TD 09 : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 15 novembre 2024**

9.1 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, la suite $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge par le critère spécial des séries alternées. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ qui est paire (car toutes les f_n le sont) et positive sur $\mathbb{R}$ (pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est du signe de son premier terme donc du signe de $(-1)^2 = 1$).

b. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}x^2}{x^4+k}$. Le même critère spécial nous permet de majorer, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{x^4+n+1}$. Or on se rappelle de l'inégalité $ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ pour deux réels positifs a et b car $(a-b)^2 \geqslant 0$. Ainsi, $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{x^4+n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$ en posant $a = \sqrt{n+1}$ et $b = x^2$. On pouvait bien sûr aussi étudier $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4+n+1}$ en la dérivant pour s'apercevoir qu'elle atteint son maximum en $x_n = \sqrt[4]{n+1}$. Ainsi $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c. f_n est positive, paire, dérivable, tend vers 0 en $\pm\infty$ et $f_n'(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{2x(n-x^4)}{(x^4+n)^2}$ donc $|f_n|$ atteint son maximum en $\pm n^{\frac{1}{4}}$ où elle vaut $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = |f_n(\sqrt[4]{n})| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Soit $I \neq \{0\}$ un intervalle réel, il existe $a \neq 0$ dans I. Par l'étude ci-dessus, f_n est bornée sur I car elle l'est sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ mais $||f_n||_{\infty,I} \geqslant |f_n(a)| = \dfrac{a^2}{a^4+n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a^2}{n}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a^2}{n}$ diverge, on obtient par comparaison la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,I}$. Par conséquent, il n'existe aucun intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement. Par contre, si $I = \{0\}$, comme $\forall n \geqslant 1,\ f_n(0) = 0$, on a bien convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur I.

d. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et que la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est uniforme sur $\mathbb{R}$, on a par théorème la continuité de f sur $\mathbb{R}$. On a même, puisque toutes les fonctions f_n admettent des limites finies en $+\infty$ et par théorème de la double limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

9.2 **a.** Posons $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ pour $n \geqslant 1$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument d'après Riemann. Par conséquent, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. De plus, comme toutes les fonctions f_n sont impaires, on en déduit que f est aussi impaire.

b. Soit $a > 0$, alors $\forall x \in [-a; a],\ |f_n(x)| \leqslant \dfrac{a}{0^2+n^2}$ donc $||f_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \dfrac{a}{n^2}$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge par Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement vers f sur $[-a; a]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

c. Par contre, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant f_n(n) = \dfrac{1}{2n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge par comparaison à la série harmonique et il n'y a pas converge normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$. Bien sûr, une étude de fonction faisait le travail, en effet

$f_n'(x)=\dfrac{n^2-x^2}{(x^2+n^2)^2}$ donc f_n atteint son maximum en valeur absolue en $\pm n$ d'où $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}=f_n(n)$.

d. On effectue une comparaison série/intégrale, en posant, pour $x>0$ fixé, la fonction $\varphi_x : t\mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$. φ_x est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\varphi_x(t)dt \leqslant \varphi_x(k)\leqslant \int_{k-1}^{k}\varphi_x(t)dt$. On somme ces inégalités : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi_x(t)dt\leqslant f(x)\leqslant \int_0^{+\infty}\varphi_x(t)dt \iff \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty}\leqslant f(x)\leqslant \left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right)\right]_0^{+\infty}$ (tout converge). Ainsi, on a $\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$ par encadrement.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$ pour tout entier n, si on avait convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}f_n$ sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\lim_{x\to+\infty}f_n(x))=\sum_{n=1}^{+\infty}0=0$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$, on n'a pas convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}f_n$ vers f sur $\mathbb{R}$ (ni sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$).

9.3 **a.** Si $n\geqslant1$, g_n est dérivable sur $[0;1]$ par théorèmes généraux et $g_n'(t)=-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1}e^t+\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n}e^t$ qu'on factorise en $g_n'(t)=-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1}\dfrac{te^t}{n}$ pour $t\in[0;1]$. Ainsi, comme $\left|\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1}\right|=\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^{n-1}\leqslant1$ et $|t|\leqslant1$, on a bien la majoration suivante, $\forall t\in[0;1]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|g_n'(t)|\leqslant\dfrac{e^t}{n}$.

b. Si $t\in]0;1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, par le théorème des accroissements finis, comme g_n est dérivable sur $[0;1]$, il existe $c\in]0;t[$ tel que $g_n(t)-1=g_n(t)-g_n(0)=tg_n'(c)$. Or $|g_n'(c)|\leqslant\dfrac{e^c}{n}\leqslant\dfrac{e^t}{n}$ d'après **a.** donc $|g_n(t)-1|\leqslant\dfrac{te^t}{n}$.

c. Soit $x\in[0;1]$, $\displaystyle|I_n(x)-x|=\left|\int_0^x g_n(t)dt-\int_0^x dt\right|=\left|\int_0^x(g_n(t)-1)dt\right|\leqslant\int_0^x|g_n(t)-1|dt\leqslant\frac{1}{n}\int_0^x te^tdt$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^x te^tdt=0$, on en déduit par encadrement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n(x)=x$. Ainsi, la suite de fonctions $(I_n)_{n\geqslant1}$ converge simplement vers la fonction $f:x\mapsto x$ sur $[0;1]$.

d. On reprend la majoration précédente, $\displaystyle|I_n(x)-x|\leqslant\frac{1}{n}\int_0^x te^tdt\leqslant\frac{I}{n}$ si $\displaystyle I=\int_0^1te^tdt=[(t-1)e^t]_0^1=1$ donc I_n-f est bornée sur $[0;1]$ et on a $||I_n-f||_{\infty,[0;1]}\leqslant\dfrac{1}{n}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, on a bien convergence uniforme de $(I_n)_{n\geqslant1}$ vers f sur $[0;1]$.

9.4 **a.** • Si $x<0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n(x)=+\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}u_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n(x)=\ln(2)$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}u_n(x)$ diverge aussi grossièrement.

• Si $x>0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}e^{-nx}=0$ donc $u_n(x)\underset{+\infty}{\sim}e^{-nx}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}e^{-nx}$ converge (série géométrique, $0<e^{-x}<1$).

Ainsi le domaine de définition de f vaut $I=\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $a>0$, comme u_n est décroissante et positive, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[}=u_n(a)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}u_n(a)$ converge d'après ce qui précède. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}u_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[a;+\infty[$, la fonction f y est aussi continue. f est donc continue sur $\displaystyle\mathbb{R}_+^*=I=\bigcup_{a>0}[a;+\infty[$. Les u_n sont décroissantes donc, par convergence simple, f est décroissante. Comme $u_0(x)=\ln(2)$ et $u_1(x)=\ln(1+e^{-x})$, la fonction u_0+u_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme avant, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}u_n$ est décroissante. Ainsi, si $0<x<y$, on a $(u_0+u_1)(x)>(u_0+u_1)(y)$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x)\geqslant\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(y)$. En sommant, on obtient donc $(u_0+u_1)(x)+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}u_n(x)=f(x)>f(y)=(u_0+u_1)(y)+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}u_n(y)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ou alors, avec $0<x<y$, on a $f(x)-f(y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n(x)-u_n(y))$ et tous les $u_n(x)-u_n(y)$ sont strictement positifs donc, par somme, $f(x)-f(y)>0$.

c. Comme f est décroissante et minorée par 0, f admet une limite finie en $+\infty$ par le théorème de la limite monotone. $u_0(x)=\ln(2)$ et $\forall n\geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=0$. Par convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ sur $[1;+\infty[$ et théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=\ln(2)$.

d. Comme f est décroissante et positive, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ par théorème de la limite monotone. Pour $x>0$, on pose $g_x:t\mapsto\ln(1+e^{-tx})$ d'où $u_n(x)=g_x(n)$. Comme g_x est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $g_x(t)\underset{+\infty}{\sim}e^{-tx}$, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}$, $g_x(n+1)=u_{n+1}(x)\leqslant\int_n^{n+1}g_x(t)dt\leqslant g_x(n)=u_n(x)$. En sommant l'inégalité de gauche pour $n\in\mathbb{N}$ et en rajoutant $u_0(x)=\ln(2)$ (tout converge), on obtient par CHASLES $f(x)\leqslant\ln(2)+\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt$. En sommant l'inégalité de droite pour $n\in\mathbb{N}$, on arrive directement à $\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt\leqslant f(x)$. Ainsi, $\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt\leqslant f(x)\leqslant\ln(2)+\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt$.

Or, comme $0<e^{-tx}<1$ si $t>0$, on a $\ln(1+e^{-tx})=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}e^{-nxt}}{n}$. Comme les $t\mapsto(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-nxt}}{n}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$, que $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-nxt}}{n}dt=\dfrac{1}{n^2x}$ et que $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^2x}$ converge par RIEMANN, on conclut par le théorème d'intégration terme à terme que $\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2x}=\dfrac{\pi^2}{12x}$ d'après l'énoncé. Ainsi, l'encadrement précédent montre que $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{\pi^2}{12x}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

Si on ne connaît pas le développement en série entière de $\ln(1+u)$, on peut faire d'abord une intégration par parties pour avoir (facilement) $\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{txe^{-tx}dt}{1+e^{-tx}}$ puis le changement de variable $u=tx$ (facile aussi) pour avoir $\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt=\dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty}\dfrac{ue^{-u}du}{1+e^{-u}}$ et ensuite utiliser les séries géométriques pour écrire, comme $\dfrac{1}{1+e^{-u}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^ne^{-nu}$ si $u>0$, $\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-tx})dt=\dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nue^{-(n+1)u}du$ et refaire une intégration terme à terme avec les fonctions $h_n:u\mapsto(-1)^nue^{-(n+1)u}$ qui sont bien continues sur $\mathbb{R}_+^*$, telles que $\sum\limits_{n\geqslant0}h_n$ converge simplement vers $S:u\mapsto\dfrac{ue^{-u}}{1+e^{-u}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifie enfin la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant0}\int_0^{+\infty}|h_n|$ car $\int_0^{+\infty}|h_n|=\dfrac{1}{n^2}$ par une intégration par parties des plus zézées. On peut aussi montrer l'égalité admise $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$ en se souvenant de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ et en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ (classique).

9.5 **a.** Si $x\in]0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x^n\ln(n)=0^+$ par croissances comparées donc, comme $\ln(x)<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=-\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x=1$, il vient $u_n(1)=0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n(1)$ converge. Si $x>1$, $u_n(x)\underset{+\infty}{=}o(x^{-n})$ donc $\sum\limits_{n\geqslant2}u_n(x)$ converge par comparaison aux séries géométriques.

Ainsi, l'ensemble de définition D de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}u_n$ vaut $D=[1;+\infty[$.

b. Pour $n \geqslant 2$, u_n est positive et dérivable sur $[1;+\infty[$ et $u_n'(x) = \dfrac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n)}$ donc u_n est maximale en $e^{1/n}$ et on a $||u_n||_{\infty,D} = u_n(e^{1/n}) = \dfrac{1}{en\ln(n)}$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur D et qu'une de ses primitives $x \mapsto \ln(\ln(x))$ admet une limite infinie en $+\infty$, la série de BERTRAND $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge par comparaison série-intégrale. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D.

Si $a > 1$, il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ e^{1/n} \leqslant a$ d'où, avec ce qui précède, $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} = u_n(a)$. Or $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n(a)$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a;+\infty[$ inclus dans $]1;+\infty[$.

c. Soit $x \in]1;+\infty[$ et $n \geqslant 1$, alors $0 \leqslant R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^k\ln(k+1)}$ et, pour tout entier $k \geqslant n$, $\ln(k+1) \leqslant \ln(n+1)$ donc on peut majorer $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (1/x)^k = \dfrac{\ln(x)}{x-1} \times \dfrac{(1/x)^n}{\ln(n+1)}$.
Or $0 \leqslant (1/x)^n \leqslant 1$ et, comme $\forall x > 1,\ \ln(x) \leqslant x-1$ par concavité de $\ln$, on a $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x-1} \leqslant 1$. Par conséquent, comme $R_n(1) = 0$, on a $\forall x \in D,\ \forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d. On en déduit que R_n est bornée sur D et que $||R_n||_{\infty,D} \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,D} = 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge donc uniformément sur D et, comme les u_n sont continues sur D, S est continue sur D.

e. Pour $x > 1$, d'après la question précédente, $0 \leqslant S(x) = R_1(x) \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x-1} \times \dfrac{(1/x)}{\ln(2)} \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{\ln(x)}{x^2}\Big)$ donc $S(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{x^{3/2}}\Big)$. Ainsi, la fonction S qui est continue sur $[1;+\infty[$ est intégrable sur D par comparaison à une intégrale de RIEMANN.

$\boxed{9.6}$ **a.** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\text{sh}\,(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme on sait que $\sin(t) \underset{0}{\sim} \text{sh}\,(t) \underset{0}{\sim} t$, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Comme $\text{sh}\,(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^t}{2}$, on a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 2\sin(t)e^{-t}$ donc $f(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ et, par comparaison, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le cours, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}\,(t)}dt$ converge.

b. Si $t > 0$, $\dfrac{1}{\text{sh}\,(t)} = \dfrac{2}{e^t - e^{-t}} = \dfrac{2e^{-t}}{1-e^{-2t}} = 2e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$ (car $e^{-2t} < 1$) donc $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2\sin(t)e^{-(2n+1)t}$ (série géométrique). Posons, pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : t \mapsto 2\sin(t)e^{-(2n+1)t}$.

(H_1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$ (on vient de le faire).

(H_2) Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ car elles sont prolongeables par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$ et que $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$.

(H_3) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_4) Comme $|\sin(t)| \leqslant t$, par inégalité de la moyenne, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|dt \leqslant 2\int_0^{+\infty} te^{-(2n+1)t}$. Par une intégration par parties en posant $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\dfrac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}$, comme u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, il vient $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t}dt = \frac{2}{(2n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} I_n$ converge (RIEMANN).

Par le théorème d'intégration terme à terme, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}\,(t)}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 2\text{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-(2n+1)t}dt\right) = 2\text{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-(2n+1))t}dt\right) = 2\left[\frac{e^{(i-(2n+1))t}}{i-(2n+1)}\right]_0^{+\infty}$ ce qui donne $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 2\text{Im}\left(\frac{1}{2n+1-i}\right) = 2\text{Im}\left(\frac{2n+1+i}{(2n+1)^2+1}\right) = \frac{2}{(2n+1)^2+1}$.

On a bien l'égalité attendue, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1+(2n+1)^2} \sim 0,72$.

9.7 **a.** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \varphi(x+n) + \varphi(x-n)$.

- (H_1) Toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ par somme et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ puisque φ est supposée continue sur $\mathbb{R}$ dans l'énoncé.
- (H_2) Soit $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions u_n étant continues sur le segment $[-a; a]$, elles y sont bornées. Dès que $n \geqslant a$, d'après l'hypothèse, $n+x \geqslant n-a \geqslant 0$ et $x-n \leqslant -(n-a) \leqslant 0$ pour $x \in [-a; a]$, alors $|\varphi(x+n)| \leqslant \frac{C}{1+(x+n)^2} \leqslant \frac{C}{1+(n-a)^2}$ et $|\varphi(x-n)| \leqslant \frac{C}{1+(x-n)^2} \leqslant \frac{C}{1+(n-a)^2}$ donc, par inégalité triangulaire, $|u_n(x)| \leqslant \frac{2C}{1+(n-a)^2}$ ce qui prouve que $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \frac{2C}{1+(n-a)^2}$. Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2C}{1+(n-a)^2}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $\frac{2C}{1+(n-a)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2C}{n^2}$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-a; a]$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x) - \varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par somme car φ est elle-même continue sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x+1 \in \mathbb{R}$ et $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\varphi(x+n+1) + \varphi(x-(n-1))\big)$ donc, puisque les deux séries convergent d'après la question précédente, on a $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x+n+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x-(n-1)$ d'où, en posant $m = n+1$ et $p = n-1$, $f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{m=2}^{+\infty} \varphi(x+m) + \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi(x-p)$. On obtient donc $f(x+1) = \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi(x+m) + \varphi(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} \varphi(x-p) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x-n) = f(x)$ donc la fonction f est bien 1-périodique sur $\mathbb{R}$ comme attendu.

c. Comme g est continue sur le segment $[-1; 1]$, d'après le théorème des bornes atteintes, g est bornée sur $[-1; 1]$ et on peut poser $||g||_{\infty,[-1;1]} = M$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(x - \lfloor x \rfloor)$ car $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et que g est 1-périodique donc $|g(x)| \leqslant M$. La fonction g est donc bornée sur $\mathbb{R}$ et $||g||_{\infty,\mathbb{R}} = M$.

Par conséquent, $\varphi \times g$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit et $|\varphi \times g| \leqslant M|\varphi|$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x)g(x)| \leqslant \frac{CM}{1+x^2}$. Comme la fonction $\psi : x \mapsto \frac{CM}{1+x^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\psi(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, par comparaison, la fonction $\varphi \times g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

La fonction fg est continue sur le segment $[0; 1]$ donc $\int_0^1 fg$ existe et, par linéarité de l'intégrale, on obtient la relation $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)g(x)dx + \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)g(x)\right)dx$. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0; 1]$, $|u_n(x)g(x)| \leqslant \big(|\varphi(x+n)| + |\varphi(x-n)|\big)\,|g(x)| \leqslant \left(\frac{C}{1+(x+n)^2} + \frac{C}{1+(x-n)^2}\right)|g(x)|$ par inégalité triangulaire. Ainsi, $|u_n(x)g(x)| \leqslant \left(\frac{CM}{1+n^2} + \frac{CM}{1+(n-1)^2}\right)$ donc $||u_n g||_{\infty,[0;1]} \leqslant \left(\frac{CM}{1+n^2} + \frac{CM}{1+(n-1)^2}\right)$ ce qui prouve une nouvelle fois par comparaison aux séries de RIEMANN que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n g$ converge normalement sur $[0;1]$. Par le théorème d'intégration terme à terme sur segment, on a donc $\int_0^1 \Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)g(x)\Big)dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)g(x)dx$. Mais $\int_0^1 u_n(x)g(x)dx = \int_0^1 \big(\varphi(x+n)+\varphi(x-n)\big)g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x+n)g(x)dx + \int_0^1 \varphi(x-n)g(x)dx$ par linéarité de l'intégrale puis, en posant les changements de variable $u = x+n$ et $v = x-n$ on arrive à $\int_0^1 u_n(x)g(x)dx = \int_n^{n+1} \varphi(u)g(u-n)du + \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(v+n)du = \int_n^{n+1} \varphi(u)g(u)du + \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(v)du$ car g est 1-périodique et $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)g(x)dx + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\int_n^{n+1} \varphi(u)g(u)du + \int_{-n}^{-n+1} \varphi(u)g(v)du\Big)$. Enfin, on a $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} \varphi(u)g(u)du$ et, par CHASLES, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

9.8 **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$, traitons deux cas selon le signe de x :

Si $x \leqslant 0$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument donc converge par comparaison aux séries de RIEMANN.

Ainsi, le domaine de définition D_f de la fonction f vaut $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

b. Si $a > 0$, comme f_n est décroissante positive sur $[a;+\infty[$, on a $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a) = e^{-a\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-a\sqrt{n}}$ converge car $a \in D_f$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.

c. Toutes les fonctions f_n sont continues sur $[a;+\infty[$ et par convergence normale (donc uniforme) de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[a;+\infty[$, on a la continuité de f sur $[a;+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque c'est vrai pour tout $a > 0$).

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \delta_{n,0}$ et qu'on a convergence normale donc uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[1;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite pour affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

d. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on a décroissance de $g_x : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$, on intègre l'inégalité $g_x(n) = f_n(x) \leqslant g_x(t)$ sur $[n-1;n]$ et l'inégalité $g_x(t) \leqslant g_x(n) = f_n(x)$ sur $[n;n+1]$ pour avoir, par croissance de l'intégrale, l'encadrement $\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}dt$ (1).

La fonction g_x est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $e^{-x\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} (\sqrt{t})^4 e^{-x\sqrt{t}} = 0$. L'inégalité de gauche dans (1) est aussi vraie pour $n = 0$, on somme toutes ces inégalités pour $n \in \mathbb{N}$ (la série et l'intégrale convergent) et on a par relation de CHASLES la minoration $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x)$ de $f(x)$. De même à droite dans (1) en sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on obtient la majoration $f(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)dt$.

Ainsi, on arrive à l'encadrement $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} g_x(t)dt$ de $f(x)$.

On effectue dans cette dernière intégrale le changement de variable $t = \varphi(u) = u^2$ avec φ qui est bien bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante, de classe C^1, et on a $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt = 2\int_0^{+\infty} ue^{-xu}du$. On effectue une intégration par parties en posant $a(u) = u$ et $b(u) = -\dfrac{e^{-xu}}{x}$ avec a et b qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$ et on a $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt = 2\Big[-\dfrac{ue^{-xu}}{x}\Big]_0^{+\infty} + \dfrac{2}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xu}du = \dfrac{2}{x}\Big[-\dfrac{e^{-xu}}{x}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{x^2}$.

Ainsi, $\dfrac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{2}{x^2}$ et, comme $1 + \dfrac{2}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$, par encadrement, on a l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

e. Comme f_n est décroissante positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = f(0) = 1$ et la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ diverge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si on avait convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur D_f, comme 0 est adhérent à D_f et que toutes les fonctions f_n admettent des limites finies $\ell_n = \lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 1$, on aurait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ell_n$ d'après le théorème de la double limite. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ diverge, on n'a pas non plus convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\textbf{9.9}}$ **a.** Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ par croissances comparées donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
b. $f_0 : x \mapsto e^{-x}$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $||f_0||_{\infty,\mathbb{R}_+} = f_0(0) = 1$.
Pour $n \geqslant 1$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geqslant 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{e^{-x}x^n}{n!} + \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x)$ donc f_n est positive, croissante sur $[0;n]$ et décroissante sur $[n;+\infty[$ donc $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = f_n(n) = \dfrac{e^{-n}n^n}{n!}$.
D'après la formule de STIRLING, $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = 0$, ce qui montre la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
c. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on sait que la série entière exponentielle converge sur $\mathbb{R}$ et qu'on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$ donc, en multipliant par e^{-x}, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-x}x^n}{n!} = f(x) = 1$. On a donc convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa fonction somme est constante égale à 1.
d. Soit $a > 0$, d'après l'étude de fonction de la question **b.**, dès que $n \geqslant a$, la fonction f_n est croissante et positive sur $[0;a]$ donc $||f_n||_{\infty,[0;a]} = f_n(a) = \dfrac{e^{-a}a^n}{n!}$ et, d'après **c.**, la série $\sum\limits_{n\geqslant a} \dfrac{e^{-a}a^n}{n!}$ converge. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;a]$. Par contre, comme la série de RIEMANN $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ diverge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en $+\infty$ par croissances comparées, il s'agit de $\ell_n = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$. Si on avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème de la double limite, on aurait $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0$ ce qui est absurde puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 1$. Il ne saurait y avoir convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\textbf{9.10}}$ **a.** Soit $x \in [-1;1]$, traitons deux cas :

- Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
- Si $x \neq 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2} = 0 = \ell$ car $x^2 > 0$ donc, par continuité de la fonction $\sin$ en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sin(\ell) = 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $F : x \to 0$ sur $[-1;1]$.
b. Soit $a \in]0;1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a;1]$, alors $0 \leqslant nxe^{-nx^2} \leqslant ne^{-na^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na^2} = 0$ par croissances comparées, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ ne^{-na^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Par croissance de $\sin$

sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \sin(ne^{-na^2})$ donc $||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = ||f_n||_{\infty,[a;1]} \leqslant \sin(ne^{-na^2})$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(ne^{-na^2}) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - F||_{\infty,[a;1]} = 0$ d'où, par définition, la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction F sur tout $[a;1]$ avec $a \in]0;1[$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin\left(e^{-1/n}\right) \geqslant \sin(e^{-1})$ car $\sin$ est croissante sur $[e^{-1};1[$ donc, comme $||f_n||_{\infty,[-1;1]} \geqslant f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \geqslant \sin(e^{-1})$ puisque $\dfrac{1}{n} \in [-1;1]$, la suite $\left(||f_n||_{\infty,[-1;1]}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 et la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers la fonction F sur $[-1;1]$.