(x) = f(y)$. Ainsi f est constante et comme elle est nulle en a, f est nulle.

<u>Homogénéité</u> : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, on a $\forall (x,y) \in [a;b]^2,\ |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| = |\lambda||f(x)-f(y)| \leqslant |\lambda|N(f)|x-y|$ donc λf est aussi lipschitzienne (on le savait déjà) et $N(\lambda f) \leqslant |\lambda|N(f)$. Si $\lambda = 0$, $N(0.f) = N(0) = 0 = 0.N(f)$. Si $\lambda \neq 0$, on applique l'inégalité précédente à $\frac{1}{\lambda}$ et (λf) d'où $N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| N\left(\lambda \frac{f}{\lambda}\right)$ et $N(\lambda f) \geqslant |\lambda|N(f)$. Par conséquent, $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$.

<u>Inégalité triangulaire</u> : $|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| \leqslant |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$ pour $(f,g) \in E^2$ et $(x,y) \in [a;b]^2$, d'où $|(f+g)(x)-(f+g)(y)| \leqslant N(f)|x-y| + N(g)|x-y| \leqslant (N(f)+N(g))|x-y|$. Ainsi $f+g$ est lipschitzienne (on le savait déjà) et $N(f+g) \leqslant N(f)+N(g)$.

En conclusion, N est bien une norme sur E ($N(f)$ est la meilleure constante de lispchitzianité de f).

8.5 Si on note $A^n = (a_{i,j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, puisqu'on est en dimension finie et que la famille $(a_{i,j,n})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ constitue les coordonnées de A^n dans la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on sait qu'en notant $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a les limites $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_{i,j,n} = b_{i,j}$ (passage par les coordonnées dans une base en dimension finie).

Comme $(A^n)^T = (a_{j,i,n})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ donc, toujours en passant par les coordonnées, les p^2 convergences de suites scalaires assurent que la suite $((A^n)^T)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $(b_{j,i})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}(A^n)^T = B^T$.

Plus tard, on évoquera plus simplement la continuité, puisque $M \mapsto M^T$ est linéaire en dimension finie, de l'application "transposée", et la caractérisation séquentielle de la continuité.

- Pour $k\in\mathbb{N}$, A^{2k} est symétrique donc $\lim\limits_{k\to+\infty}(A^{2k})^T = \lim\limits_{k\to+\infty} A^{2k} = B$ (suite extraite).
- Pour $k\in\mathbb{N}$, A^{2k+1} est antisymétrique donc $\lim\limits_{k\to+\infty}(A^{2k+1})^T = \lim\limits_{k\to+\infty}(-A^{2k+1}) = -B$ (suite extraite).

Par unicité de la limite, $B=-B$ donc $B=0$.

8.6 f est paire, positive, dérivable sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc croissante sur $\mathbb{R}_-$, de limite nulle en $\pm\infty$ et elle vaut 2 en 0. Tout ceci montre que $f(\mathbb{R}) =]0;2]$ (tracer le tableau de variations et le graphe).

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x > 0,\ g'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2} - 1$. g est strictement positive sur $\mathbb{R}_-$ et $\forall x \geqslant 0,\ g'(x) < 0$ donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]-\infty;2]$ car $g(0) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$; ainsi, la fonction g ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, et il est clair que c'est en 1 puisque $g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$: le seul point fixe de la fonction f est 1.

Pour $x\in\mathbb{R}$, $f\circ f(x) - x = \dfrac{2}{1+(2/(1+x^2))^2} - x = \dfrac{2(1+x^2)^2 - x((1+x^2)^2+4)}{(1+x^2)^2+4}$ or on peut factoriser plusieurs fois par $x-1$ car 1 est racine triple du numérateur et on obtient $2(1+x^2)^2 - x((1+x^2)^2+4) = (1-x)^3(x^2+x+2)$. Le discriminant du polynôme X^2+X+2 vaut $\Delta = -7 < 0$ donc x^2+x+2 reste strictement positif sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la quantité $f\circ f(x) - x$ est du signe de $1-x$.

Pour tout $u_0\in\mathbb{R}$, on a $u_1 \in]0;2]$ d'après l'étude précédente. De plus, comme l'intervalle $]0;2]$ est stable par f car $f(]0;2]) =]2/5;2] \subset]0;2]$, on montre facilement par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n\geqslant 1,\ 0 < u_n \leqslant 2$. Traitons trois cas :

- Si $u_1 = 1$ (c'est-à-dire $u_0 = \pm 1$), comme 1 est un point fixe de f, on a $(u_n)_{n\geqslant 1}$ constante égale à 1 donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.
- Si $u_1 \in]0;1[$, alors comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(1) = 1 < u_2 = f(u_1) < 2 = f(0)$ et, de même, $f(2) = 2/5 < u_3 = f(u_2) < 1 = f(1)$. Mais comme $u_3 - u_1 = f\circ f(u_1) - u_1$ est du signe de $1-u_1$, on a donc $u_3 > u_1$. En partant de $u_1 < u_3 < 1 < u_2$ et en appliquant f indéfiniment, on obtient par une récurrence classique $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_1 < u_3 < \cdots < u_{2n+1} < 1 < u_{2n} < \cdots < u_2$. La suite $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ (resp. $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$) est décroissante (resp. croissante) et minorée par 1 (resp. majorée par 1) donc elle converge vers $\ell_0 \in [1;2[$ (resp. $\ell_1 \in]0;1]$). Comme $u_{2n+2} = f\circ f(u_{2n})$, en passant à la limite et par continuité de f, on a $\ell_0 = f\circ f(\ell_0)$ ce qui montre avec l'étude précédente que $\ell_0 = 1$. De même, comme $u_{2n+3} = f\circ f(u_{2n+1})$, on a $\ell_1 = f\circ f(\ell_1)$ et $\ell_1 = 1$. Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $u_1 \in]1;2]$, alors comme f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $0 < f(2) = 2/5 < u_2 = f(u_1) < 1 = f(1)$ et, de même, $f(1) = 1 < u_3 = f(u_2) < 2 = f(0)$. Mais comme $u_3 - u_1 = f\circ f(u_1) - u_1$ est du signe de $1-u_1$, on a donc $u_3 < u_1$. En partant de $u_2 < 1 < u_3 < u_1$ et en appliquant f indéfiniment, on obtient par une récurrence classique $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_2 < u_4 < \cdots < u_{2n} < 1 < u_{2n+1} < \cdots < u_3 < u_1$. La suite $(u_{2n})_{n\geqslant 1}$ (resp. $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$) est croissante (resp. décroissante) et majorée par 1 (resp. minorée

par 1) donc elle converge vers $\ell_0 \in]0;1]$ (resp. $\ell_1 \in [1;2]$). Comme $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, en passant à la limite et par continuité de f, on a $\ell_0 = f \circ f(\ell_0)$ ce qui montre avec l'étude précédente que $\ell_0 = 1$. De même, comme $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$, on a $\ell_1 = f \circ f(\ell_1)$ et $\ell_1 = 1$. Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Dans tous les cas, la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers 1.

Ici, $f'(1) = -1$ donc on ne peut pas utiliser le théorème des accroissements finis directement pour montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge. Il faudrait aller plus loin dans l'ordre de la formule de TAYLOR reste intégral.

8.7 **a.** f ainsi définie est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $c > 0$ et $\alpha \neq 0$ et dans ce cas, on a $f^{-1}(x) = \dfrac{x^{1/\alpha}}{c^{1/\alpha}}$. De plus, f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \alpha c x^{\alpha - 1}$. On a $\forall x > 0,\ f'(x) = f^{-1}(x)$ si et seulement si $\alpha c = c^{-1/\alpha}$ et $\alpha - 1 = \dfrac{1}{\alpha} \iff \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \iff \alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La condition $\alpha c = c^{-1/\alpha}$ avec $c > 0$ impose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1,61$ et on a donc $c^{1+(1/\alpha)} = c^{\alpha} = \alpha^{-1}$ donc $c = \alpha^{-1/\alpha}$. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \alpha^{1-\alpha} x^{\alpha}$ est bien un élément de E avec $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

b. Soit $f \in E$, alors f étant bijective et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, elle est strictement monotone donc strictement croissante car $f' = f^{-1} > 0$. f admet, d'après le théorème de la limite monotone, une limite finie en 0^+ car f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et minorée par 0. Comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ cette limite ne peut être que 0 par le théorème de la bijection. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que f soit de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$, comme f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f^{-1} est aussi de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $f' = f^{-1}$, f est donc de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}_+^*$. Par principe de récurrence, f (et donc f^{-1} aussi puisque f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$) est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, g l'est aussi. Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = f'(x) - 1 = f^{-1}(x) - 1$ et $g''(x) = f''(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} > 0$. Ainsi, la fonction g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a vu en question **b.** que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^+$, et puisque f^{-1} est aussi une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{-1}(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = +\infty$. Par continuité de g' et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g'(\alpha) = 0$. La fonction g est donc décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ car $f' = f^{-1}$ est bijective strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $a > 0$ tel que $\forall x \geqslant a,\ f'(x) \geqslant 2$. Ainsi, $\forall x \geqslant a,\ f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt \geqslant f(a) + 2(x-a)$ donc $g(x) = f(x) - x \geqslant f(a) + x - 2a$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(a) + x - 2a = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Or $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ donc, avec le tableau de variations de g, $g(\alpha) < 0$ et on a l'existence et l'unicité d'un réel $c \in [\alpha;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(c) = 0 = f(c) - c$ donc l'existence d'un unique point fixe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

8.8 **a.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geqslant 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a;b],\ h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0)=-1$ et $h(1)=1-\cos(1)>0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c\in]0;1[$ tel que $h(c)=0$, donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c\sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f\circ f=\cos$. En appliquant f, on obtient $f\circ f\circ f=f\circ\cos$ donc $\cos\circ f=f\circ\cos$ ce qui, en c, devient $f(c)=\cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question **a.**, on en déduit que $f(c)=c$. Si on dérive $f\circ f=\cos$, on obtient $f'\times(f'\circ f)=-\sin$ ce qui, en c, devient $f'(c)^2=-\sin(c)<0$ car, comme $c\in]0;1[\subset]0;\pi[$, on a $\sin(c)>0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f\circ f=\cos$.

8.9 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2$ de sorte que $u_{n+1}=f(u_n)$. Par une petite étude de cette fonction dont le graphe est une parabole, on constate que l'intervalle $[-2;2]$ est stable par f. En effet, f est paire et croissante sur $[0;2]$ avec $f(0)=-2$ et $f(2)=2$.

Méthode 1 cas réel : supposons $a\in\mathbb{R}$ et traitons deux cas :

- si $|a|\leqslant 2$, comme $[-2;2]$ est stable par f, $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant 2$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- si $|a|>2$, $u_1=a^2-2>2$ et, par une récurrence simple, $\forall n\geqslant 1,\ u_n>2$. Or, pour $x>2$, on a $x^2-2>x$ car $x^2-x-2=(x+1)(x-2)>0$ donc $u_{n+1}=u_n^2-2>u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ, alors en passant à la limite dans la relation de récurrence, on a $\ell^2=\ell-2$ donc $\ell=2$ ou $\ell=-1$, ce qui est absurde car $u_1>2$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non convergente, elle tend vers $+\infty$ donc n'est pas bornée.

Ainsi, si $a\in\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|a|\leqslant 2$.

Méthode 2 cas réel : supposons $a\in\mathbb{R}$ et traitons trois cas :

- si $a\in[-2;2]$, il existe un réel θ tel que $a=2\cos(\theta)$ car $\cos$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$. Ainsi, $a=u_0=2\cos(\theta)$, puis $u_1=a^2-2=4\cos^2(\theta)-2=2\cos(2\theta)$ et on montre par une récurrence simple que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2\cos(2^n\theta)$ ce qui montre aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- Si $a>2$, comme ch est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1;+\infty[$, il existe $t>0$ tel que $a=u_0=2\mathrm{ch}\,(t)$ puis $u_1=a^2-2=4\mathrm{ch}^2(t)-2=2\mathrm{ch}\,(2t)$. À nouveau, par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2\mathrm{ch}\,(2^nt)$ et, comme $t>0$, ceci justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
- Si $a<-2$, il existe $t>0$ tel que $a=u_0=-2\mathrm{ch}\,(t)$ puis $u_1=a^2-2=4\mathrm{ch}^2(t)-2=2\mathrm{ch}\,(2t)$. Encore, par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=2\mathrm{ch}\,(2^nt)$ et, comme $t>0$, ceci justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

À nouveau, si $a\in\mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|a|\leqslant 2$.

Cas complexe non réel : soit maintenant $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On prolonge la fonction $\cos$ à $\mathbb{C}$ en écrivant, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\cos(z)=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. On va vérifier que cette fonction est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, posons $u=e^{iz}\neq 0$. Alors $\cos(z)=z'\iff\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\dfrac{u+(1/u)}{2}=z'\iff u^2-2z'u+1=0$. D'après d'Alembert-Gauss, il existe au moins un complexe u qui soit racine de $P=X^2-2z'X+1$, et ce u est forcément non nul car 0 n'est pas racine de P. Soit donc $u\neq 0$ tel que $u^2-2z'u+1=0$. Or l'application

$\exp : v \mapsto e^v$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ puisque si $w = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, le complexe $v = \ln(r) + i\theta$ est un antécédent de w par $\exp$ puisque $e^{\ln(r)+i\theta} = e^{\ln(r)} \times e^{i\theta} = re^{i\theta} = w$. Ainsi, soit $v \in \mathbb{C}$ tel que $u = e^v$ et $z = -iv$ de sorte que $v = iz$ et qu'on ait $u = e^{iz}$ puis $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{u + (1/u)}{2} = z' = \cos(z)$.

On a bien établi la surjectivité de $\cos$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Et on vérifie qu'on a toujours, même pour $z \in \mathbb{C}$, la formule $2\cos^2(z) - 1 = 2\Big(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\Big)^2 - 1 = \dfrac{2e^{2iz} + 4 + 2e^{-2iz} - 4}{4} = \dfrac{e^{i(2z)} + e^{-i(2z)}}{2} = \cos(2z)$.

Comme $\dfrac{a}{2} \in \mathbb{C}$ et que $\cos$ est surjective, il existe $b \in \mathbb{C}$ tel que $a = u_0 = 2\cos(b)$. Alors on a comme avant $u_1 = u_0^2 - 2 = 4\cos^2(b) - 2 = 2(2\cos^2(b) - 1) = 2\cos(2b)$ et on démontre, par récurrence, que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\cos(2^n b)$. Si on avait $b \in \mathbb{R}$, on aurait $a = 2\cos(b) = e^{ib} + e^{-ib} \in \mathbb{R}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, $b = b_1 + ib_2$ avec $b_1 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}^*$ et on a donc $u_n = 2\cos(2^n b) = e^{i2^n b} + e^{-i2^n b}$ qu'on peut aussi écrire $u_n = e^{i2^n b_1 - 2^n b_2} + e^{-i2^n b_1 + 2^n b_2}$. Traitons deux cas :

- si $b_2 > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2^n b_2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{i2^n b_1 - 2^n b_2} = 0$ et $|e^{i2^n b_1 + 2^n b_2}| = e^{2^n b_2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |e^{i2^n b_1 - 2^n b_2}| = +\infty$ ce qui prouve, par somme d'une suite bornée car convergente et d'une suite non bornée, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- si $b_2 < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n b_2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{i2^n b_1 + 2^n b_2} = 0$ et $|e^{i2^n b_1 - 2^n b_2}| = e^{-2^n b_2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |e^{i2^n b_1 + 2^n b_2}| = +\infty$ et à nouveau, par somme d'une suite bornée car convergente et d'une suite non bornée, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Si $a \notin \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est jamais bornée.

On a donc montré que l'ensemble de JULIA associé à la constante $c = -2$ est réduit au segment réel $[-2; 2]$!

8.10 **a.** Supposons que f est K-lipschitzienne, alors si $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, par télescopage, on peut majorer $\sum\limits_{k=1}^{n} \big|f(t_k) - f(t_{k-1})\big| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \big(K(t_k - t_{k-1})\big) = K(t_n - t_0) \leqslant K$. Ainsi, $V(f) \leqslant K < +\infty$ et $f \in BV$.

b. Supposons f croissante (si f est décroissante, on remplace f par $-f$) et si $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, on trouve par télescopage $\sum\limits_{k=1}^{n} \big|f(t_k) - f(t_{k-1})\big| = \sum\limits_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1})) = f(t_n) - f(t_0) \leqslant f(1) - f(0)$ donc $V(f) \leqslant f(1) - f(0) < +\infty$ et $f \in BV$.

c. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\cos\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. f est continue par opérations sur $]0; 1]$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue sur $[0; 1]$. Soit $n \geqslant 2$, $t_k = \dfrac{1}{(n+1-k)\pi}$ si $k \in [\![0; n]\!]$, alors $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \big|f(t_k) - f(t_{k-1})\big| = \sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\dfrac{1}{(n+1-k)\pi} + \dfrac{1}{(n+2-k)\pi}\Big) = \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n} \Big(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}\Big)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ par divergence de la série harmonique. Ainsi, f est continue sur $[0; 1]$ et elle n'appartient pas à BV.

d. Si $f \in BV$ et $t \in [0; 1]$, si $n = 1$, $t_0 = 0$ et $t_1 = t$, $\sum\limits_{k=1}^{1} \big|f(t_k) - f(t_{k-1})\big| = |f(t_1) - f(t_0)| = |f(t) - f(0)| \leqslant V(f)$ donc $|f(t)| = |f(t) - f(0) + f(0)| \leqslant |f(t) - f(0)| + |f(0)| \leqslant V(f) + |f(0)|$. Ainsi, f est bornée sur $[0; 1]$.

e. D'abord, la fonction nulle $f = 0$ est à variations bornées car dès que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \big|f(t_k) - f(t_{k-1})\big| = 0$ donc $V(f) = 0 < +\infty$. De plus, si on prend un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et un couple $(f, g) \in BV^2$, toujours pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, on peut majorer par inégalité triangulaire

$\sum_{k=1}^{n} \left|(\lambda f+g)(t_k)-(\lambda f+g)(t_{k-1})\right| \leqslant |\lambda| \sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k)-f(t_{k-1})\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|g(t_k)-g(t_{k-1})\right| \leqslant \lambda V(f)+V(g) < +\infty$ donc $\lambda f+g \in BV$. Ainsi, BV est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0;1], \mathbb{R})$ donc BV est un espace vectoriel.

<u>Homogénéité</u> : soit $f \in BV$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=1}^{n} \left|(\lambda f)(t_k)-(\lambda f)(t_{k-1})\right| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k)-f(t_{k-1})\right| \leqslant |\lambda|V(f)$ si $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$ donc $V(\lambda f) \leqslant |\lambda|V(f)$. Si $\lambda \neq 0$, on applique ce qui précède à $\frac{1}{\lambda}$ et λf pour avoir $V\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| V(\lambda f)$ donc $V(\lambda f) \geqslant |\lambda|V(f)$. Ainsi, $V(\lambda f) = |\lambda|V(f)$ qui est aussi vrai si $\lambda = 0$ car $0 = 0$.

Ainsi, on a bien l'homogénéité $N(\lambda f) = V(\lambda f) + |(\lambda f)(0)| = |\lambda|V(f) + |\lambda|\,|f(0)| = |\lambda|N(f)$.

<u>Inégalité triangulaire</u> : on a déjà vu en montrant que BV était un espace vectoriel (en prenant $\lambda = 1$) que $\sum_{k=1}^{n} \left|(f+g)(t_k)-(f+g)(t_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|f(t_k)-f(t_{k-1})\right| + \sum_{k=1}^{n} \left|g(t_k)-g(t_{k-1})\right| \leqslant V(f)+V(g)$ donc on déduit que $V(f+g) \leqslant V(f)+V(g)$. D'où $N(f+g) = V(f+g)+|(f+g)(0)| \leqslant V(f)+V(g)+|f(0)|+|g(0)| = N(f)+N(g)$.

<u>Séparation</u> : Si on suppose que $N(f) = 0$, comme $V(f)$ et $|f(0)|$ sont positifs, on en déduit que $V(f) = 0$ et $|f(0)| = f(0) = 0$. Avec l'inégalité de la question **d.**, $\forall t \in [0;1]$, $|f(t)-f(0)| \leqslant V(f) = 0$ donc $f(t) = f(0)$ et f est constante. Comme $f(0) = 0$ donc $f(0) = 0$.

On peut donc conclure que N est une norme sur l'espace BV.

f. Soit f et g deux fonctions de BV, on peut définir d'après **d.** les deux réels $A = ||f||_{\infty,[0;1]} = \underset{t\in[0;1]}{\text{Sup}} |f(t)|$ et $B = ||g||_{\infty,[0;1]} = \underset{t\in[0;1]}{\text{Sup}} |g(t)|$. Si $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$, en faisant intervenir un terme intermédiaire, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $|f(t_k)g(t_k)-f(t_{k-1})g(t_{k-1})| = |f(t_k)g(t_k)-f(t_k)g(t_{k-1})+f(t_k)g(t_{k-1})-f(t_{k-1})g(t_{k-1})|$.
Par inégalité triangulaire, $|f(t_k)g(t_k)-f(t_{k-1})g(t_{k-1})| \leqslant |f(t_k)||g(t_k)-g(t_{k-1})|+|g(t_{k-1})||f(t_k)-f(t_{k-1})|$ donc $|f(t_k)g(t_k)-f(t_{k-1})g(t_{k-1})| \leqslant A|g(t_k)-g(t_{k-1})|+B|f(t_k)-f(t_{k-1})|$. En sommant, on arrive à majorer $\sum_{k=1}^{n} \left|(fg)(t_k)-(fg)(t_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(A|g(t_k)-g(t_{k-1})|+B|f(t_k)-f(t_{k-1})|\right) \leqslant AV(g)+BV(f)$. Ainsi, $fg \in BV$ et l'espace vectoriel BV est bien stable par produit (on dit que c'est une algèbre).

g. Soit f et g dans BV avec $g : [0;1] \to [0;1]$ monotone. Supposons que g est une fonction croissante (sinon on remplace g par $-g \in BV$). Soit $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$. Comme $g(0) \geqslant 0$, $g(1) \leqslant 1$ et g croissante, on a $0 \leqslant t'_0 = g(t_0) \leqslant t'_1 = g(t_1) \leqslant \cdots \leqslant t'_n = g(t_n) \leqslant 1$. Puisque $f \in BV$, on a la majoration $\sum_{k=1}^{n} |f\circ g(t_k)-f\circ g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(t'_k)-f(t'_{k-1})| \leqslant V(f)$ donc $f\circ g \in BV$.

h. Soit $g : [0;1] \to [0;1]$ définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = x^2\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \in]0;1]$. Les variations les plus importantes de la fonctions g sont atteintes quand on parcourt tous les creux et bosses de g, g est croissante sur tout segment $C_n = \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{2n-1}\right]$ pour $n \geqslant 2$ et elle est décroissante sur tout segment $D_n = \left[\frac{2}{2n+1}; \frac{1}{n}\right]$ avec $n \geqslant 1$. La variation de g sur C_n est de $\left|g\left(\frac{2}{2n-1}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{4}{(2n-1)^2}$ et celle sur D_n est de $\left|g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{2}{2n+1}\right)\right| = \frac{4}{(2n+1)^2}$. Ainsi, comme $\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{4}{(2n+1)^2} + \frac{4}{(2n-1)^2}\right)$ converge par RIEMANN car $\frac{4}{(2n+1)^2} + \frac{4}{(2n-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$, la fonction g est à variation bornée. Prenons maintenant $f : [0;1] \to [0;1]$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors f est croissante donc f appartient à BV d'après **b.** et $f\circ g(x) = x\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ si $x \in]0;1]$ et on peut montrer comme en question **c.**, que $f\circ g$ n'appartient pas à BV.

Ainsi, la condition “f monotone” n’est pas suffisante pour que $f \circ g \in BV$ si $(f,g) \in BV^2$ avec $g : [0;1] \to [0;1]$.

8.11 **a.** E est non vide car $0 \in E$ et, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in E^2$, la fonction $\lambda f + g$ est de classe C^1 sur $[0;1]$par opérations et $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda.0 + 0 = 0$ donc $\lambda f + g \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $C^1([0;1],\mathbb{R})$ donc est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, comme la norme infinie $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme sur $C^0([0;1],\mathbb{R})$ d’après le cours, donc a fortiori sur E qui en est un sous-espace vectoriel, par linéarité de la dérivation, on a $N_1(\lambda f) = ||\lambda f + (\lambda f)'||_\infty = ||\lambda(f+f')||_\infty = |\lambda|\,||f+f'||_\infty = |\lambda|\,N_1(f)$.

De même, $N_2(\lambda f) = ||(\lambda f)'||_\infty = ||\lambda f'||_\infty = |\lambda|\,||f'||_\infty = |\lambda|\,N_2(f)$.

Inégalité triangulaire : soit $(f,g) \in E^2$, par linéarité de la dérivation et car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme sur E, $N_1(f+g) = ||(f+g)+(f+g)'||_\infty = ||f+g+f'+g'||_\infty = ||(f+f')+(g+g')||_\infty \leqslant ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N_1(f)+N_1(g)$.

De même, $N_2(f+g) = ||(f+g)'||_\infty = ||f'+g'||_\infty \leqslant ||f'||_\infty + ||g'||_\infty = N_2(f)+N_2(g)$.

Séparation pour N_1 : soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$, alors $f'+f = 0$ car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme. On sait résoudre cette équation différentielle sur l’intervalle $[0;1]$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = Ce^{-x}$. Mais $f \in E$ donc $f(0) = C = 0$ et on a bien $f = 0$.

Séparation pour N_2 : soit $f \in E$ telle que $N_2(f) = 0$, alors $f' = 0$ car $||\,.\,||_{\infty,[0;1]}$ est une norme. Comme $[0;1]$ est un intervalle, $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0;1],\ f(x) = C$. Mais $f \in E$ donc $f(0) = C = 0$ et on a bien $f = 0$.

Les deux applications N_1 et N_2 sont donc bien des normes sur E.

b. Domination de N_2 par N_1 : soit $f \in E$, posons $g = f + f'$. On sait résoudre l’équation homogène $(E_0)\ :\ y'+y = 0$ dont les solutions sur l’intervalle $[0;1]$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par variation de la constante, on trouve classiquement que les solutions de $(E)\ :\ y'+y = g$ sont les fonctions $y : x \mapsto \lambda e^{-x} + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or f est solution de cette équation mais vérifie aussi $f(0) = 0$ car $f \in E$ donc $\lambda = 0$ et $\forall x \in [0;1],\ f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$ donc $f'(x) = g(x) - f(x) = g(x) - e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)dt$. Ainsi, comme $\forall x \in [0;1],\ |g(x)| \leqslant N_1(f)$ et qu’on a $|f'(x)| \leqslant |g(x)| + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t|g(t)|dt$ par inégalité triangulaire, on trouve $|f'(x)| \leqslant \left(1 + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t dt\right)N_1(f) = (2 - e^{-x})N_1(f) \leqslant 2N_1(f)$. Ainsi, $N_2(f) \leqslant 2N_1(f)$.

Domination de N_1 par N_2 : soit $f \in E$ et $x \in [0;1]$, alors $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$ d’où, par inégalité triangulaire, la majoration $|f(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^x |f'(t)|dt \leqslant xN_2(f) \leqslant N_2(f)$. De plus, $|(f+f')(x)| = |f(x)+f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f'(x)|$ par inégalité triangulaire donc $|(f+f')(x)| \leqslant 2N_2(f)$ car $|f'(x)| \leqslant N_2(f)$. Par conséquent, on a $N_1(f) \leqslant 2N_2(f)$.

Par définition, comme N_1 domine N_2 et N_2 domine N_1, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.