CHAPITRE 7 PROBABILITÉS

⊙ On a joué aux dés et aux cartes depuis l'antiquité en Égypte, en Mésopotamie, en Inde il y a 5000 ans. Le véritable début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654 au sujet d'une désormais célèbre question posée par le chevalier de Méré au sujet du problème des partis et du lancer de deux dés. Le traité de Huygens, qui fait le point sur cette question, est resté le seul ouvrage important de la théorie des probabilités jusqu'au début du XVIII^{e} siècle.

Abraham de Moivre publie en 1718 The Doctrine of Chances contenant des problèmes combinatoires dont la formule de Stirling, des probabilités conditionnelles ainsi qu'une approximation de loi normale par une loi binomiale, c'est la première version du théorème central limite dit théorème de Moivre-Laplace.

Puis Jacques Bernoulli énonce la loi des grands nombres, nommée ainsi plus tard par Poisson. Nicolas Bernoulli publie en 1711 sa thèse de doctorat où apparaît pour la première fois la loi uniforme discrète et enfin Daniel Bernoulli étudie, autour de 1732, des applications du calcul des probabilités aux problèmes d'assurance, à l'astronomie, au calcul d'erreur ou au paradoxe de Saint-Pétersbourg.

Joseph-Louis Lagrange publie vers 1770 un mémoire contenant des problèmes de durée d'un jeu de hasard et utilisant des lois continues. Débute alors la considération du caractère continu des probabilités. Au début du XIX^{e} siècle, Laplace publie son traité intitulé Théorie analytique des probabilités dans lequel il présente des résultats asymptotiques étant ainsi un des premiers ouvrages à distinguer des énoncés de principes probabilistes aux estimations des probabilités observées à la suite d'une expérience.

La théorie des probabilités va prendre un nouvel essor vers le début du XX^{e} siècle grâce à l'introduction du concept de mesures qui apparaissent sous différentes définitions suivant les travaux de Georg Cantor en 1884, de Giuseppe Peano en 1887 ou Camille Jordan en 1892. Mais c'est à Émile Borel que l'on attribue la paternité de la théorie de la mesure avec l'introduction d'ensembles de mesure nulle en 1897, et de la classe des parties appelées boréliennes depuis. En 1901, Henri-Léon Lebesgue utilise cette théorie de la mesure pour développer la théorie de l'intégration qui généralise l'intégrale de Riemann. Avec Johann Radon en 1913, cette théorie se généralise sur $\mathbb{R}^n$ puis sur un ensemble plus abstrait Ω muni d'une tribu.

C'est à partir de 1930 que Andreï Kolmogorov fonde mathématiquement la théorie des probabilités en posant les trois axiomes des probabilités qui la définissent de manière rigoureuse et consistante.

TABLE DES MATIÈRES

PROGRAMME

La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.

Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- *Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.*

  Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- *En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\sum\limits_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i\in I_n} x_i\Big)$.*

  La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\sum\limits_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.*

  En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, *produit de deux sommes.*

1 : Univers, événements

Contenus	Capacités & Commentaires
Univers Ω, tribu $\mathcal{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.	*On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.*
	Traduction de la réalisation des événements $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	*Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.*

2 : Probabilité

Contenus	Capacités & Commentaires
Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, σ-*additivité.*	*Notation* $P(A)$.
Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire.	
Croissance de la probabilité.	
Continuité croissante, continuité décroissante.	*Application : pour une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'événements (non nécessairement monotone), limites quand* n *tend vers l'infini de* $P\Big(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\Big)$ *et* $P\Big(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\Big)$.
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	*En cas de divergence de la série à termes positifs* $\sum P(A_n)$, *on rappelle que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.
Événement presque sûr, événement négligeable.	*Système quasi-complet d'événements.*

3 : Probabilités conditionnelles

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $P(B) > 0$, *la probabilité conditionnelle de* A *sachant* B *est définie par la relation* $P(A\vert B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.	
L'application P_B *définit une probabilité.*	
Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	*Si* $(A_n)_{n\geqslant 0}$ *est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors* $P(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(B\vert A_n)P(A_n)$. *On rappelle la convention* $P(B\vert A_n)P(A_n) = 0$ *lorsque* $P(A_n) = 0$.
Formule de Bayes.	

4 : Événements indépendants

Contenus	Capacités & Commentaires
Indépendance de deux événements.	*Si* $P(B) > 0$, *l'indépendance de* A *et* B *équivaut à* $P(A\vert B) = P(A)$.
Indépendance d'une famille finie d'événements.	*L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.*
Si A *et* B *sont indépendants,* A *et* $\overline{B}$ *le sont aussi.*	*Extension au cas de* n *événements.*

PARTIE 7.1 : ENSEMBLES

7.1.1 : Équipotence (HP) et ensembles finis

⊙ *On admet connu l'ensemble* $\mathbb{N}$ *muni de ses deux lois internes* $+$ *et* $\times$ *avec leurs propriétés respectives (neutre, commutativité, associativité) et croisées (distributivité), de ses deux ordres* $\leqslant$ *(total) et* $|$ *avec leurs compatibilités vis-à-vis de* $+$ *et* $\times$*. Le principe de récurrence fait partie de ces propriétés de base de* $\mathbb{N}$*.*

THÉORÈME SUR LES EXTREMA DES PARTIES DE $\mathbb{N}$ (ÉNORME) 7.1 :
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (un minimum) et toute partie non vide majorée admet un plus grand élément (un maximum).

DÉFINITION 7.1 :
On dit que deux ensembles non vides E *et* F *sont* **équipotents***, noté* $E \sim F$*, s'il existe* $f : E \to F$ *bijective.*

EXEMPLE 7.1 *:* • *Il est clair que* $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$ *grâce à l'application* $n \mapsto n+1$*.*
• $\mathbb{R} \sim \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *par l'intermédiaire de la fonction* Arctan*.*

REMARQUE HP 7.1 :

• *Cette relation d'équipotence est réflexive, symétrique et transitive mais ce n'est pas une relation d'équivalence car il n'existe aucun ensemble contenant tous les ensembles (voir paradoxe de* RUSSELL*).*

• *On admet le théorème de* CANTOR-BERNSTEIN *qui affirme que, pour deux ensembles* E *et* F*, s'il existe* $f : E \to F$ *et* $g : F \to E$ *injectives, alors* E *et* F *sont équipotents.*

DÉFINITION 7.2 :
Soit E *un ensemble, on dit que* E *est* **fini** *si* $E = \emptyset$ *ou s'il existe un entier* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $E \sim [\![1;n]\!]$*.*

On dit que E *est* **infini** *dans le cas contraire.*

REMARQUE 7.2 : Si $E \neq \emptyset$ *est fini, on montre que* $\exists! n \in \mathbb{N}^*,\ E \sim [\![1;n]\!]$*.*

DÉFINITION 7.3 :
Soit E *un ensemble fini, on définit son* **cardinal***, noté* $\mathrm{card}\,(E)$ *ou* $|E|$ *ou* $\#E$*, par :*
$\mathrm{card}\,(E) = 0$ *si* $E = \emptyset$ *;* $\mathrm{card}(E) = n$ *où* n *est l'unique entier* n *tel que* $E \sim [\![1;n]\!]$ *sinon.*

REMARQUE 7.3 : • *Pour deux entiers* $a \leqslant b$*, on a* $\mathrm{card}\,([\![a;b]\!]) = b - a + 1$*.*

• *Tout ensemble* E *fini de cardinal* n *s'écrira* $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ *où les éléments sont distincts 2 à 2.*

PROPOSITION SUR LES PARTIES DES ENSEMBLES FINIS 7.2 :
Pour deux ensembles non vides finis E et F : $(E \sim F) \Longleftrightarrow \big(\mathrm{card}\,(E) = \mathrm{card}\,(F)\big)$**.**

Soit E un ensemble fini, alors toute partie A de E est finie et on a $\mathrm{card}\,(A) \leqslant \mathrm{card}\,(E)$**.**

De plus, si $A \subset E$, on a $A = E \Longleftrightarrow \mathrm{card}\,(A) = \mathrm{card}\,(E)$**.**

<u>*REMARQUE 7.4*</u> *:* • *Toute intersection et toute réunion finie d'ensembles finis est finie.*

• *Soit, pour une partie* A *d'un ensemble* E *quelconque, la* **fonction indicatrice** *(appelée aussi fonction caractéristique) de* A*, notée* $\mathbb{1}_A$*, par* $\mathbb{1}_A(x) = 1$ *si* $x \in A$ *et* $\mathbb{1}_A(x) = 0$ *si* $x \in E \setminus A$.

• *Alors* $A = B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$*, et* $A \subset B \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$*, puis* $\mathbb{1}_E = 1$ *et* $\mathbb{1}_\emptyset = 0$ *(fonctions constantes).*

• *Si* A *et* B *sont des parties de* E*,* $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ *et* $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

• *Si* E *est fini, on a* $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \mathrm{card}\,(A) = \sum\limits_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$*. En notant* $\overline{A}$ *le complémentaire de* A *dans* E*,* $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ *d'où* $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ *et en sommant les images de tous les* $x \in E$ *par ces applications, on obtient* $\mathrm{card}\,(\overline{A}) = \mathrm{card}\,(E) - \mathrm{card}\,(A)$ *et* $\mathrm{card}\,(A \setminus B) = \mathrm{card}\,(A) - \mathrm{card}\,(A \cap B)$.

PROPOSITION SUR LE CARDINAL D'UNE RÉUNION 7.3 :
Soit A **et** B **deux parties d'un ensemble fini** E**, alors :** $\mathrm{card}\,(A\cup B) = \mathrm{card}\,(A) + \mathrm{card}\,(B) - \mathrm{card}\,(A\cap B)$.

7.1.2 : Applications et cardinaux, dénombrement

THÉORÈME SUR DES CONDITIONS D'INJECTIVITÉ ET DE SURJECTIVITÉ 7.4 :
Soit $f : E \to F$ **une application avec** E **ensemble fini, alors on a :**

- $\mathrm{Im}(f)$ **est fini et** $\mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,f) \leqslant \mathrm{card}\,E$ **; de plus,** $\mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,f) = \mathrm{card}\,(E) \Longleftrightarrow f$ **injective.**
- **si** F **est fini on a** $\mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,f) \leqslant \mathrm{card}\,F$ **; de plus,** $\mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,f) = \mathrm{card}\,(F) \Longleftrightarrow f$ **surjective.**

PROPOSITION 7.5 :
Si $f : E \to F$ **est une application entre deux ensembles finis :**

f **injective** $\Longrightarrow \mathrm{card}\,(E) \leqslant \mathrm{card}\,(F)$ **;** f **surjective** $\Longrightarrow \mathrm{card}\,(E) \geqslant \mathrm{card}\,(F)$ **;** f **bij.** $\Longrightarrow \mathrm{card}\,(E) = \mathrm{card}\,(F)$.

<u>*REMARQUE 7.5*</u> *: D'où le* **principe des tiroirs** *de* DIRICHLET *: si deux ensembles* E *et* F *sont finis et si* $\mathrm{card}\,(E) > \mathrm{card}\,(F)$ *alors il n'y a pas d'injection de* E *dans* F *(trop de chaussettes pour les tiroirs).*

THÉORÈME SUR UNE CARACTÉRISATION DE LA BIJECTIVITÉ POUR UNE APPLICATION ENTRE ENSEMBLES DE MÊME CARDINAL (ÉNORME) 7.6 :
Soit $f : E \to F$ **une application entre deux ensembles finis de même cardinal (en particulier si** $E = F$ **fini), alors on a :** f **injective** $\Longleftrightarrow$ f **surjective** $\Longleftrightarrow$ f **bijective.**

<u>*REMARQUE 7.6*</u> *: Ça ne marche pas pour les ensembles infinis avec* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que* $f(n) = n + 1$.

PROPOSITION SUR LE CARDINAL D'UNE RÉUNION DE PARTIES 7.7 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $E_1, \cdots, E_n$ **ensembles finis disjoints deux à deux :** $\mathrm{card}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{card}\,(E_k)$.

<u>*REMARQUE 7.7*</u> *:*

- *Si* $\{E_1, \cdots, E_p\}$ *constitue une* **partition** *ou un* **partage** *d'un ensemble fini* E, *c'est-à-dire si* $E_1, \cdots, E_p$ *sont disjoints deux à deux et* $E = \bigcup_{k=1}^{p} E_k$ *(*$E_k \neq \emptyset$ *pour une partition), alors* $\sum_{k=1}^{n} \text{card}(E_k) = \text{card}(E)$.
- *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$, E *et* F *deux ensembles finis et* $f : E \to F$ *qui vérifie :* $\forall y \in F$, y *possède exactement* p *antécédent(s). Alors* $\text{card}(E) = p\,\text{card}(F)$ *(***lemme des bergers***).*

PROPOSITION SUR PRODUITS CARTÉSIENS ET ENSEMBLES DE FONCTIONS 7.8 :
Soit E, F **deux ensembles finis de cardinaux respectifs** n, p, **alors** $E \times F$ **est fini et** $\text{card}(E \times F) = np$.

Par récurrence, E^m **est fini pour** $m \in \mathbb{N}^*$ **et** $\text{card}(E^m) = n^m$.

Soit E **et** F **deux ensembles finis de cardinaux respectifs** n **et** p, **alors** $\text{card}(\mathcal{F}(E, F)) = p^n$.

<u>*REMARQUE 7.8*</u> *: Cela justifie la notation* F^E *pour les familles d'éléments de* F *indexées par* E.

PROPOSITION SUR LES ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS 7.9 :
Soit E **et** F **deux ensembles finis de cardinaux respectifs** n **et** p **avec** $n \leqslant p$.
Il y a exactement $A_p^n = \dfrac{p!}{(p-n)!}$ **injections de** E **dans** F.

Il y a aussi A_p^n n**-listes (ou** n**-uplets) d'éléments distincts de** F.

Soit E **un ensemble fini de cardinal** n, **alors il y a exactement** $n!$ **permutations de** E.

<u>*REMARQUE 7.9*</u> *:* • *Le nombre de surjections entre ensembles finis est plus difficile à établir.*
• *En mettant en bijection les parties de* E *et les fonctions caractéristiques* $f \in \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$*,...*

PROPOSITION SUR LES PARTIES D'UN ENSEMBLE ET COMBINAISONS 7.10 :
Soit E **un ensemble fini de cardinal** n, $\mathcal{P}(E)$ **est fini et** $\text{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$.

Soit E **un ensemble fini de cardinal** n **et** $p \in [\![0; n]\!]$, **alors en notant** $\mathcal{P}_p(E)$ **l'ensemble des parties de** E **à** p **éléments, on a** $\mathcal{P}_p(E)$ **fini et** $\text{card}\big(\mathcal{P}_p(E)\big) = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

<u>*REMARQUE HP 7.10*</u> *: Plus général, si* $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *est une famille de parties d'un ensemble fini* E *:*

$$\text{card}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{card}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big)\Big)$$ *(***formule du crible ou de** POINCARÉ*).*

DÉFINITION 7.4 :
Si $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, *on définit le* **coefficient binomial** $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ *si* $p \in [\![0; n]\!]$ *et* $\dbinom{n}{p} = 0$ *sinon.*

PROPOSITION SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX 7.11 :
On dispose sur les coefficients binomiaux de formules classiques :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z},\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1},\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p},\ p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Soit A **un anneau,** $(x, y) \in A^2$, $n \in \mathbb{N}$, $xy = yx$ **:** $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} x^k y^{n-k}$ **(binôme de** NEWTON**).**

REMARQUE 7.11 : • Formule des colonnes (classique) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant n,\ \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$.

• $\binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2},\ \binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6},\ \binom{n}{4} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$, *etc...*

EXERCICE CLASSIQUE 7.2 : *Formule de* VANDERMONDE.

Montrer que si $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

REMARQUE HP 7.12 : Si $x_1, \cdots, x_p$ *sont* p *éléments d'un anneau qui commutent deux à deux :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (x_1 + \cdots + x_p)^n = \sum_{\substack{(k_1,\cdots,k_p)\in\mathbb{N}^p \\ k_1+\cdots k_p = n}} \frac{n!}{k_1!\cdots k_p!} x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p} \quad \text{(\textbf{formule du multinôme})}.$$

On compte les $x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$ *(pour* $(k_1, \cdots, k_p) \in \mathbb{N}^p$ *tel que* $k_1 + \cdots k_p = n$*) obtenus en développant* $(x_1 + \cdots + x_p)^n$ *:* $\binom{n}{k_1}$ *pour le choix des parenthèses où l'on prend* x_1*,* $\binom{n-k_1}{k_2}$ *celles restantes où l'on prend* x_2*, etc... jusqu'à* $\binom{n-k_1-\cdots-k_{p-1}}{k_p} = 1$ *(plus de choix) pour celles où l'on prend* x_p.

En effectuant le produit (arbre de choix) : $\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1)}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{p-1}}{k_p} = \dfrac{n!}{k_1!\cdots k_p!}$.

EXERCICE 7.3 : *Les entiers* n *et* k *étant donnés, soit* $E_{n,k}$ *l'ensemble des solutions* $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ *de* $\mathbb{N}^k$ *de l'équation :* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$*. Soit* $F_{n,k}$ *l'ensemble des applications strictement croissantes* s *de* $[\![0;k]\!]$ *dans* $\mathbb{N}$ *telles que* $s(0) = 0$ *et* $s(k) = n + k$*. Calculer* $\operatorname{card} F_{n,k}$ *et en déduire* $\operatorname{card} E_{n,k}$.

ORAL BLANC 7.4 : *Centrale PSI 2012*

a. *Compter les applications surjectives de* $[\![1;n+1]\!]$ *dans* $[\![1;n]\!]$.

b. *Compter les applications surjectives de* $[\![1;n+2]\!]$ *dans* $[\![1;n]\!]$.

7.1.3 : Ensembles dénombrables (HP)

DÉFINITION 7.5 :

On dit qu'un ensemble est **dénombrable** *s'il est équipotent à* $\mathbb{N}$.

Un ensemble est dit **au plus dénombrable** *s'il est fini ou dénombrable.*

REMARQUE 7.13 : • $\mathbb{N}^*$ *est dénombrable car* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ *telle que* $f(n) = n + 1$ *est bijective.*

• $\mathbb{Z}$ *est dénombrable car* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *telle que* $f(2n) = n$ *et* $f(2n+1) = -n-1$ *est une bijection.*

• $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable car* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *telle que* $f(n,m) = \dfrac{1}{2}((n+m)^2 + 3n + m)$ *est bijective.*

• E *dénombrable s'écrira* $E = \{x_0, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *(écriture en extension).*

PROPOSITION 7.12 :

Si E est fini et F dénombrable alors $E \times F$ est dénombrable.

Si E et F sont dénombrables alors $E \times F$ est dénombrable.

REMARQUE 7.14 : • Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

• La réunion de deux ensembles dénombrables l'est encore.

• Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables l'est encore.

• Tout produit fini d'ensembles dénombrables l'est encore.

EXEMPLE 7.5 : • *Ni* $\mathbb{R}$*, ni* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *ne sont dénombrables.*

• Même s'il est dense dans $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

PARTIE 7.2 : FAMILLES SOMMABLES

7.2.1 : Borne supérieure

DÉFINITION 7.6 :
Sur $[0;+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, *on prolonge les opérations* $+$ *et* $\times$ *classiques en rajoutant :*
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$,
- $a \times (+\infty) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ *si* $a > 0$ *et* $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

On prolonge aussi la relation d'ordre $\leqslant$ *en convenant que* $a \leqslant (+\infty)$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$, $(+\infty) \leqslant (+\infty)$.

REMARQUE 7.15 : • *Ces nouvelles lois* $+$ *et* $\times$ *restent commutatives avec* 0 *et* 1 *pour neutres.*
- *La loi* $\times$ *est encore distributive par rapport à la loi* $+$ *(traiter tous les cas).*
- *On ne peut plus simplifier pour la loi* $+$ *car* $1 + (+\infty) = 0 + (+\infty)$ *alors que* $0 \neq 1$.
- *On ne peut pas non plus toujours simplifier pour la loi* $\times$: $1 \times (+\infty) = 2 \times (+\infty)$ *alors que* $1 \neq 2$.
- $\leqslant$ *est à nouveau une relation d'ordre total sur* $[0;+\infty]$.
- *Ce nouveau* $\leqslant$ *est toujours compatible avec l'addition de deux éléments de* $[0;+\infty]$, *ce qui s'énonce* $\forall (a,b,c) \in [0;+\infty]^3,\ a \leqslant b \Longrightarrow a + c \leqslant b + c$ *(traiter tous les cas).*
- *Cette implication n'est pas une équivalence comme dans* $\mathbb{R}$: $1 + (+\infty) \leqslant 0 + (+\infty)$ *alors que* $1 \nleqslant 0$.
- *Ce nouveau* $\leqslant$ *est aussi compatible avec la multiplication de deux éléments de* $[0;+\infty]$, *ce qui s'énonce* $\forall (a,b,c) \in [0;+\infty]^3,\ a \leqslant b \Longrightarrow a \times c \leqslant b \times c$ *(traiter tous les cas).*
- *Cette implication n'est pas une équivalence comme dans* $\mathbb{R}_+^*$: $2 \times (+\infty) \leqslant 1 \times (+\infty)$ *alors que* $2 \nleqslant 1$.

PROPOSITION 7.13 :
Toute partie A de $[0;+\infty]$ admet une borne supérieure (le plus petit des majorants) :
- $\mathrm{Sup}(A)$ **est la borne supérieure classique si** $A \subset [0;+\infty[$ **et** A **majoré dans** $\mathbb{R}_+$.
- $\mathrm{Sup}(A) = +\infty$ **si** $+\infty \in A$ **ou si** A **non majoré dans** $\mathbb{R}_+$ **et** $\mathrm{Sup}(A) = 0$ **si** $A = \emptyset$.

REMARQUE 7.16 : Tous les éléments de $[0;+\infty]$ *sont des majorants de* $\emptyset$: 0 *en est le plus petit !*

PROPOSITION 7.14 :
Si A et B sont des parties de $[0;+\infty]$ et $\lambda \in [0;+\infty]$, on a l'implication $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Sup}(A) \leqslant \mathrm{Sup}(B)$ **et les deux relations** $\mathrm{Sup}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$ **et** $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$.

7.2.2 : Familles de réels positifs

REMARQUE 7.17 : Traitons deux cas "simples" :
- *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty]$ *avec* I *finie,* $S = \sum\limits_{i\in I} x_i$ *vaut* $+\infty$ *s'il existe* $i \in I$ *tel que* $x_i = +\infty$ *et c'est la somme habituelle sinon. Soit* $J \in \mathcal{P}(I)$, *on a donc* $\sum\limits_{i\in J} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} x_i = S$ *(par positivité des* x_i*) donc* S *est un majorant de* $A = \Big\{ \sum\limits_{i\in J} x_i \mid J \subset I \Big\}$ *et* $S \in A$ *avec* $J = I$ *donc* $S = \mathrm{Max}(A) = \mathrm{Sup}(A)$.
- *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ *est convergente. Soit* J *une partie finie de* $\mathbb{N}$, *toujours par positivité,* $\sum\limits_{i\in J} x_i \leqslant \sum\limits_{i=0}^{\mathrm{Max}(J)} x_i = S_{\mathrm{Max}(J)} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ *donc* $A = \Big\{ \sum\limits_{i\in J} x_i \mid J \subset I \text{ avec } J \text{ fini} \Big\}$ *est majorée par* S *et, comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, *on a* $\mathrm{Sup}(A) = S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ *par caractérisation séquentielle.*

DÉFINITION 7.7 :
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty]$ *indexée par* I*, on note* $\mathcal{P}_f(I)$ *l'ensemble des parties finies de* I*. On pose* $A = \left\{ \sum_{i\in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \subset [0;+\infty]$.
On appelle somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$ *l'élément de* $[0;+\infty]$*, noté* $\sum_{i\in I} x_i$*, défini par* $\sum_{i\in I} x_i = \mathrm{Sup}(A) \in [0;+\infty]$.

REMARQUE 7.18 : On a quelques cas particuliers :

- *Si* I *est fini et les* x_i *dans* $[0;+\infty[$*, alors cette somme* $\sum_{i\in I} x_i$ *est la somme usuelle.*
- *Si* $I = \mathbb{N}$ *et les* $x_n \in [0;+\infty[$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ *si la série numérique* $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ *converge et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$ *si la série* $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ *diverge.*
- *S'il existe un indice* $i \in I$ *tel que* $x_i = +\infty$*, alors* $\sum_{i\in I} x_i = +\infty$.

DÉFINITION 7.8 :
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty[$ *indexée par* I.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable si* $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

PROPOSITION , RÈGLES DE CALCULS SUR LES SOMMES 7.15 :
Soit un ensemble I**,** $I' \subset I$**,** $\lambda \in [0;+\infty]$ **et deux familles** $(x_i)_{i\in I}$ **et** $(y_i)_{i\in I}$ **d'éléments de** $[0;+\infty]$.

(i) $\sum_{i\in I'} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$ **(restriction).**

(ii) $\sum_{i\in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ **(linéarité).**

(iii) **Si** $\forall i \in I,\ x_i \leqslant y_i$**, alors** $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$ **(croissance).**

THÉORÈME DE SOMMATION PAR PAQUETS (ÉNORME) 7.16 :
Pour tout recouvrement disjoint $I = \bigsqcup_{k\in K} I_k$ **d'un ensemble d'indices** I**, et toute famille** $(x_i)_{i\in I}$ **d'éléments de** $[0;+\infty]$**, on a** $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{j\in I_k} x_j \Big)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 7.19 : Quelques paquets classiques :

- *Pour* $I = \mathbb{N}$*, on a* $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$, $\mathbb{N} = (3\mathbb{N}) \sqcup (3\mathbb{N}+1) \sqcup (3\mathbb{N}+2)$*,...selon* n *modulo* 2, 3.
- *Pour* $I = \mathbb{N}$*, on peut écrire* $\mathbb{N} = \{0\} \sqcup \Big(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} [\![2^k; 2^{k+1}-1]\!] \Big)$ *selon le nombre de chiffres en base 2.*
- *Pour* $I = \mathbb{Z}$*, on a naturellement* $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \sqcup \{0\} \sqcup (-\mathbb{N}^*)$.
- *Pour* $I = \mathbb{N}^2$*, on peut partitionner en lignes* $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\{i\} \times \mathbb{N}\big)$ *ou en colonnes* $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} \big(\mathbb{N} \times \{j\}\big)$ *ou en diagonales finies* $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{d\in\mathbb{N}} \big\{(i, d-i) \mid i \in [\![0;d]\!]\big\}$.

THÉORÈME DE CALCUL DES SOMMES DE FAMILLES POSITIVES 7.17 :
Soit trois ensembles I, I' et J, σ une bijection de I' dans I, deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in J}$ d'éléments de $[0;+\infty]$ et une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ d'éléments de $[0;+\infty]$.

- $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i'\in I'} x_{\sigma(i')}$. **En particulier, si $I' = I$, $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i\in I} x_{\sigma(i)}$ est invariant par permutation des termes, elle ne dépend par de l'ordre de sommation.**
- $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big) = \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I} u_{i,j}\Big)$ **(théorème de FUBINI).**
- $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i\Big)\times\Big(\sum\limits_{j\in J} y_j\Big)$ **(familles produits).**

REMARQUE 7.20 : Pour une fois, on peut effectuer les calculs sans prouver la convergence d'abord : il faut en profiter ! La finitude de la somme vaut pour preuve de sommabilité.

EXEMPLE 7.6 *: Montrer que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{2^n} = 2$ *et que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\zeta(n)-1) = 1$.

ORAL BLANC 7.7 *: Soit $s > 1$ et $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs d'un entier n : par exemple* $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(30) = 8$. *Montrer que* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2$.

7.2.3 : Familles complexes

REMARQUE 7.21 : Si on se donne un ensemble quelconque I et une famille de complexes $(x_i)_{i\in I}$, on ne peut plus parler de somme directement mais on dispose toujours d'une notion de sommabilité, les sommes viendront une fois cette condition réalisée.

DÉFINITION 7.9 :
Soit I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si $\sum\limits_{i\in I} |x_i| < +\infty$. On note $\ell^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I.

REMARQUE 7.22 : • Si I est fini, alors toute famille $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ est bien sûr sommable.
- *Si $I = \mathbb{N}$, la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ converge absolument.*

PROPOSITION DE COMPARAISON 7.18 :
Soit I un ensemble, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Si on suppose que $\forall i\in I,\ |x_i| \leqslant y_i$ et que $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

DÉFINITION 7.10 :
Soit I un ensemble, $(x_i)_{i\in i}$ une famille sommable.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *Pour $i \in I$, on pose $x_i^+ = \mathrm{Max}(x_i, 0)$, $x_i^- = \mathrm{Max}(-x_i, 0)$. On définit la somme $S \in \mathbb{R}$ de la famille $(x_i)_{i\in I}$, notée $S = \sum\limits_{i\in I} x_i$, par $S = \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^+\Big) - \Big(\sum\limits_{i\in I} x_i^-\Big)$.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *On définit la somme notée $S = \sum\limits_{i\in I} x_i$ de la famille $(x_i)_{i\in I}$ par $S = \Big(\sum\limits_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i)\Big) + i\Big(\sum\limits_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i)\Big)$.*

REMARQUE 7.23 : Cette nouvelle définition de la somme d'une famille coïncide avec la définition précédente dans le cas de familles réelles positives car, dans ce cas, $x_i^+ = x_i$ et $x_i^- = 0$ pour tout $i \in I$.

THÉORÈME SUR LES PROPRIÉTÉS DES FAMILLES SOMMABLES 7.19 :
Soit I, I' et J trois ensembles, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit aussi $\sigma : I' \to I$ une bijection et deux familles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. On a alors les propriétés suivantes :

(i) **Restriction : si I' est une partie de I, alors $(x_i)_{i\in I'}$ est sommable.**

(ii) **Linéarité : la famille $(\lambda x_i + y_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$.**

(iii) **Croissance : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\forall i \in I,\ x_i \leqslant y_i$, alors $\sum\limits_{i\in I} x_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} y_i$.**

(iv) **Inégalité triangulaire : $\left|\sum\limits_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum\limits_{i\in I} |x_i|$.**

(v) **Sommation par paquets : pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k\in K}$ de I, c'est-à-dire que $I = \bigsqcup\limits_{k\in K} I_k$, la famille $\Big(\sum\limits_{j\in I_k} x_j\Big)_{k\in K}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{k\in K}\Big(\sum\limits_{j\in I_k} x_j\Big)$.**

(vi) **Changement d'indice : $(x_{\sigma(i')})_{i'\in I'}$ est sommable et $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i'\in I'} x_{\sigma(i')}$.**

(vii) **Théorème de FUBINI : les familles $\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big)_{i\in I}$ et $\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big)_{i\in I}$ sont sommables et on a la relation de FUBINI $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} u_{i,j}\Big) = \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in I} u_{i,j}\Big)$.**

(viii) **Familles produit : la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et $\sum\limits_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum\limits_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum\limits_{j\in J} b_j\Big)$.**

(ix) **Approximation : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists J \in \mathcal{P}_f(I),\ \left|\sum\limits_{i\in I} x_i - \sum\limits_{j\in J} x_j\right| \leqslant \varepsilon$.**

(x) **Produit de CAUCHY : en posant $p_n = \sum\limits_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} u_i v_j = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi sommable et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\Big) \times \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$.**

DÉMONSTRATION *:* Hors programme.

REMARQUE 7.24 :

- *Le résultat de linéarité du théorème ci-dessus montre que $\ell^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, sur lequel $S : \ell^1(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par $S\big((x_i)_{i\in i}\big) = \sum\limits_{i\in I} x_i$ est une forme linéaire.*
- *Pour une série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ absolument convergente, on se rend compte avec le changement d'indice du théorème ci-dessus avec $I = J = \mathbb{N}$ que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est commutativement convergente, c'est-à-dire que si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$.*

EXEMPLE 7.8 : *Pour $z \in \mathbb{C}$, la famille $(z^{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$.*

EXERCICE 7.9 : *Montrer la sommabilité et calculer la somme de la famille $\left(\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right)_{\substack{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ k<n}}$.*

PARTIE 7.3 : ESPACE PROBABILISÉ

7.3.1 : Tribu

⊙ *Dans l'optique de formaliser les expériences aléatoires, on appelle* **univers**, *noté traditionnellement* Ω, *l'ensemble de toutes les* **issues** *(ou* **éventualités**, **épreuves**, **résultats***) possibles d'une telle expérience : jet de dé, choix d'une boule dans une urne, tirage du loto,...*

EXEMPLE 7.10 **:**

- *Pile ou face : on prendra* $\Omega = \{0, 1\}$ *(0 pour pile et 1 pour face) pour un seul lancer,* $\{0, 1\}^n$ *pour un nombre* n *fini de lancers et* $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ *pour une suite dénombrable de lancers.*
- *Dans une urne contenant* n *boules discernables (numérotées), si on effectue* p *tirages d'une boule avec remise, on pourra prendre* $\Omega = [\![1; n]\!]^p$.

DÉFINITION 7.11 :

Soit Ω *un ensemble, on appelle* **tribu** *sur* Ω *toute partie* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *(ou* $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$*) telle que :*

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- *Si* $A \in \mathcal{A}$ *alors* $\overline{A} \in \mathcal{A}$ *(complémentaire de* A *dans* Ω*).*
- *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$ *alors* $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ *est une tribu sur* Ω*, univers d'une expérience aléatoire, les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelés les* **évènements** *de l'expérience aléatoire. On dit que* $(\Omega, \mathcal{A})$ *est un* **espace probabilisable**.

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS D'UNE TRIBU 7.20 :

Si $\mathcal{A}$ **est une tribu sur** Ω **et** A **et** B **deux évènements de** $\mathcal{A}$ **:**

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ **;** $A \cup B \in \mathcal{A}$ **;** $A \cap B \in \mathcal{A}$ **et aussi** $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
- **Si** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est une suite d'éléments de** $\mathcal{A}$ **alors** $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

REMARQUE 7.25 : Un peu de terminologie :

- Ω *est appelé* **évènement certain**, $\emptyset = \overline{\Omega}$ *est appelé* **évènement impossible**.
- *Si* A *est un évènement, l'évènement* $\overline{A}$ *est appelé* **évènement contraire** *de* A.
- *Si* $\omega \in \Omega$ *et si* $\{\omega\} \in \mathcal{A}$*, on dit que* $\{\omega\}$ *est un* **évènement élémentaire**.
- *Soit* $(A, B) \in \mathcal{A}^2$*, l'évènement* $A \cup B$ *(resp.* $A \cap B$*) est aussi appelé "*A *ou* B*" (resp. "*A *et* B*").*
- *Soit* $(A, B) \in \mathcal{A}^2$*, si* $A \subset B$*, on dit que l'évènement* A *implique l'évènement* B.
- *Deux évènements* A *et* B *sont dits* **incompatibles** *si* $A \cap B = \emptyset$.
- *Si* $A \in \mathcal{A}$*, les évènements* A *et* $\overline{A}$ *sont incompatibles.*
- *Si* A *et* B *sont des évènements incompatibles,* $C \in \mathcal{A}$ *et* C *implique* A*, alors* C *et* B *sont incompatibles.*

EXEMPLE 7.11 **:** *Soit trois dés de couleurs différentes, on lance les trois dés et on appelle* A *l'évènement :* $A =$ *"la somme des trois dés vaut 10". Modéliser cette expérience.*

REMARQUE 7.26 : Quelques tribus classiques (à part celles des cheveux propres ou sales,....) :

- *La* **tribu triviale** $\{\emptyset, \Omega\}$ *ou seules 2 parties de* Ω *sont des évènements.*
- *La* **tribu pleine** $\mathcal{P}(\Omega)$ *où toutes les parties de* Ω *sont des évènements.*
- *Si* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ *est la* **tribu engendrée par** A.

7.3.2 : Probabilité

DÉFINITION 7.12 :
Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω, on appelle **probabilité** *sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0;1]$ telle que :*
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(l'évènement certain a une probabilité maximale de 1).*
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ *suite d'évènements 2 à 2 incompatibles,* $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *(σ-additivité).*

Un **espace probabilisé** *est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*

PROPOSITION SUR LES PROPRIÉTÉS D'UNE PROBABILITÉ 7.21 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé :
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ **(l'évènement impossible a une probabilité minimale de 0).**
- **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \cdots, A_n$ des évènements 2 à 2 incompatibles :** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$**.**
- **Pour $A \in \mathcal{A}$, on a $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.**
- **Pour $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, on a $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.**
- **Pour $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.**

⊙ *On retrouve la définition de probabilité vue en première année où sur un ensemble fini Ω, on avait pris $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (tribu pleine) et où la seconde condition était $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pour A, B incompatibles. Mais cet axiome plus faible par rapport à celui de la définition précédente suffirait seulement, dans notre cadre, à établir (par une récurrence facile) que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ si $A_1, \cdots, A_n$ sont des évènements 2 à 2 incompatibles mais on ne pourrait pas aller jusqu'à la σ-additivité.*

PROPOSITION DE SOUS-ADDITIVITÉ FINIE 7.22 :
Pour des évènements $A_1, \cdots, A_n$: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$**.**

EXEMPLE 7.12 *: Sur une classe de 39 étudiants, en oubliant les années bissextiles et en supposant l'équiprobabilité des jours de naissance, quelle est la probabilité que deux d'entre eux soient nés le même jour (pas forcément de la même année) ?*

REMARQUE 7.27 : Quelques probabilités définie sur les évènements élémentaires :
- *Sur un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, la* **loi uniforme** *est définie par* $\mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big) = \frac{1}{n}$.
- *Sur un ensemble fini $\Omega = \{\omega_0, \cdots, \omega_n\}$, on peut définir la* **loi binomiale** *de paramètre $p \in]0;1[$ en posant* $\mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

PROPOSITION 7.23 :
Si $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0;1]^{\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\{\omega_n\}\big) = p_n$: la probabilité de $A \subset \Omega$ sera alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$ (soit une somme finie soit la somme d'une série).

DÉFINITION 7.13 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* A *un évènement, alors :*

- *on dit que* A *est un évènement* **négligeable** *si* $\mathbb{P}(A) = 0$.
- *on dit que* A *est un évènement* **presque sûr** *si* $\mathbb{P}(A) = 1$.

THÉORÈME DE CONTINUITÉS (DÉ)CROISSANTES (ÉNORME) 7.24 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **un espace probabilisé, soit** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite quelconque d'évènements :**

- **Si** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante pour l'inclusion** $(\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1})$**, alors on a la relation dite de** **<u>continuité croissante</u> :** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- **Si** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante pour l'inclusion** $(\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n)$**, alors on a la relation dite de** **<u>continuité décroissante</u> :** $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

<u>REMARQUE 7.28</u> : • *Une réunion finie ou dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.*

- *Une intersection finie ou dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûr.*
- *La sous-additivité est vraie si* $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ *diverge et qu'on a alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ *mais l'inégalité perd alors nettement de son intérêt. Elle en a peu d'ailleurs dès que* $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \geqslant 1$.

PROPOSITION 7.25 :
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite quelconque d'évènements :**

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \textbf{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

THÉORÈME DE SOUS-ADDITIVITÉ 7.26 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **un espace probabilisé, soit** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite quelconque d'évènements. On a** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

<u>EXEMPLE 7.13</u> : *On jette indéfiniment un dé non pipé à* $f \geqslant 1$ *faces, montrer que l'évènement* $A =$ *"on tombe au moins une fois sur* 1*" est presque sûr.*

PARTIE 7.4 : CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

⊙ *Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

7.4.1 : Probabilité conditionnelle

DÉFINITION 7.14 :
Soit $B \in \mathcal{A}$ un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Si $A \in \mathcal{A}$ est un évènement quelconque, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B**, *notée $\mathbb{P}_B(A)$ (ou même $\mathbb{P}(A|B)$), par la relation suivante :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ ce qui équivaut à } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B).$$

REMARQUE 7.29 : • *Attention, il n'existe pas d'évènement appelé "A sachant B" dans la tribu $\mathcal{A}$.*
• *La formule reste vraie si $\mathbb{P}(B) = 0$ en convenant que $\mathbb{P}_B(A)\,\mathbb{P}(B) = 0$ même si $\mathbb{P}_B(A)$ n'est pas défini.*

PROPOSITION DE STRUCTURE DE LA PROBABILITÉ CONDITIONNELLE 7.27 :
Soit $B \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \to [0;1]$ définie comme ci-dessus est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

EXEMPLE 7.14 : *Si $\Omega = [\![1;6]\!]^3$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour représenter le jet simultané de trois dés non pipés, la probabilité de faire un 421 sachant que les trois dés ont donné un résultat différent est de $\frac{1}{20}$.*

THÉORÈME SUR LA FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES 7.28 :
Si $A_1, \cdots, A_n$ sont des évènements de $\mathcal{A}$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, on a la formule suivante :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

REMARQUE 7.30 :
- *Cette formule permet à priori de calculer la probabilité de toute intersection finie.*
- *On peut alors calculer la probabilité d'une intersection dénombrable par continuité décroissante.*

EXERCICE 7.15 : *Dans une urne, il y a p boules blanches et une seule boule noire. À chaque étape, on tire une boule, on la remet dans l'urne en rajoutant aussi b boule(s) blanche(s).*
Quelle est la probabilité de l'évènement A_n = "on tire la boule noire à l'étape n et pas avant" ?
En déduire la probabilité de ne jamais tirer la boule noire si on répète ces opérations indéfiniment.
Indication : on pourra exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ sous la forme $u_{n-1} - u_n$.

DÉFINITION 7.15 :
On appelle **système complet d'évènements** *(noté souvent SCE) (resp.* **système quasi-complet***) toute famille $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ vérifiant les propriétés suivantes :*
- I *est un ensemble d'indices fini ou dénombrable.*
- $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\displaystyle\bigcup_{k \in I} A_k = \Omega$ *(resp.* $\mathbb{P}\Big(\displaystyle\bigcup_{k \in I} A_k\Big) = 1$*).*

REMARQUE 7.31 : • Si $A \subset \Omega$, $(A, \overline{A})$ est un système complet fini d'évènements (engendré par A).

- *Si $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, la famille $(A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B})$ l'est aussi (engendré par A et B).*
- *Si $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ alors $(\{\omega_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un SCE.*
- *Bien sûr, comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, tout SCE est un système quasi-complet d'évènements.*
- *Si A est presque sûr et si $B \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.*

THÉORÈME ET FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES (ÉNORME) 7.29 :
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet (ou quasi-complet) d'évènements et $B \in \mathcal{A}$. Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_n)$ converge et $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n)$.

REMARQUE 7.32 :

- *Même si pour certaines valeurs de n on a $\mathbb{P}(A_n) = 0$, cette formule des probabilités totales reste vraie car on peut convenir que $\mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n) = 0$ même si $\mathbb{P}_{A_n}(B)$ n'est pas clairement défini.*
- *Dans le cas d'un système complet fini $(A_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$, la formule devient : $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$.*

ORAL BLANC 7.16 *: On place une boule rouge dans une urne. On lance un dé à 6 faces non pipé. Si on fait un 6, on tire une boule dans l'urne, sinon on rajoute une boule blanche dans l'urne et on recommence. On ne fait qu'un seul tirage. Quelle est la probabilité de tirer la boule rouge ?*
Indication : on utilisera l'égalité $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1;1[$.

THÉORÈME SUR LA PREMIÈRE FORMULE DE BAYES 7.30 :
Si A et B sont deux évènements tels que $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) > 0$: $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

REMARQUE 7.33 : Cette formule de BAYES*, comme la suivante qui en découle par la formule des probabilités totales, est aussi appelée* **formule de probabilités des causes***.*

THÉORÈME SUR LA SECONDE FORMULE DE BAYES 7.31 :
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet (ou quasi-complet) d'évènements et $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.
Alors on a la formule de BAYES sous une autre forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_B(A_n) = \dfrac{\mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n)}{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(B)\,\mathbb{P}(A_k)}$.

REMARQUE 7.34 : Bien sûr, si le système complet d'évènements $(A_1, \cdots, A_n)$ ne contient qu'un nombre fini d'évènements, cette formule se ramène à : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbb{P}_{A_k}(B)\,\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i)}$.

EXERCICE CLASSIQUE 7.17 *: On propose à l'étude un test de dépistage d'un certain virus.*

- *Une personne sur 10000 est infectée par ce virus dans la population.*
- *Quand une personne est malade, le test est positif à 99%.*
- *Quand une personne n'est pas malade, le test est négatif à 99,9%.*

Calculer la probabilité qu'une personne positive au test soit effectivement infectée.

7.4.2 : Évènements indépendants

DÉFINITION 7.16 :
On dit que deux évènements A *et* B *sont des* **évènements indépendants** *si* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

REMARQUE 7.35 : • *Cette notion d'indépendance n'a rien à voir avec la notion d'incompatibilité.*

• *Si* $\mathbb{P}(B) = 0$, *alors* A *et* B *sont indépendants quel que soit l'évènement* A.

EXEMPLE 7.18 : *On considère un dé cubique non pipé et on effectue un lancer.*
On considère les évènements suivants : A = "*le résultat est pair*" ; B = "*le résultat est impair*" ; C = "*le résultat est* 1 *ou* 2". *Étudier leur incompatibilité et leur indépendance deux à deux.*

PROPOSITION SUR UNE CONDITION D'INDÉPENDANCE 7.32 :
Soit A **et** B **deux évènements tels que** $\mathbb{P}(B) > 0$ **:** $\big(A$ **et** B **sont indépendants**$\big) \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

REMARQUE 7.36 : Si A *et* B *sont des évènements indépendants alors :*

- A *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*
- $\overline{A}$ *et* B *sont indépendants.*
- $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

EXERCICE 7.19 : *Une urne contient des boules blanches et des boules rouges.*
On effectue deux tirages successifs et on s'intéresse aux évènements A : "*la première boule tirée est blanche*" et B : "*la deuxième boule tirée est blanche*".
Étudier leur indépendance si le tirage se fait avec remise, puis si le tirage est fait sans remise.

DÉFINITION 7.17 :
• *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ *une famille finie d'évènements. On dit que* $A_1, \cdots, A_n$ *sont des* **évènements indépendants** *si pour toute partie* $J \subset [\![1;n]\!]$ *on a* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$.
• *Soit* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une famille d'évènements. On dit que cette famille est* **indépendante** *si toute sous-famille finie de* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est une famille d'évènements indépendants.*

REMARQUE 7.37 :

• *Des évènements* A, B *et* C *sont indépendants si l'on vérifie les* 4 *égalités :*

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C),\ \mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C) \text{ et } \mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).$$

• *Pour prouver l'indépendance de* n *évènements, il faut vérifier* $2^n - n - 1$ *égalités.*

• *Toute sous-famille d'une famille d'évènements indépendants l'est aussi.*

• *Si* $(A_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ *est une famille d'évènements indépendants et si on a* $B_k \in \{A_k, \overline{A_k}\}$, *alors* $(B_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ *est aussi une famille d'évènements indépendants.*

• *Des évènements indépendants sont 2 à 2 indépendants (si* $\operatorname{card}(J) \geqslant 2$*) : la réciproque est fausse.*

EXEMPLE 7.20 : *On lance deux dés cubiques non pipés discernables (de couleurs différentes par exemple). On considère les trois évènements* A : "*le premier donne un résultat pair*" ; B : "*le deuxième donne un résultat pair*" ; C : "*la somme des deux dés est paire*". *Que peut-on dire de ces évènements ?*

EXERCICE CONCOURS 7.21 :

Soit $\mathcal{P}$ *l'ensemble des nombres premiers et, pour* $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

a. *Pour quelles valeurs de* $\lambda \in \mathbb{R}$, *la famille* $\left(\lambda n^{-s}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *définit-elle une loi de probabilité sur* $\mathbb{N}^*$ *par l'intermédiaire de* $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$ *?*

b. *Pour* p *nombre premier, on pose* $A_p = p\,\mathbb{N}^*$. *Montrer que les* $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ *sont indépendants pour la loi de probabilité précédente.*

c. *Prouver que* $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \dfrac{1}{1 - p^{-s}}$.

COMPÉTENCES

- *savoir reconnaître un ensemble fini, infini dénombrable ou pas.*
- *déterminer le cardinal d'un ensemble fini en créant une bijection avec un ensemble plus simple.*
- *trouver le cardinal d'un ensemble fini en le partitionnant en parties plus simples à dénombrer.*
- *manipuler avec dextérité les coefficients binomiaux avec les multiples formules.*
- *utiliser des majorations, la linéarité, pour montrer qu'une famille de réels positifs est sommable.*
- *utiliser les paquets,* FUBINI, *les "produits" pour calculer la somme d'une famille de réels positifs.*
- *utiliser la comparaison, les paquets pour montrer qu'une famille de complexes est sommable.*
- *utiliser* FUBINI, *les "produits", le produit de* CAUCHY *pour calculer la somme d'une famille complexe.*
- *savoir établir qu'une partie de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est une tribu.*
- *maîtriser la terminologie sur les différents types d'évènements.*
- *savoir prouver qu'une application sur une tribu est une probabilité.*
- *écrire un évènement* A *.... pour calculer* $\mathbb{P}(A)$ *par ... :*
  - *comme une réunion dénombrable d'évènements incompatibles* — σ*-additivité.*
  - *comme une intersection finie d'évènements* — *les "probabilités composées".*
  - *comme réunion d'une suite croissante d'évènements* — *continuité croissante.*
  - *comme intersection d'une suite décroissante d'évènements* — *continuité décroissante.*
  - *selon un système complet d'événements* — *les "probabilités totales".*
- *connaître les différentes formes de la formule de* BAYES *pour calculer une probabilité conditionnelle.*
- *reconnaître dans une expérience l'incompatibilité ou l'indépendance d'évènements sans confondre.*
- *ne pas mélanger l'indépendance et l'indépendance deux à deux pour plusieurs évènements.*