CHAPITRE 7
PROBABILITÉS

PARTIE 7.1 : ENSEMBLES

THÉORÈME ÉNORME 7.1 :
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (un minimum) et toute partie non vide majorée admet un plus grand élément (un maximum).

DÉFINITION 7.1 :
Deux ensembles non vides E, F sont dits **équipotents** *($E \sim F$) si $\exists f : E \to F$ bijective. On dit que E est* **fini** *si $E = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \sim [\![1;n]\!]$. On dit que E est* **infini** *dans le cas contraire.*

REMARQUE 7.1 : • Si $E \neq \emptyset$ est fini, on montre que $\exists! n \in \mathbb{N}^*,\ E \sim [\![1;n]\!]$..
• On admet le théorème de CANTOR-BERNSTEIN *qui affirme que, pour deux ensembles E et F, s'il existe $f : E \to F$ et $g : F \to E$ injectives, alors E et F sont équipotents.*

DÉFINITION 7.2 :
Soit E un ensemble fini, on définit son **cardinal***, noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$, par :*
$\text{card}(E) = 0$ *si $E = \emptyset$; $\text{card}(E) = n$ où n est l'unique entier n tel que $E \sim [\![1;n]\!]$ sinon.*

REMARQUE 7.2 : • Pour deux entiers $a \leqslant b$, on a $\text{card}([\![a;b]\!]) = b - a + 1$.
• Tout ensemble E fini de cardinal n s'écrira $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ où les éléments sont distincts 2 à 2.

PROPOSITION 7.2 :
Si E et F sont non vides et finis : $(E \sim F) \iff \big(\text{card}(E) = \text{card}(F)\big)$.
Soit E un ensemble fini, alors toute partie A de E est finie et on a $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$.
De plus, si $A \subset E$, on a $A = E \iff \text{card}(A) = \text{card}(E)$.

REMARQUE 7.3 : • Toute intersection et toute réunion finie d'ensembles finis est finie.
• Soit E fini et $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$..
• Si $\overline{A}$ est le complémentaire de A, $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$ et $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$.

THÉORÈME 7.3 :
Soit $f : E \to F$ une application avec E ensemble fini, alors on a :
- **$\text{Im}(f)$ est fini et $\text{card}(\text{Im}\, f) \leqslant \text{card}\, E$; de plus, $\text{card}(\text{Im}\, f) = \text{card}(E) \iff f$ injective.**
- **si F est fini on a $\text{card}(\text{Im}\, f) \leqslant \text{card}\, F$; de plus, $\text{card}(\text{Im}\, f) = \text{card}(F) \iff f$ surjective. On a aussi f inj. $\Longrightarrow \text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$; f surj. $\Longrightarrow \text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$; f bij. $\Longrightarrow \text{card}(E) = \text{card}(F)$.**

REMARQUE 7.4 : D'où le **principe des tiroirs** *de* DIRICHLET *: si deux ensembles E et F sont finis et si $\text{card}(E) > \text{card}(F)$ alors il n'y a pas d'injection de E dans F (trop de chaussettes pour les tiroirs).*

THÉORÈME ÉNORME 7.4 :
Soit $f : E \to F$ avec E, F de même cardinal fini : f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective.

PROPOSITION 7.5 :
Soit $E_1, \cdots, E_n$ finis disjoints 2 à 2 : $\text{card}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \text{card}(E_k)$.

<u>*REMARQUE 7.5*</u> *:* • *Si* $\{E_1, \cdots, E_p\}$ *constitue une* **partition** *de* E *fini :* $\sum_{k=1}^{p} \text{card}(E_k) = \text{card}(E)$.

• *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$, E *et* F *deux ensembles finis et* $f : E \to F$ *qui vérifie :* $\forall y \in F$, y *possède exactement* p *antécédent(s). Alors* $\text{card}(E) = p \times \text{card}(F)$ *(***lemme des bergers***).*

PROPOSITION 7.6 :
Soit E, F **deux ensembles finis de cardinaux respectifs** $n \leqslant p$**.**
$E \times F$ **est fini et** $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$**.** E^m **est fini si** $m \in \mathbb{N}^*$ **et** $\text{card}(E^m) = (\text{card}(E))^m$**.**
De plus, $\mathcal{F}(E, F)$ **est aussi fini et** $\text{card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\text{card}(F))^{\text{card}(E)}$**.**
Il y a exactement $A_p^n = \dfrac{p!}{(p-n)!}$ **injections de** E **dans** F**.**
Il y a aussi A_p^n n**-listes (ou** n**-uplets) d'éléments distincts de** F**.**
Soit E **un ensemble fini de cardinal** n**, alors il y a exactement** $n!$ **permutations de** E**.**
Soit E **un ensemble fini de cardinal** n**,** $\mathcal{P}(E)$ **est fini et** $\text{card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$**.**
Soit E **un ensemble fini de cardinal** n **et** $p \in [\![0; n]\!]$**, alors en notant** $\mathcal{P}_p(E)$ **l'ensemble des parties de** E **à** p **éléments, on a** $\mathcal{P}_p(E)$ **fini et** $\text{card}\big(\mathcal{P}_p(E)\big) = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$**.**

DÉFINITION 7.3 :
Si $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ *si* $p \in [\![0; n]\!]$ *et* $\dbinom{n}{p} = 0$ *sinon.*

PROPOSITION 7.7 :
$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$.
Soit A **un anneau,** $(x, y) \in A^2$**,** $n \in \mathbb{N}$**,** $xy = yx$ **:** $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} x^k y^{n-k}$ **(binôme de** Newton**).**

DÉFINITION 7.4 :
On dit qu'un ensemble est **dénombrable** *s'il est équipotent à* $\mathbb{N}$.

<u>*REMARQUE 7.6*</u> *:* • $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *sont dénombrables.*
• E *dénombrable s'écrira* $E = \{x_0, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *(écriture en extension).*
• *Si* E *est fini et* F *dénombrable (ou* E *et* F *sont dénombrables),* $E \times F$ *est dénombrable.*
• *Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable ; toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables l'est encore ; tout produit fini d'ensembles dénombrables l'est encore.*

<u>***EXEMPLE 7.1***</u> ***:*** $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et dénombrable. Ni $\mathbb{R}$, ni $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont dénombrables.

PARTIE 7.2 : ESPACE PROBABILISÉ

DÉFINITION 7.5 :
Soit Ω *un ensemble, on appelle* **tribu** *sur* Ω *toute partie* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *telle que :*
• $\Omega \in \mathcal{A}$. • *Si* $A \in \mathcal{A}$ *alors* $\overline{A} \in \mathcal{A}$. • *Si* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, *alors* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
Si $\mathcal{A}$ *est une tribu sur* Ω*, univers d'une expérience aléatoire, les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelés les* **évènements**.

PROPOSITION 7.8 :
Si $\mathcal{A}$ **est une tribu sur** Ω**,** A **et** B **deux évènements de** $\mathcal{A}$ **et** $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$**, alors :**
$\emptyset \in \mathcal{A}$ **;** $A \cup B \in \mathcal{A}$ **;** $A \cap B \in \mathcal{A}$ **;** $A \setminus B \in \mathcal{A}$ **et** $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$**.**

REMARQUE 7.7 : Un peu de terminologie :

- Ω *est appelé* **évènement certain**, $\emptyset = \overline{\Omega}$ *est appelé* **évènement impossible**.
- *Si* A *est un évènement, l'évènement* $\overline{A}$ *est appelé* **évènement contraire** *de* A.
- *Si* $\omega \in \Omega$ *et si* $\{\omega\} \in \mathcal{A}$, *on dit que* $\{\omega\}$ *est un* **évènement élémentaire**.
- *Soit* $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, *si* $A \subset B$, *on dit que l'évènement* A *implique l'évènement* B.
- *Deux évènements* A *et* B *sont dits* **incompatibles** *si* $A \cap B = \emptyset$.

DÉFINITION 7.6 :
Soit $\mathcal{A}$ *une tribu sur un ensemble* Ω, *on appelle* **probabilité** *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *toute* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0; 1]$ *telle que :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. • $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ <u>*2 à 2 incompatibles*</u>, $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *(σ-additivité).*

Un **espace probabilisé** *est un triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *où* $\mathcal{A}$ *est une tribu sur* Ω *et* $\mathbb{P}$ *une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.

PROPOSITION 7.9 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **un espace probabilisé, alors** $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ **et :**

- **Soit** $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $A_1, \cdots, A_n$ **des évènements** <u>**2 à 2 incompatibles**</u> **:** $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.
- **Pour** $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; $A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ **et** $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- **Pour des évènements** $A_1, \cdots, A_n$ **:** $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

REMARQUE 7.8 : Quelques probabilités définie sur les évènements élémentaires :

- *Sur un ensemble fini* $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, *la* **loi uniforme** *est définie par* $\mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big) = \dfrac{1}{n}$.
- *Si* $\Omega = \{\omega_0, \cdots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ *(***loi binomiale** *de paramètre* $p \in]0; 1[$*).*
- *Si* $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est dénombrable et si* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ *est telle que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, *il existe une unique probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* Ω *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\big(\{\omega_n\}\big) = p_n$ *: si* $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{x\in A} \mathbb{P}(\{x\})$.

DÉFINITION 7.7 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $A \in \mathcal{A}$.
On dit que A *est* **négligeable** *si* $\mathbb{P}(A) = 0$ *et que* A *est* **presque sûr** *si* $\mathbb{P}(A) = 1$.

THÉORÈME 7.10 :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **un espace probabilisé et** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite d'évènements :**

- **Si** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante pour l'inclusion (resp. décroissante), on a la continuité croissante (resp. continuité décroissante) :** $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ **(resp.** $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$**).**
- **Si** $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ **converge alors** $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ **(sous-additivité).**

REMARQUE 7.9 : • Une réunion finie ou dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.

- *Une intersection finie ou dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûr.*

PROPOSITION 7.11 :
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite quelconque d'évènements :**

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \textbf{et} \quad \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$

PARTIE 7.3 : CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

DÉFINITION 7.8 :
Soit $B \in \mathcal{A}$ *un évènement tel que* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Si* $A \in \mathcal{A}$ *est un évènement quelconque, on définit la* **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B, *notée* $\mathbb{P}_B(A)$ *(ou même* $\mathbb{P}(A|B)$*), par la relation suivante :*
$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ ce qui équivaut à } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B).$$

PROPOSITION 7.12 :
Soit $B \in \mathcal{A}$ **et** $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \to [0;1]$ **est une probabilité sur** $(\Omega, \mathcal{A})$**.**

THÉORÈME 7.13 :
Si $A_1, \cdots, A_n$ **sont des évènements de** $\mathcal{A}$ **tels que** $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$**, alors :**
$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$ **(probabilités composées).**

DÉFINITION 7.9 :
On appelle **système complet d'évènements** *(resp.* **système quasi-complet d'évènements***) toute famille* $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ *(*I *fini ou dénombrable) telle que :* • I *est un ensemble d'indices fini ou dénombrable.*
• $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$. • $\bigcup_{k \in I} A_k = \Omega$ *(resp.* • $\sum_{k \in I} \mathbb{P}(A_k) = 1$*).*

<u>REMARQUE 7.10</u> : • *Si* $A \subset \Omega$, $(A, \overline{A})$ *est un système complet fini d'évènements (engendré par* A*).*
• *Si* $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, *la famille* $(A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B})$ *l'est aussi (engendré par* A *et* B*).*
• *Si* $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est dénombrable et si* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *alors* $(\{\omega_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ *est un SCE.*

THÉORÈME ÉNORME 7.14 :
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **un système complet d'évènements et** $B \in \mathcal{A}$**.**
$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n)\,\mathbb{P}(A_n)$ **(formule des probabilités totales).**

THÉORÈME 7.15 :
Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ **tel que** $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) > 0$ **:** $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ **(formule de** Bayes**).**

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **un SCE et** $B \in \mathcal{A}$ **tel que** $\mathbb{P}(B) > 0$**. Alors** $\mathbb{P}_B(A_n) = \dfrac{\mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n)}{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(B)\,\mathbb{P}(A_k)}$**.**

DÉFINITION 7.10 :
A, B *sont dits* **indépendants** *si* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. *On dit que* $A_1, \cdots, A_n$ *sont des* **évènements indépendants** *(ou* $(A_1, \cdots, A_n)$ *est une famille indépendante) si* $\forall J \subset [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$. *La famille* $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *est dite indépendante si pour toute partie finie* J *de* $\mathbb{N}$, $(A_j)_{j \in J}$ *est indépendante*

PROPOSITION 7.16 :
$(A, B) \in \mathcal{A}^2$ **tel que** $\mathbb{P}(B) > 0$ **:** $\big(A, B$ **indépendants**$\big) \Longleftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$**.**

<u>REMARQUE 7.11</u> : • *Si* A *et* B *sont indépendants, alors* $(A$ *et* $\overline{B})$, $(\overline{A}$ *et* $B)$, $(\overline{A}$ *et* $\overline{B})$ *aussi.*
• *Indépendance implique indépendance deux à deux ; mais la réciproque est fausse.*