DEVOIR MAISON 7 : CENTRALE PC 2009 M1

PSI 1 2024/2025 **pour le vendredi 29 novembre 2024**

PARTIE 1 : ÉTUDE D'UN EXEMPLE

On considère, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)} = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ *et, lorsque la série converge,*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

1.1 Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.2 **Continuité**

1.2.1 Soit $a > 0$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

1.2.2 En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi que la valeur de la limite en $+\infty$ de S.

1.3 Vérifier que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\lim_{x\to 0} S(x) = +\infty$.

1.4 Justifier que, si $x > 0$, on a $xS(x) - S(x+1) = 1$.
En déduire des équivalents de $S(x)$ quand x tend vers 0 et vers $+\infty$.

1.5 Tracer l'allure du graphe de S sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.6 **Expression intégrale**

1.6.1 Justifier, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrabilité sur $[0; 1[$ de $\theta_n : t \mapsto t^n(1-t)^{x-1}$ et calculer

$$I_n(x) = \int_0^1 t^n(1-t)^{x-1}\,dt.$$

1.6.2 En déduire soigneusement l'égalité, valable pour tout $x > 0$:

$$S(x) = \int_0^1 e^t(1-t)^{x-1}\,dt.$$

PARTIE 2 : SÉRIES FACTORIELLES

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ *et tout réel* $x > 0$, *on pose*

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad , \quad v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}.$$

2.1 **Une limite**

2.1.1 Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$ est convergente.

$\boxed{2.1.2}$ En déduire qu'il existe $\ell(x)$, dépendant de x et strictement positif, tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \ell(x).$$

$\boxed{2.2}$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $x > 0$ un réel. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n v_n(x)$ est absolument convergente.

On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ soit absolument convergente pour tout réel $x > 0$.

$\boxed{2.3}$ **Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{A}$. Montrer que :**

$\boxed{2.3.1}$ - la fonction $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{2.3.2}$ - la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

$\boxed{2.4}$ **Exemples**

$\boxed{2.4.1}$ Donner un exemple d'un élément a de $\mathcal{A}$ avec a_n non nul pour tout entier n.

$\boxed{2.4.2}$ Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne soit pas un élément de $\mathcal{A}$.

$\boxed{2.5}$ **Soit a un élément de $\mathcal{A}$**

$\boxed{2.5.1}$ Montrer que si $\alpha > 0$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{\ln(n)}{(n+1)^\alpha}$ est absolument convergente.

$\boxed{2.5.2}$ Montrer que, pour tout entier n, la fonction u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x > 0,\ |u_n'(x)| \leqslant u_n(x)\left[\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right].$$

$\boxed{2.5.3}$ En déduire que la fonction f_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

PARTIE 3 : REPRÉSENTATION INTÉGRALE

On considère $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe de $\mathcal{A}$ et on continue de noter $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$.

$\boxed{3.1}$ Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in [0;1[$.

Dans la suite, on définit la fonction ϕ_a par

$$\forall x \in [0;1[,\ \phi_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

$\boxed{3.2}$ Montrer que ϕ_a est continue sur $[0;1[$.

$\boxed{3.3}$ Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$f_a(x) = \int_0^1 \phi_a(t)(1-t)^{x-1}\,dt.$$