TD 13 : PROBABILITÉS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 13 décembre 2024**

13.1 On a un jeu de 52 cartes. Dénombrer les mains de 5 cartes dont l'annonce est :

- quinte flush
- carré
- full
- couleur
- suite (ou quinte)
- brelan
- double paire
- paire
- carte haute (rien).

13.2 On lance une pièce un nombre infini de fois. Elle amène pile avec une probabilité $\alpha \in]0;1[$ et face avec une probabilité $\beta = 1 - \alpha \neq \alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : "obtenir pile au n-ième lancer" (resp. F_n avec "face") et A_n : "obtenir pile pour la première fois au n-ième lancer ". Soit A_0 : "n'obtenir aucun pile" et, pour $n \geqslant 2$, E_n : "la séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n-1$ et n".

a. Exprimer E_2 en fonction des $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et des $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. Justifier que : $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(E_n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(E_n \cap A_k)$.

c. Calculer $\mathbb{P}(E_n \cap A_{n-1})$.

d. Pour $k \in [\![1; n-2]\!]$, décrire l'événement $E_n \cap A_k$ à l'aide des $(P_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(F_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. En déduire $\mathbb{P}(E_n \cap A_k)$.

e. Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(E_n) = \alpha\beta\left(\dfrac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha}\right)$.

f. Soit E : "obtenir au moins une séquence PF". À l'aide de ce qui précède, calculer $\mathbb{P}(E)$.

13.3 *TPE, EIVP PSI 2017* Manon Bové II

On lance une infinité de fois une pièce qui fait pile avec une probabilité $p \in]0;1[$. On définit les évènements :
- A = "on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers".
- B = "on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 3".

Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$. A et B sont-ils indépendants ?

13.4 *CCP PSI 2018* Quentin Meynieu II

a. Soit une population de n personnes. L'une d'elles envoie une lettre à l'une des $n-1$ autres personnes. Celle-ci renvoie la lettre à l'une des $n-1$ autres, etc.... ceci se répète $n-1$ fois.
Quelle est la probabilité que les n personnes aient reçu la lettre ?

b. Chacun dispose d'une lettre et l'envoie à l'une des $n-1$ autres personnes.
Soit $p \in [\![0; n-1]\!]$, quelle est la probabilité qu'une personne donnée reçoive p lettres ?

13.5 *CCINP PSI 2021* Alexandre Marque et Adèle Robert I

On note A, B, C trois points distincts du plan sur lesquels une puce peut se déplacer selon la règle suivante :
- La puce est initialement en A (à l'instant 0).
- À chaque tour, elle change de point de manière équiprobable.

On pose A_n = "la puce est en A au temps n", B_n = "la puce est en B au temps n", C_n = "la puce est en C au temps n". Soit aussi $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = J - I_3$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$.

a. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

b. Montrer que M est diagonalisable. Donner ses sous-espaces propres. En déduire M^n.

c. Trouver un polynôme annulateur P de J. Trouver le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n$ par P. En déduire la valeur de M^n d'une autre manière que celle de la question précédente.

d. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

e. Que dire de cette limite si on ne connaît pas U_0 ?

13.6 *X PSI 2023* Paul Picard I

Un jeu peut être dans seulement deux états notés 0 et 1. Et on passe de l'un à l'autre par des étapes discrètes numérotées par des entiers naturels.

On passe de l'état 0 à l'état 1 avec une probabilité $p \in]0;1[$.

On passe de l'état 1 à l'état 0 avec une probabilité $q \in]0;1[$.

a. Calculer la probabilité p_n d'être à l'état 1 à l'instant n.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

13.7 *ENS Cachan PSI 2023* Arthur Biot et Maddie Bisch

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $n = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$ sa décomposition en produit de nombres premiers. Pour tout diviseur $d \in [\![1;n]\!]$ de n, on pose $A_d = \left\{kd \;\middle|\; k \in \left\{1, \cdots, \frac{n}{d}\right\}\right\}$.

Soit l'univers $\Omega = [\![1;n]\!]$ qu'on munit de la probabilité uniforme : pour $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{n}$ où $|A| = \text{card}\,(A)$.

On pose $B_n = \{k \in [\![1;n]\!] \mid \text{pgcd}\,(k,n) = 1\}$ et on note $\varphi(n) = |B_n|$ le cardinal de B_n.

a. Soit d et d' deux diviseurs de n premiers entre eux tels que $(d, d') \in [\![1;n]\!]^2$. Montrer que $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$. En déduire que A_d et $A_{d'}$ sont indépendants.

b. Exprimer B_n en fonction de $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$.

c. En déduire une expression de $\varphi(n)$ en fonction de $p_1, \cdots, p_r$.

d. Montrer que si deux entiers n et m de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ sont premiers entre eux, on a $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ et on définit $\mathbb{U} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n$. Pour un élément z de $\mathbb{U}$, on définit $m_z = \text{Inf}\left\{n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\right\}$. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \{z \in \mathbb{U} \mid m_z = n\}$.

e. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer qu'il existe une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k = z$.

f. Montrer que P_n est un ensemble fini ; puis que $|P_n| = \varphi(n)$.

g. Montrer que $\mathbb{U} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$ et que $P_n \cap P_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

13.8 *Mines PSI 2023* Mathys Bureau II

Pour un entier $n \geqslant 2$ et $p \in [\![0;n]\!]$, on note F_n^p le nombre de parties A à p éléments de $[\![1;n]\!]$ telles que l'on ait la propriété suivante (C) : $\forall i \in [\![1;n-1]\!], i \in A$ ou $i+1 \in A$. Calculer F_n^p.

13.9 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 168*

On donne une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note $A = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} A_n$.

a. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} A_n\right)$. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge ; déterminer $\mathbb{P}(A)$.

b. Déterminer $\mathbb{P}(B)$ où B est l'ensemble des ω appartenant à une infinité de A_n.

c. On suppose la famille $(A_n)_{n\geqslant 0}$ indépendante et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ divergente.

Déterminer $\mathbb{P}(A)$. Indication : on pourra considérer $\mathbb{P}(\overline{A})$ et montrer que $\forall x \in [0;1]$, $1 - x \leqslant e^{-x}$.