CHAPITRE 7 SOMMABILITÉ

7.1 : Borne supérieure

DÉFINITION 7.1 :
Sur $[0;+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, *on prolonge les opérations* $+$ *et* $\times$ *classiques en rajoutant :*

- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$,
- $a \times (+\infty) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ *si* $a > 0$ *et* $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

On prolonge aussi la relation d'ordre $\leqslant$ *en convenant que* $a \leqslant (+\infty)$ *si* $a \in \mathbb{R}_+$, $(+\infty) \leqslant (+\infty)$.

PROPOSITION 7.1 :
Toute partie A de $[0;+\infty]$ admet une borne supérieure (le plus petit des majorants) :

- $\mathrm{Sup}(A)$ **est la borne supérieure classique si** $A \subset [0;+\infty[$.
- $\mathrm{Sup}(A) = +\infty$ **si** $+\infty \in A$ **et** $\mathrm{Sup}(A) = 0$ **si** $A = \emptyset$.

Si A et B sont des parties de $[0;+\infty]$ et $\lambda \in [0;+\infty]$, on a l'implication $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{Sup}(A) \leqslant \mathrm{Sup}(B)$ **et les deux relations** $\mathrm{Sup}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Sup}(A)$ **et** $\mathrm{Sup}(A+B) = \mathrm{Sup}(A) + \mathrm{Sup}(B)$**.**

7.2 : Familles de réels positifs

DÉFINITION 7.2 :
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty]$ *indexée par* I, *on note* $\mathcal{P}_f(I)$ *l'ensemble des parties finies de* I. *On pose* $A = \left\{ \sum_{i\in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \subset [0;+\infty]$.
On appelle somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$ *l'élément de* $[0;+\infty]$, *noté* $\sum_{i\in I} x_i$, *défini par* $\sum_{i\in I} x_i = \mathrm{Sup}(A) \in [0;+\infty]$.
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $[0;+\infty[$ *indexée par* I.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable si* $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

THÉORÈME 7.2 :
Soit cinq ensembles I, J, I'', $I' \subset I$, K et un recouvrement disjoint $I = \bigsqcup_{k\in K} I_k$ de I, $\lambda \in [0;+\infty]$ et deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0;+\infty]$, σ une bijection de I'' dans I, deux familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ d'éléments de $[0;+\infty]$ et une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ d'éléments de $[0;+\infty]$.

(i) $\sum_{i\in I'} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$ **(restriction).**

(ii) $\sum_{i\in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ **(linéarité).**

(iii) **Si** $\forall i \in I,\ x_i \leqslant y_i$, **alors** $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$ **(croissance).**

(iv) $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} \left(\sum_{j\in I_k} x_j \right)$ **(sommation par paquets).**

(v) $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i''\in I''} x_{\sigma(i'')}$. **En particulier, si $I'' = I$, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$ est invariant par permutation des termes, elle ne dépend par de l'ordre de sommation.**

(vi) $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} u_{i,j} \right)$ **(théorème de FUBINI).**

(vii) $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j \right)$ **(familles produits).**

7.3 : Familles complexes

DÉFINITION 7.3 :
Soit I *un ensemble et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{K}$ *indexée par* I. *On dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est sommable si* $\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$. *On note* $\ell^1(\mathbb{K})$ *l'ensemble des familles sommables d'éléments de* $\mathbb{K}$ *indexées par* I.

REMARQUE 7.1 : Si $I = \mathbb{N}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable si et seulement si* $\sum x_n$ *converge absolument.*

PROPOSITION 7.3 :
Soit I un ensemble, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Si on suppose que $\forall i \in I,\ |x_i| \leqslant y_i$ et que $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

DÉFINITION 7.4 :
Soit I *un ensemble,* $(x_i)_{i\in i}$ *une famille sommable. On définit la somme* S *de cette famille par :*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $S = \left(\sum_{i\in I} x_i^+\right) - \left(\sum_{i\in I} x_i^-\right)$ *si, pour* $i \in I$, *on pose* $x_i^+ = \mathrm{Max}(x_i, 0)$, $x_i^- = \mathrm{Max}(-x_i, 0)$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $S = \left(\sum_{i\in I} \mathrm{Re}\,(x_i)\right) + i\left(\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(x_i)\right)$.

THÉORÈME 7.4 :
Soit I, I' et J trois ensembles, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit aussi $\sigma : I' \to I$ une bijection et deux familles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. On a alors les propriétés suivantes :

(i) **Restriction : si I' est une partie de I, alors $(x_i)_{i\in I'}$ est sommable.**

(ii) **Linéarité : la famille $(\lambda x_i + y_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I}(\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.**

(iii) **Croissance : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\forall i \in I,\ x_i \leqslant y_i$, alors $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.**

(iv) **Inégalité triangulaire : $\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|$.**

(v) **Sommation par paquets : pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k\in K}$ de I, c'est-à-dire que $I = \bigsqcup_{k\in K} I_k$, la famille $\left(\sum_{j\in I_k} x_j\right)_{k\in K}$ est sommable et $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in I_k} x_j\right)$.**

(vi) **Changement d'indice : $(x_{\sigma(i')})_{i'\in I'}$ est sommable et $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i'\in I'} x_{\sigma(i')}$.**

(vii) **Théorème de FUBINI : les familles $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ et $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ sont sommables et on a la relation de FUBINI $\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$.**

(viii) **Familles produit : la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$.**

(ix) **Approximation : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists J \in \mathcal{P}_f(I),\ \left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{j\in J} x_j\right| \leqslant \varepsilon$.**

(x) **Produit de CAUCHY : en posant $p_n = \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n \\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi sommable et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.**

REMARQUE 7.2 : • $\ell^1(I, \mathbb{K})$ *est un espace vectoriel et* $S : \ell^1(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est linéaire si* $S\big((x_i)_{i\in i}\big) = \sum_{i\in I} x_i$.

• *Pour* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *absolument convergente et* σ *est une permutation de* $\mathbb{N}$, *on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$.