

TD 12 : RÉDUCTION

PSI 1 2024-2025

vendredi 06 décembre 2024

12.1 Mines PSI 2017 Alexandre Chamley I Soit $n \geq 2$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = a_n E_{1,n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k E_{k+1,k}$.

- Étudier la diagonalisabilité de A en fonction de a_1, \dots, a_n .
- Lorsque A est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de A .

12.2 E3A PSI 2017 Vincent Meslier Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On veut résoudre l'équation $M^2 = A$.

- Montrer que A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trigonaliser A .
- Montrer que le spectre de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants.
- Montrer que $0 \in \text{Sp}(M)$ si $M^2 = A$. Trouver toutes les matrices M solution de $M^2 = A$.

12.3 Mines PSI 2018 Anaïs Chaumeil II et Adrien Sarrade II

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, u un endomorphisme de E , $n \in \mathbb{N}^*$, v_1, \dots, v_n des endomorphismes non nuls et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels tous distincts. On suppose que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $u^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i$.

- Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(u) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) v_i$; puis que u est diagonalisable.
- Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k v_i$.
- Trouver des polynômes $(L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^n$ tels que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $L_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}$.
- Montrer que $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
- Que peut-on dire des dimensions des sous-espaces propres de u si $\dim(E) = n$?

12.4 Mines PSI 2018 Thibaud Vendrely II Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$.

- Trouver quelles valeurs parmi $-2, -1, 0, 1, 2$ sont racines de P . Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
- Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(M^3) = 0$, $\det(M) = \pm 1$ et $P(M) = 0$.

12.5 Mines PSI 2018 et 2019 Lucie Jandet III et Tom Boileau II

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $A^n = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

12.6 Mines PSI 2021 Aloïs Doucet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $B = A^3 + A + I_n$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, exprimer A comme un polynôme en B .
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, peut-on exprimer A comme un polynôme en B ?

12.7 Mines PSI 2021 Tinaël Gelpe I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ et $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

Indication : on pourra commencer par les petites valeurs de n .

12.8 CCINP PSI 2021 Johan Haramboure II

- Énoncer le théorème de CAYLEY-HAMILTON pour une matrice carrée.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ semblables.

Soit, dans la suite de cet exercice, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire une expression par blocs de $P(M)$ si $P \in \mathbb{R}[X]$.
- Montrer que si M est diagonalisable alors A l'est aussi.
- Montrer que si M est diagonalisable alors $A = 0$.

12.9 *Centrale Maths1 PSI 2023* Marius Desvalois

Soit $E = \mathbb{C}^4$, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u^2 = v^2 = \text{id}_E$ et $u \circ v = -v \circ u$.

- Montrer que $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(v) = 0$.
- Montrer que u est diagonalisable et que -1 et 1 sont valeurs propres doubles de u .
- Soit (x, y) une base de $E_1(u)$. Montrer que la famille $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$ et que la famille $(x, y, v(x), v(y))$ est une base de E .
- Montrer que $u \circ v$ est diagonalisable et donner les éléments propres de $u \circ v$.

12.10 *Mines PSI 2023* Arthur Biot III Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Déterminer une matrice triangulaire T semblable à A .
- Quelle est la dimension du commutant $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$?

12.11 *CCINP PSI 2019 (2) et 2021 (1) et Mines PSI 2023*

Thomas Crété et Léo Simplet II et Maëva Berland II et Rebecca Blé III

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

- Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ annule M , les valeurs propres de M sont des racines de P (CCINP).
- Si M est symétrique, montrer que M est diagonalisable et que $\text{Tr}(M) \times \det(M) \neq 0$ (CCINP).
- On ne suppose plus M symétrique. Montrer que M est toujours diagonalisable.
- Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M (CCINP).
- La matrice M est-elle forcément symétrique (Mines) ?

12.12 *Mines PSI 2023* Esteban Maurer II

- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Montrer que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B .
- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?
- Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$. Est-ce que B est un polynôme en A ou A un polynôme en B ?

12.13 *CCINP PSI 2019 et 2023* Axel Brulavoine II et Paul Bats I

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que si f est diagonalisable alors f^2 est diagonalisable.
- Si f^2 est diagonalisable, f l'est-elle forcément ?
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$, montrer que $\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{id}_E)$.
- Montrer que si f^2 est diagonalisable et inversible, alors f est diagonalisable.

12.14 *CCINP PSI 2023* Pierre Dobeli II Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

- A est-elle diagonalisable ? Trouver ses éléments propres.
- Trouver $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que les matrices R qui conviennent sont diagonalisables.

12.15 *CCINP PSI 2023* Olivier Farje II et Arthur Melnitchenko I et Marie-Lys Ruzic I

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et α l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

- Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - Trouver toutes les droites de \mathbb{R}^3 stables par α .
- Soit dans les deux questions suivantes un plan P de \mathbb{R}^3 stable par α . On définit alors l'endomorphisme α' de P induit par α dans P , qu'on note $\alpha' = \alpha_P$.
- Montrer que $\chi_{\alpha'}$ divise χ_{α} .
 - En déduire que $P \subset \text{Ker}((\alpha - 3 \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$.
 - Quels sont les plans stables par α ?