DEVOIR MAISON 6 : NORMES

PSI 1 2024/2025 **pour le mardi 19 novembre 2024**

$\boxed{1}$ Norme ou pas norme *: soit* $(\alpha,\alpha')\in[0;1]^2$

$\boxed{1.1}$ f (donc $|f|$ aussi) est continue sur le segment $[0;1]$ donc elle est bornée (et atteint ses bornes), d'où l'existence de $\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|$ (qui est positif car $|f|$ est positive). De plus $|f|$ est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha'}|f(x)|dx$ existe et est positive. Ainsi : $\boxed{\text{le réel } N_{\alpha,\alpha'}(f) \text{ est bien défini et il est positif.}}$

$\boxed{1.2}$ On sait que la norme infinie (comme son nom l'indique) est une norme (sur un segment quelconque) donc vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. On a donc pour tout réel $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $(f,g)\in E^2$: $N_{\alpha,\alpha'}(\lambda f)=\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|\lambda f(x)|+\displaystyle\int_0^{\alpha'}|\lambda f(x)|dx=|\lambda|\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|+|\lambda|\int_0^{\alpha'}|f(x)|dx=|\lambda|\,N_{\alpha,\alpha'}(f)$.

Mais aussi : $N_{\alpha,\alpha'}(f+g)\leqslant\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|+\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|g(x)|+\displaystyle\int_0^{\alpha'}|f(x)|dx+\int_0^{\alpha'}|g(x)|dx\leqslant N_{\alpha,\alpha'}(f)+N_{\alpha,\alpha'}(g)$.
Il reste à savoir si l'axiome de séparation est vérifié en fonction de α et α'.

$(\Longrightarrow)$ Si $\alpha>\alpha'$ et qu'on considère la fonction affine par morceaux valant 0 sur les intervalles $[0;\alpha']$ et $[\alpha;0]$, valant 1 en $\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}$ et affine sur les intervalles $\left[\alpha;\dfrac{\alpha+\alpha'}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{\alpha+\alpha'}{2};\alpha'\right]$, alors $N_{\alpha,\alpha'}(f)=0$ (faire un dessin) alors que f n'est pas la fonction nulle : $N_{\alpha,\alpha'}$ n'est donc pas une norme.
$(\Longleftarrow)$ Si $\alpha\leqslant\alpha'$ et si $f\in E$ vérifie $N_{\alpha,\alpha'}(f)=0$, alors $\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|=\displaystyle\int_0^{\alpha'}|f(x)|dx=0$ donc f est nulle sur le segment $[\alpha;1]$ (propriété de la norme infinie) et f est nulle sur $[0;\alpha']$ (car l'intégrale d'une fonction positive continue n'est nulle qui si f est nulle). Ainsi, f est nulle sur $[0;\alpha']\cup[\alpha;1]=[0;1]$ donc $f=0$.

Au final, on a bien : $\boxed{\big(N_{\alpha,\alpha'} \text{ est une norme}\big)\Longleftrightarrow\big(\alpha\leqslant\alpha'\big).}$

$\boxed{2}$ Premier cas *: soit trois réels* α, α', α'' *tels que* $0\leqslant\alpha<\alpha'<\alpha''\leqslant 1$

$\boxed{2.1}$ Plus l'intervalle est grand, puis l'est aussi la norme infinie et aussi l'intégrale, donc si $f\in E$, on a $N_{\alpha,\alpha'}(f)=\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|+\displaystyle\int_0^{\alpha'}|f(x)|dx\leqslant\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|+\int_0^{\alpha''}|f(x)|dx=N_{\alpha,\alpha''}(f)$ car $\alpha'\leqslant\alpha''$ et $|f|\geqslant 0$.
De plus, $N_{\alpha,\alpha''}(f)=\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|+\displaystyle\int_0^{\alpha''}|f(x)|dx=\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|+\int_0^{\alpha'}|f(x)|dx+\int_{\alpha'}^{\alpha''}|f(x)|dx$ par CHASLES donc $N_{\alpha,\alpha''}(f)\leqslant\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|+\displaystyle\int_0^{\alpha'}|f(x)|dx+(\alpha''-\alpha')\underset{x\in[\alpha';\alpha'']}{\text{Sup}}|f(x)|$ (inégalité de la moyenne) et on en déduit que $N_{\alpha,\alpha''}(f)\leqslant\displaystyle\int_0^{\alpha'}|f(x)|dx+(1+\alpha''-\alpha')\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|\leqslant(1+\alpha''-\alpha')N_{\alpha,\alpha''}(f)$ car $1+\alpha''-\alpha'\geqslant 1$.

$\boxed{\text{Les deux normes } N_{\alpha,\alpha'} \text{ et } N_{\alpha,\alpha''} \text{ sont donc équivalentes et } N_{\alpha,\alpha'}(f)\leqslant N_{\alpha,\alpha''}(f)\leqslant(1+\alpha''-\alpha')N_{\alpha,\alpha'}(f).}$

$\boxed{2.2}$ $\boxed{N_{\alpha',\alpha''}(f)=\underset{x\in[\alpha';1]}{\text{Sup}}|f(x)|+\displaystyle\int_0^{\alpha''}|f(x)|dx\leqslant\underset{x\in[\alpha;1]}{\text{Sup}}|f(x)|+\int_0^{\alpha''}|f(x)|dx=N_{\alpha,\alpha''}(f)}$ car $[\alpha';1]\subset[\alpha;1]$.

$\boxed{2.3}$ Comme $\dfrac{\alpha'+\alpha}{2}-\dfrac{1}{n}>\alpha$ par construction, la fonction f_n est nulle sur $[0;\alpha]$; comme $\dfrac{\alpha'+\alpha}{2}+\dfrac{1}{n}<\alpha'$, elle est aussi nulle sur $[\alpha';1]$. $N_{\alpha,\alpha''}(f_n)=1+\dfrac{1}{n}$ (faire un dessin) et $N_{\alpha',\alpha''}(f_n)=\dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{N_{\alpha',\alpha''}(f_n)}{N_{\alpha,\alpha''}(f_n)}=0$ ce qui interdit l'existence de $a>0$ tel que $N_{\alpha,\alpha''}\leqslant aN_{\alpha',\alpha''}$: $N_{\alpha',\alpha''}$ ne domine pas $N_{\alpha,\alpha''}$.

Même si $N_{\alpha,\alpha''}$ domine $N_{\alpha',\alpha''}$: $\boxed{N_{\alpha,\alpha''} \text{ et } N_{\alpha',\alpha''} \text{ ne sont pas équivalentes.}}$

$\boxed{3}$ Second cas : *soit* $(\alpha,\beta)\in[0;1]^2$ *avec* $\alpha<\beta$

$\boxed{3.1}$ Comme en 2.1, $N_\beta(f)=\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[\beta;1]}|f(x)|+\displaystyle\int_0^\beta|f(x)|dx=\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[\beta;1]}|f(x)|+\int_0^\alpha|f(x)|dx+\int_\alpha^\beta|f(x)|dx$ par Chasles d'où $N_\beta(f)\leqslant\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[\beta;1]}|f(x)|+\displaystyle\int_0^\alpha|f(x)|dx+(\beta-\alpha)\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[\alpha;\beta]}|f(x)|\leqslant\int_0^\alpha|f(x)|dx+(1+\beta-\alpha)\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[\alpha;1]}|f(x)|$ et $N_\beta(f)\leqslant(1+\beta-\alpha)N_\alpha(f)$ car on a $1+\beta-\alpha\geqslant 1$. Ainsi : $\boxed{\forall f\in E,\ N_\beta(f)\leqslant(1+\beta-\alpha)N_\alpha(f).}$

$\boxed{3.2}$ Pour n suffisamment grand (tel que $\dfrac{2}{n}<\beta-\alpha$), on définit la fonction g_n continue et affine par morceaux par : g_n est affine sur les intervalles $[0;\alpha]$, $\left[\alpha;\alpha+\dfrac{2}{n}\right]$, $\left[\alpha+\dfrac{2}{n};1\right]$ et elle vérifie $g_n(0)=g_n(\alpha)=0$ et $g_n\left(\alpha+\dfrac{2}{n}\right)=g_n(1)=1$. Faire un dessin de cette fonction pour se convaincre de $N_\alpha(g_n)=1$ et $N_\beta(g_n)=1+\beta-\alpha-\dfrac{1}{n}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{N_\beta(g_n)}{N_\alpha(g_n)}=1+\beta-\alpha$ ce qui interdit l'existence d'une constante strictement positive $k<1+\beta-\alpha$ telle qu'on ait : $\forall f\in E,\ N_\beta(f)\leqslant kN_\alpha(f)$.

Au sens qui est rappelé dans l'énoncé : $\boxed{\text{la constante } 1+\beta-\alpha \text{ de la question 3.1 est optimale.}}$

$\boxed{3.3}$ Construisons à nouveau, pour $n\geqslant 1$ assez grand (qui vérifie $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\beta-\alpha}{2}$), la fonction h_n continue et affine par morceaux qui est nulle sur $\left[0;\dfrac{\beta+\alpha}{2}-\dfrac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\beta+\alpha}{2}+\dfrac{1}{n};1\right]$, qui est affine sur $\left[\dfrac{\beta+\alpha}{2}-\dfrac{1}{n};\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\beta+\alpha}{2};\dfrac{\beta+\alpha}{2}+\dfrac{1}{n}\right]$ et telle que $h_n\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)=1$. Alors, en regardant le graphe de h_n, on se rend compte que $N_\alpha(h_n)=1$ et que $N_\beta(h_n)=\dfrac{1}{n}$ car $\alpha<\dfrac{\beta+\alpha}{2}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{\beta+\alpha}{2}+\dfrac{1}{n}<\beta$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{N_\beta(h_n)}{N_\alpha(h_n)}=0$ ce qui interdit l'existence d'une constante strictement positive b telle que $\forall f\in E,\ N_\alpha(f)\leqslant bN_\beta(f)$.

Tout ceci prouve que la norme N_β ne domine pas la norme N_α.

Conclusion, même si N_α domine N_β : $\boxed{\text{les deux normes } N_\alpha \text{ et } N_\beta \text{ ne sont pas équivalentes.}}$