PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 09

PSI 1 2024-2025 **du lundi 25/11 au vendredi 29/11**

1 Suites et séries de fonctions :

- convergence simple d'une suite de fonctions : limite simple ;
- convergence uniforme d'une suite de fonctions, exemples et contre-exemples ;
- convergence uniforme sur tout segment et implications entre ces trois notions ;
- convergence simple d'une série de fonctions : fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, fonction R_n reste d'ordre n ;
- convergence uniforme de la série de fonctions si $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle ; convergence uniforme de la série de fonctions sur tout segment ;
- convergence normale de la série de fonctions et convergence normale sur tout segment ; exemples et contre-exemples ; implications entre ces cinq notions ;
- conservation de propriétés par convergence simple : parité, croissance, périodicité ;

2 Convergence uniforme et régularité :

- convergence uniforme d'une suite de fonctions continues vers une fonction continue ;
- théorème de la double limite pour une suite de fonctions convergeant uniformément ;
- convergence uniforme (ou normale) d'une série de fonctions continues vers une fonction continue ;
- théorème de la double limite pour série de fonctions si convergence uniforme ;

3 Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions :

- l'intégrale sur un segment $[a;b]$ d'une limite uniforme de suites de fonctions continues est la limite des intégrales sur $[a;b]$ de ces fonctions ;
- l'intégrale sur $[a;b]$ de la somme d'une série de fonctions convergeant uniformément est la somme de la série des intégrales de ces fonctions sur $[a;b]$ (majoration si la convergence est normale) ;
- théorème d'intégration terme à terme classique ;
- dérivation de la limite simple d'une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle telle que la suite des dérivées converge uniformément ;
- dérivation de la somme d'une série de fonctions de classe C^1 convergeant simplement sur un intervalle telle que la série des fonctions dérivées converge uniformément ;
- récurrence avec le théorème de dérivation pour montrer qu'une somme de série de fonctions est C^∞ ;

QUESTIONS DE COURS :

1. définir la convergence uniforme d'une série de fonctions sur une partie (déf. 5.5)
2. énoncer le théorème de la double limite pour les séries de fonctions (th. 5.5)
3. énoncer le théorème d'intégration terme à terme par convergence uniforme sur un segment (th. 5.7)
4. énoncer le théorème d'intégration terme à terme classique (th. 5.9)
5. énoncer le théorème d'interversion limite/dérivée pour les suites de fonctions (th. 5.10)
6. énoncer le théorème d'interversion série/dérivée pour les séries de fonctions (th. 5.12)
7. énoncer la méthode pour prouver qu'une somme de série de fonctions est C^∞ (rem. 5.14)
8. prouver que si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVU sur I et $J \subset I$, alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ CVU sur J (rem. 5.2)
9. prouver que si les f_n sont paires et que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est paire (rem. 5.4)
10. prouver le théorème d'interversion limite/intégrale si convergence uniforme sur segment (th. 5.7)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur les suites et séries de fonctions et début de la réduction