TD 11 : RÉDUCTION

PSI 1 2024-2025 **vendredi 29 novembre 2024**

11.1 *Mines PSI 2015* Édouard Le Goas

On pose $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, p un réel non nul de valeur absolue strictement inférieure à 1 et $q = 1 - p$. Soit u l'application qui pour tout f de E associe $u(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $u(f)(x) = f(px + q)$.

a. Montrer que u est un automorphisme.

b. Montrer que les valeurs propres de u appartiennent à $]-1; 1]$.

c. Montrer que si f est un vecteur propre, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$.

d. Trouver les valeurs propres de u et les vecteurs propres associés.

11.2 *CCP PSI 2017* Manon Bové II et Alexis Trubert II Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.

b. Trouver un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1}.

c. Quels sont tous les polynômes qui annulent A ?

11.3 *Centrale Maths1 PSI 2018* Peio Betbeder

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X \in \mathbb{R}^n$ non nul et E_X l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ont X comme vecteur propre.

a. Montrer que E_X est un espace vectoriel.

b. Déterminer E_X. Quelle est sa dimension ?

11.4 *Mines PSI 2018* Claire Raulin II $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

11.5 *CCP PSI 2017 (1) et 2018 (2)* Cléa Maricourt I, Peio Betbeder, Paul Simon I Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

b. Discuter de la diagonalisabilité de A selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.

11.6 *CCP PSI 2018* Adrien Sarrade I Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a. A est-elle diagonalisable ? Inversible ? Donner ses éléments propres.

b. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Donner les éléments propres de B.

11.7 *E3A PSI 2018* Anaïs Chaumeil

Soit $E = C^2([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ et $x \in [0; 1]$, on pose $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Min}(x, t) f(t) dt$.

a. Montrer que T ainsi définie est un endomorphisme de E.

b. Soit f un vecteur propre de T. Montrer que f satisfait une équation différentielle de la forme $y'' = \beta y$ avec β à déterminer en fonction de la valeur propre associée à f.

c. Réciproquement, si f est solution non nulle de $y'' = \beta y$, à quelle(s) condition(s) f est vecteur propre de T.

d. Déterminer le spectre de T.

11.8 *Petites Mines PSI 2018* Baptiste Egreteau II

a. Soit B et C deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$.
Les matrices $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont-elles semblables ? Et $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$?

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\mathrm{Tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right) = \dfrac{\chi'_A(x)}{\chi_A(x)}$.

11.9 *X PSI 2021* Arthur Riché I

Soit $n \geqslant 1$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$.
Quelles sont les dimensions possibles pour E ? Indication : tester pour les petites valeurs de $d = \dim(E)$.

11.10 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$.

Indication : écrire le système $Au = \lambda u$ en une ligne i quelconque.

11.11 *Mines PSI 2023* Bader Ben Amira I

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $T(P) = P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)$.
a. Montrer que T est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique de E.
b. Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.
c. En déduire les sous-espaces propres de T. T est-il diagonalisable ?

11.12 *Mines PSI 2023* Mathys Bureau I

Soit $E = C^\infty([0;1], \mathbb{R})$ et T définie sur E par $T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.
a. Montrer que f est un endomorphisme de E.
b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.
c. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n(f)(0)$.
d. Trouver de même, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} T^n(f)(x)$.
e. Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.
f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?
g. Pour $f \in E$, calculer $\big(T(f)\big)'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$.

11.13 *Mines PSI 2023* Raphaël Déniel II et Tom Graciet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.
(ii) $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX = XB \Longrightarrow X = 0$.
(iii) $\chi_B(A)$ est une matrice inversible.
(iv) A et B n'ont aucune valeur propre commune.

11.14 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko I

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 32$ et $A^2 - 6A + 8I_3 = 0$.
On définit $\varphi_A : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_A(B) = AB$. Déterminer $\mathrm{Tr}\ (\varphi_A)$.

11.15 *Mines PSI 2023* Antoine Notelle-Maire II Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \sin(2\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(2\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & 0 & \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$.

Étudier la diagonalisabilité de $A(\alpha)$ en fonction de α.

11.16 *CCINP PSI 2023* Armand Dépée II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et un complexe α. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.
a. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que A est diagonalisable.
b. Calculer le rang de A, en déduire ses valeurs propres.
c. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

11.17 *Mines-Télécom PSI 2023* Armand Dépée I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.