TD 10 : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2024-2025 **vendredi 22 novembre 2024**

10.1 **a.** Posons $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$. Distinguons deux cas :

• Si $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement.

• Si $x \geqslant 0$, comme $|f_n(x)| = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2} \leqslant \dfrac{1}{1+n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument par critère de Riemann et comparaison. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

b. (H_1) On a déjà vu la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n^{(k)}(x) = (-1)^{n+k} \dfrac{n^k e^{-nx}}{1+n^2}$.

(H_3) Soit $a > 0$, comme $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geqslant a$, $|f_n^{(k)}(x)| = \dfrac{n^k e^{-nx}}{1+n^2} \leqslant \dfrac{n^k e^{-na}}{1+n^2}$, on peut conclure que $||f_n^{(k)}||_{\infty,[a;+\infty[} = |f_n^{(k)}(a)| = \dfrac{n^k e^{-na}}{1+n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||f_n^{(k)}||_{\infty,[a;+\infty[}$ converge par comparaison : $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.

D'après le cours, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+k} \dfrac{n^k e^{-nx}}{1+n^2}$.

On peut tout de même montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (et pas seulement sur $\mathbb{R}_+^*$) en constatant que si $x \geqslant 0$ et si $n \geqslant 1$, on a la majoration $\left|\dfrac{f'_{n+1}(x)}{f'_n(x)}\right| = e^{-x} \dfrac{(n+1)(1+n^2)}{n(1+(n+1)^2)} \leqslant \dfrac{n^3+n^2+n+1}{n^3+n^2+n^2+2n} \leqslant 1$ car $e^{-x} \leqslant 1$ et $n+1 \leqslant n^2+2n$. Ainsi, comme $\Big(|f'_n(x)|\Big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées (car la suite $(f_n^{(k)}(x))_{n\geqslant 1}$ est alternée) ce qui montre que $\forall n \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left|T_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x)\right| \leqslant |f'_{n+1}(x)| = \dfrac{(n+1)e^{-nx}}{1+(n+1)^2} \leqslant \dfrac{(n+1)}{1+(n+1)^2}$. On en déduit donc que $||T_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \dfrac{(n+1)}{1+(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f'_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, comme la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ est avérée sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **a.**, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

c. Si $x > 0$, $f''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(n^2+1-1)e^{-nx}}{1+n^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(n^2+1)e^{-nx}}{1+n^2} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ (les deux séries convergent) donc $f''(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-e^{-x})^n - f(x)$. On reconnaît une série géométrique de raison $-e^{-x} \in]-1;1[$ et f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle du second ordre suivante, $(E)\ :\ y'' + y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

Revenons sur la classe de f ! Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f''(x) = \dfrac{1}{2} - f(0)$ par continuité de f en 0, on peut déduire du théorème de prolongement C^1 (appliqué ici à la fonction f' en 0) que f est deux fois dérivable en 0 avec $f''(0) = \dfrac{1}{2} - f(0)$. Puisque $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f''(x)$, la fonction f'' est continue en 0 : f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

Intervient maintenant la récurrence, si on suppose f de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}_+$ avec $k \geqslant 1$, la relation $f'' = g - f$ vraie sur $\mathbb{R}_+$ avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ d'après ce qui précède montre que, puisque f et g sont de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}_+$ (g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ par opérations), f'' est de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}_+$ donc f est de classe C^{2k+2} sur $\mathbb{R}_+$. Par principe de récurrence, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$: OUF !!!

10.2 **a.** S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = -n$ alors $f_n(x)$ n'est même pas défini.

Si $x < 0$ et $x \notin (-\mathbb{N}^*)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x = 0$, on a $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge car c'est la série harmonique (Riemann).

Si $x > 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx}) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge absolument.

On en déduit que le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

Comme f_n est décroissante, positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, il vient $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = f_n(0) = \dfrac{1}{n}$ donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ (à nouveau la série harmonique est divergente).

Si $a > 0$, comme avant, $||f_n||_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a) \leqslant e^{-na}$ car f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} (e^{-a})^n$ converge car $0 < e^{-a} < 1$, il y a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[a;+\infty[$.

Comme toutes les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par un théorème du cours.

b. Si f coïncide avec une fonction polynomiale (disons de degré $p-1$) sur un segment, alors il existe un entier p tel que $f^{(p)} = 0$ sur ce segment. C'est même une condition nécessaire et suffisante sur un intervalle en se servant par récurrence de la propriété : "si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, $f' = 0 \iff f$ est constante".

(H_1) On a vu en **a.** la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_2) Toutes les f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et, en écrivant $f_n = u_n v_n$ avec $u_n : x \mapsto e^{-nx}$ et $v_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+x}$, comme $u_n^{(k)}(x) = (-n)^k e^{-nx}$ et $v_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$ par une récurrence facile, par Leibniz :

$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \forall x > 0,\ f_n^{(p)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dbinom{p}{k} (-n)^{p-k} e^{-nx} \dfrac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}} = (-1)^p e^{-nx} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p!n^{p-k}}{(p-k)!(n+x)^{k+1}}$.

(H_3) Soit $a > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{p!n^{p-k}e^{-nx}}{(p-k)!(n+x)^{k+1}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $|f_n^{(p)}|$ l'est aussi en tant que produit de deux fonctions positives décroissantes, ainsi $||f_n^{(p)}||_{\infty,[a;+\infty[} = |f_n^{(p)}(a)|$. On a donc $||f_n^{(p)}||_{\infty,[a;+\infty[} = e^{-na} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p!n^{p-k}}{(p-k)!(n+a)^{k+1}} \underset{+\infty}{=} o\big(e^{\frac{-na}{2}}\big)$ par croissances comparées donc on a convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(p)}$ sur $[a;+\infty[$. D'après un théorème du cours, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\forall p \geqslant 1,\ \forall x > 0,\ f^{(p)}(x) = (-1)^p \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p!n^{p-k}}{(p-k)!(n+x)^{k+1}}$ donc $f^{(p)}(x)$ est du signe strict de $(-1)^p$ car $\sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{p!n^{p-k}}{(p-k)!(n+x)^{k+1}} > 0$ et $e^{-nx} > 0$ donc ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion : f ne coïncide pas avec un polynôme sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

10.3 **a.** Initialisation : f_0 est continue sur l'intervalle I. Ainsi, f_1 étant la primitive sur I de f_0 qui s'annule en 0 par le théorème fondamental de l'intégration, f_1 est de classe C^1 sur I.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f_n est de classe C^n sur I, alors f_{n+1} étant la primitive de f_n qui s'annule en 0, la fonction f_{n+1} est de classe C^{n+1} car f'_{n+1} est de classe C^n.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est de classe C^n sur I et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f'_n(0) = 0$. De plus, par construction, $f_n^{(n)} = f_{n-1}^{(n-1)} = \cdots = f'_1 = f_0 = f$.

Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < 0 < b$, f est continue sur le segment $[a;b] \subset I$ donc y est bornée d'après le théorème des bornes atteintes d'où l'existence de $M \geqslant 0$ tel que : $\forall x \in [a;b],\ |f_0(x)| = |f(x)| \leqslant M = ||f||_{\infty,[a;b]}$.

Méthode 1 : pour $x \in [a;b]$, on a $|f_1(x)| = \left|\int_0^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_0^x |f(t)|dt\right| \leqslant \left|\int_0^x M dt\right| = M|x|$. De même, $|f_2(x)| = \left|\int_0^x f_1(t)dt\right| \leqslant \left|\int_0^x |f_1(t)|dt\right| \leqslant \left|\int_0^x M|t|dt\right| = \left|\int_0^x Mt dt\right| = \frac{M|x|^2}{2}$ (traiter les deux cas $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$). Si on suppose, pour un entier $n \geqslant 1$, que $\forall x \in [a;b]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{M|x|^n}{n!}$, alors, comme ci-dessus, on obtient $|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n(t)dt\right| \leqslant \left|\int_0^x |f_n(t)|dt\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{M|t|^n}{n!}dt\right| = \frac{M}{n!}\left|\int_0^x t^n dt\right| = \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a;b]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{M|x|^n}{n!}$.

Méthode 2 : Comme a vu que f_n est de classe C^n sur I, avec la formule de TAYLOR reste intégral, on a $\forall x \in I$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_n^{(k)}(0)x^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f_n^{(n)}(t)dt$. Or, $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $f_n^{(k)}(0) = f_{n-k}(0) = 0$ car $n-k \geqslant 1$ et $f_n^{(n)} = f$ donc $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f_n^{(n)}(t)dt$ ce qui donne aussi la majoration $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\left|\int_0^x |x-t|^{n-1}|f(t)|dt\right| \leqslant \frac{M}{(n-1)!}\left|\int_0^x |x-t|^{n-1}dt\right| = \frac{M}{(n-1)!}\left|\int_0^x (x-t)^{n-1}dt\right| = \frac{M|x|^n}{n!}$.

Quelle que soit la méthode, f_n est bornée sur $[a;b]$ et $|||f_n||_{\infty,[a;b]} \leqslant \frac{Mc^n}{n!}$ où $c = \text{Max}(|a|,|b|) \leqslant (b-a)$. Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{M(b-a)^n}{n!}$ converge (série exponentielle de somme e^{b-a}), on a convergence normale de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ sur tout segment de I donc on peut définir $g : I \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b. Méthode 1 : (H_1) La série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I d'après **a.**.

(H_2) Toutes les f_n sont de classe C^1 sur I (au moins) d'après **a.**.

(H_3) $\sum_{n \geqslant 1} f'_n = \sum_{m \geqslant 0} f_m$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de I d'après **a.**.

Ainsi, la fonction g est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = g(x) + f_0(x) = g(x) + f(x)$. On peut résoudre cette équation différentielle $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $g(x) = e^x\Big(A + \int_0^x e^{-t}f(t)dt\Big)$ par la méthode de variation de la constante. Or $g(0) = 0$ car $\forall n \geqslant 1$, $f_n(0) = 0$ donc $A = 0$ et on obtient la relation $\forall x \in I$, $g(x) = \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$ ce qui permet de conclure que $\forall x \in I$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$.

Méthode 2 : soit $x \in I$, on se place sur le segment $\widetilde{[0;x]}$ où l'on sait que la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement d'après **a.** donc, par intégration terme à terme sur un segment, on obtient $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f_n(t)dt$ en notant $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. S est continue sur I car toutes les f_n le sont et que $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge normalement sur tout segment de I. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x f'_{n+1}(t)dt = [f_{n+1}(t)]_0^x = f_{n+1}(x)$ donc $G(x) = \int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = S(x) - f(x) = G'(x) - f(x)$ par le théorème fondamental de l'intégration. On résout à nouveau cette équation différentielle sur I et $\forall x \in I$, $G(x) = e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ car $G(0) = 0$. On en déduit comme par la première méthode que $\forall x \in I$, $S(x) = G(x) + f(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$.

Par exemple, si $I = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto 1$, alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Ainsi, on obtient une formule classique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \int_0^x e^{x-t}dt = 1 + e^x[-e^{-t}]_0^x = 1 + e^x(1 - e^{-x}) = e^x$.

10.4 **a.** Convergence simple : • soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall n \geqslant \text{Max}(1, \lfloor -x \rfloor + 1)$, $n \geqslant 1$ et $n + x > 0$ donc $f_n(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n+x}\right)$ car on sait que $\forall y > 0$, $\text{Arctan}(y) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $f_n(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ puisque $\text{Arctan}(u) \underset{0}{=} u + O(u^3)$. Or $\frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Ainsi $f_n(x) \underset{0}{=} \frac{x}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Donc $f_n(0) = 0$ si $x = 0$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ si $x \neq 0$. Dans les deux cas, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(x)$ converge par RIEMANN. On a donc la convergence simple de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

• On pouvait aussi dire, pour $x \neq 0$, que $\tan(f_n(x)) = \frac{(n+x)-n}{1+n(n+x)} = \frac{x}{1+n(n+x)}$ par une formule de trigonométrie. Ainsi, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, on a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \tan(f_n(x)) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ ce qui va plus vite.

• On pouvait même, puisque Arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avoir l'existence de $c_n \in \widetilde{[n; n+x]}$ tel que $f_n(x) = (n+x-n)\,\text{Arctan}'(c_n) = \frac{x}{1+c_n^2}$ par le théorème des accroissements finis ce qui, comme $c_n \underset{+\infty}{\sim} n$ car c_n est entre $n+x$ et n, devient à nouveau $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ si $x \neq 0$.

Convergence normale : comme toutes les f_n sont croissantes et valent 0 en 0, la fonction f est aussi croissante et $f(0) = 0$ par convergence simple. Comme f_n est croissante sur $\mathbb{R}$, que $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)$, que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)$ et qu'on a $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n) \leqslant \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}(n) = \left| -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n) \right|$, on peut conclure que $|f_n|$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et admet sa borne supérieure au voisinage de $-\infty$. On a donc la relation $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} = \lim\limits_{n \to -\infty} |f_n(x)| = \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}(n) \geqslant \frac{\pi}{2}$. La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} ||f_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge donc grossièrement. Par conséquent, il n'y a pas convergence normale de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme : posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(-\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)\right) \leqslant -(n+1)\frac{\pi}{2}$. Si la fonction f était bornée, comme elle est croissante et strictement négative sur $\mathbb{R}_-$, elle admettrait une limite finie $\ell < 0$ en $-\infty$. Or dès que $-(n+1)\frac{\pi}{2} < \ell$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_-$ tel que $\forall x \leqslant x_0$, $S_n(x) < \ell$ car S_n est croissante et $\lim\limits_{x \to -\infty} S_n(x) \leqslant -(n+1)\frac{\pi}{2} < \ell$. C'est absurde car alors on aurait $\forall x \leqslant x_0$, $f(x) \leqslant S_n(x) < \ell$ car $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ et que $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \leqslant 0$ car $x \leqslant 0$ donc $\forall k \geqslant n+1$, $f_k(x) \leqslant 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Comme toutes les S_n sont bornées car les f_n le sont, les fonctions $R_n = f - S_n$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$ et ne peut donc pas avoir de convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

b. (H_1) On a déjà vu la convergence simple de $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$ vers f.

(H_2) Toutes les f_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \frac{1}{1+(n+x)^2}$.

(H_3) Soit $[a; b]$ un segment, . Dès que $n \geqslant \lfloor -a \rfloor + 1$, on a $n + a \geqslant 0$ donc $\forall x \in [a; b]$, $0 \leqslant n + a \leqslant n + x \leqslant n + b$ donc $(n+x)^2 \geqslant (n+a)^2$ et $0 \leqslant f_n'(x) \leqslant \frac{1}{1+(n+a)^2}$ donc $||f_n'||_{\infty,[a;b]} \leqslant \frac{1}{1+(n+a)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n'$ converge normalement sur tout segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ par RIEMANN.

On en déduit par théorème que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(n+x)^2}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(f_n(x+1) - f_n(x)\big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\text{Arctan}(n+x+1) - \text{Arctan}(n+x)\big)$

donc $f(x+1)-f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathrm{Arctan}(k+x+1)-\mathrm{Arctan}(k+x)\big)$. Or, par télescopage, on obtient $\sum\limits_{k=0}^{n} \big(\mathrm{Arctan}(k+1+x)-\mathrm{Arctan}(k+x)\big) = \mathrm{Arctan}(n+1+x)-\mathrm{Arctan}(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Arctan}(n+x) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $f(x+1)-f(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x)$ qui devient, si $x>0$, $f(x+1)-f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.

• On peut en déduire par exemple que, puisque $f(0)=0$, on a $f(1) = \frac{\pi}{2}$ en prenant $x=0$ et , par une récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$. Par une petite étude de fonction, on obtient que $\forall x \in [0;1]$, $x - \frac{x^3}{3} \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant x$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\pi}{2} + H_{n-1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3k^3} \leqslant f(n) \leqslant \frac{\pi}{2} + H_{n-1}$ avec $H_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n-1)+\gamma+o(1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. Comme $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3k^3} \underset{+\infty}{=} \frac{\zeta(3)}{3} + O(1)$, on en déduit par encadrement que $f(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. Or, comme f est croissante, pour $x \geqslant 1$, on trouve $f(\lfloor x \rfloor) \leqslant f(x) \leqslant f(\lfloor x \rfloor + 1)$, mais, puisque $f(\lfloor x \rfloor) \underset{+\infty}{\sim} \ln(\lfloor x \rfloor) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ et $f(\lfloor x \rfloor+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(\lfloor x \rfloor+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$, par encadrement, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

• Autrement, on pouvait poser, si $x>0$, la fonction $h_x : t \mapsto \mathrm{Arctan}(t+x)-\mathrm{Arctan}(t)$ de sorte que h_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, puisque $h'_x(t) = \frac{1}{1+(t+x)^2} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{-x(2t+x)}{(1+(t+x)^2)(1+t^2)} \leqslant 0$, h_x est décroissante. Par comparaison série-intégrale, $\forall k \geqslant 1$, $\int_k^{k+1} h_x(t)dt \leqslant h_x(k) = f_k(x) \leqslant \int_{k-1}^{k} h_x(t)dt$. On somme ces inégalités (tout converge car $h_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{t^2}$ comme avant) : $\int_1^{+\infty} h_x(t)dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} h_x(t)dt$. Or une primitive de h_x sur $\mathbb{R}_+$ est $H_x : t \mapsto (t+x)\,\mathrm{Arctan}(t+x) - t\,\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\ln(1+(t+x)^2) + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$. Par le théorème d'encadrement, on trouve avec quelques développements limités que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

10.5 **a.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, définissons $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

- Si $x=0$, on a $\forall n \geqslant 2$, $u_n(0)=0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(0)$ converge.
- Si $x>0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-nx})$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o((e^{-x})^n)$ et, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (e^{-x})^n$ converge car $|e^{-x}|<1$, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(x)$ converge absolument donc converge.
- Si $x<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = -\infty$ par croissances comparées donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(x)$ diverge grossièrement.

Ainsi, le domaine de définition de f vaut $D = \mathbb{R}_+$.

b. (H_1) D'après **a.**, on a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ sur R_+^*.

(H_2) Toutes les u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0$, $u'_n(x) = \frac{(1-nx)e^{-nx}}{\ln(n)}$.

(H_3) Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, alors il vient $\forall x \in [a;b]$, $\forall n \geqslant 2$, $|u'_n(x)| \leqslant \frac{(1+nb)e^{-na}}{\ln(n)}$ donc u'_n est bornée sur $[a;b]$ et $||u'_n||_{\infty,[a;b]} \leqslant \frac{(1+nb)e^{-na}}{\ln(n)}$. Comme $\frac{(1+nb)e^{-na}}{\ln(n)} \underset{+\infty}{=} o(ne^{-na}) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison.

Ainsi, par théorème, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0$, $f'(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-nx)e^{-nx}}{\ln(n)}$.

c. Soit $x>0$, le taux d'accroissement de f au voisinage de 0 vaut $T(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$ donc, comme on somme des termes positifs, on a l'inégalité $T(x) \geqslant \sum_{k=2}^{p} \frac{e^{-kx}}{\ln(k)} = S_p(x) \qquad (I_p)$. Comme toutes les $g_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{\ln(n)}$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+$, T est elle aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet une limite finie ou $+\infty$ en 0^+ par le théorème de la limite monotone.

Supposons que $\lim_{x\to 0^+} T(x) = \ell \in \mathbb{R}$, en passant à la limite quand x tend vers 0^+ dans les inégalités (I_p), on trouve $\forall p \geqslant 2,\ \ell \geqslant \lim_{x\to 0^+} S_p(x) = \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{\ln(k)} \qquad (E_p)$. Or la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{\ln(k)}$ diverge puisque $\frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{\ln(k)}\Big)$ et que $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k}$ diverge. On obtient donc une contradiction en faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité (E_p).

Ainsi, par raisonnement par l'absurde, on obtient $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$ ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0 ; le graphe de f admet une tangente verticale en 0.

d. Soit $x > 0$, $n \geqslant 2$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(n+1)}$ car les deux séries convergent et que $\forall k \geqslant n+1,\ \ln(k) \geqslant \ln(n+1)$. Ainsi : $R_n(x) \leqslant \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(k-n-1)x}$ et on reconnaît une série géométrique de raison $e^{-x} < 1$ donc, comme tous les termes sont strictement positifs dans $R_n(x)$: $0 < R_n(x) \leqslant \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ et ainsi $0 < R_n(x) \leqslant \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ car $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-x}$.

Par conséquent, en posant $\varphi : x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1}$, on a $\forall x > 0,\ 0 < R_n(x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{\ln(n+1)}$. Or φ se prolonge par continuité en 0 avec $\varphi(0) = 1$ car $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, par continuité de φ, elle est bornée (par M) sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geqslant 0,\ 0 < R_n(x) \leqslant \frac{M}{\ln(n+1)}$ (ça marche aussi pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$). Plus précisément, $M = 1$ car on connaît l'inégalité de convexité $\forall x > 0,\ e^x \geqslant 1 + x$ qui équivaut à $e^x - 1 \geqslant x > 0$ donc $\varphi(x) \leqslant 1$ pour $x > 0$. Ainsi, R_n est bornée et $||R_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{M}{\ln(n+1)}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{\ln(n+1)} = 0$ donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Comme toutes les u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour un équivalent de f en $+\infty$, on constate que $u_{n+1}(x) \underset{+\infty}{=} o(u_n(x))$ pour $n \geqslant 2$. On peut conjecturer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x)$. Or $\forall x > 0,\ \frac{f(x)}{u_2(x)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x} = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n(x)$ en posant $v_n(x) = \frac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)x}$. Or v_n est positive et décroissante sur $[1;+\infty[$ donc $||v_n||_{\infty,[1;+\infty[} = v_n(1) = \frac{\ln(2)}{\ln(n)} e^{-(n-2)} \underset{+\infty}{=} o((e^{-1})^n)$ donc, comme $\sum_{n\geqslant 2} (e^{-1})^n$ converge, on a convergence normale de $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ sur $[1;+\infty[$. Comme $\lim_{x\to+\infty} v_2(x) = 1$ et que $\forall n \geqslant 3,\ \lim_{x\to+\infty} v_n(x) = 0$, à nouveau par théorème de la double limite, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{u_2(x)} = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} 0 = 1$ ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} u_2(x) = \frac{xe^{-2x}}{\ln(2)}$. Par conséquent $f(x) \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

10.6 **a.** Avec la condition de l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \Big|\varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big)\Big| \leqslant \frac{c|x|}{2^n}$ et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{c|x|}{2^n}$ converge donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 0} \varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$ converge absolument donc converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n : x \mapsto \varphi\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$, avec la même majoration, comme $|x| \leqslant a$ pour $x \in I$, on a $||u_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant \frac{ca}{2^n}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{ca}{2^n}$ converge comme avant donc, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur I. Or les u_n sont continues sur I par hypothèse donc, d'après le cours, S est continue sur I.

b. D'après l'hypothèse, comme $0 \in I$, on a $|\varphi(0)| \leqslant c|0| = 0$ donc $\varphi(0) = 0$. Ainsi, $S(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi(0) = 0$. De plus, d'après **a.**, S est continue sur I. Enfin, pour $x \in I$, $S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \varphi(x)$ après simplification. Par conséquent, S est solution de (P).

c. Méthode 1 : soit f une fonction vérifiant (P) et $x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{2^k} \in I$ donc $f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$. En sommant pour $k \in [\![0;n]\!]$, on obtient, après télescopage, $f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{x}{2^k}\right)$ (R). Comme f est continue en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(0) = 0$ donc, en passant à la limite dans (R), on a finalement $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = S(x)$ ce qui assure l'unicité.

Méthode 2 : soit S_1 et S_2 deux solutions de (P). Posons $d = S_1 - S_2$, alors d est continue sur I par opérations, $d(0) = S_1(0) - S_2(0) = 0$ et $\forall x \in I$, $d(x) - d\left(\frac{x}{2}\right) = S_1(x) - S_1\left(\frac{x}{2}\right) - S_2(x) + S_2\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$. Soit $x \in I$, en itérant la relation $d(x) = d\left(\frac{x}{2}\right)$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x) = d\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Comme d est continue en 0, en passant à la limite dans cette relation, on a donc $d(x) = d(0)$ donc d est constante. Mais comme on a vu que $d(0) = 0$, la fonction d est nulle sur I.

Ainsi, la différence de deux fonctions solutions de (P) est nulle ce qui assure l'unicité.

d. Comme S est solution de (P) avec la question **b.** et que deux solutions de (P) sont égales d'après la question **c.**, on en déduit que S est la seule solution de (P).

e. Supposons φ de classe C^1 sur I. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- D'après **a.**, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement (même normalement) sur I.
- Toutes les u_n sont de classe C^1 sur I car φ l'est.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $u_n'(x) = \frac{1}{2^n}\varphi'\left(\frac{x}{2^n}\right)$ or φ' est continue sur le segment I donc elle y est bornée et on peut définir $M = ||\varphi'||_{\infty,I}$. On a donc $\forall x \in I$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{M}{2^n}$ donc u_n' est bornée sur I, $||u_n'||_{\infty,I} \leqslant \frac{M}{2^n}$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{M}{2^n}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n'$ converge normalement sur I.

Si on suppose φ de classe C^1 sur I, alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est aussi de classe C^1 sur I.

10.7 **a.** Soit $x \in [0;1]$, traitons deux cas :

- Si $x = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(0)$ converge.
- Si $x \in]0;1]$, comme $\frac{1}{1+x} \in]0;1[$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{(1+x)^n}$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge.

On a donc montré la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$.

b. La fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie d'après **a.** et on a $f(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$. Si $x \in]0;1]$, $f(x) = x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n = x \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = 1 + x$. Ainsi, f n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$ alors que toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0;1]$. Par la contraposée d'un théorème du cours, on ne peut pas avoir convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0 = \ell_n$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, d'après la contraposée du théorème de la double limite, il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $]0;1]$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[0;1]$ donc $\int_0^1 f_n(x)dx$ existe.

- Pour les petites valeurs de n, on calcule facilement $\int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, puis $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1 = 1 - \ln(2)$ et enfin, pour $n = 2$, on arrive à $\int_0^1 f_2(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)dx = \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}$.
- Pour $n \geqslant 3$, $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{1+x-1}{(1+x)^n}\right)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^{n-1}} - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^n}$ et, classiquement, $\int_0^1 f_n(x)dx = \left[-\frac{1}{(n-2)(1+x)^{n-2}}\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{(n-1)(1+x)^{n-1}}\right]_0^1 = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{2^{1-n}}{n-1} - \frac{2^{2-n}}{n-2}$ qui se factorise en $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{n2^{1-n}}{(n-2)(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

(H_1) La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers f sur $[0;1]$.

(H_2) Les fonctions f_n sont intégrables sur le segment $[0;1]$ car elles y sont continues.

(H_3) La fonction f est continue par morceaux sur $[0;1]$ d'après **a.**.

(H_4) La série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n(x)|dx$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car f_n est positive donc $|f_n(x)| = f_n(x)$ et, avec les calculs précédents, $\int_0^1 f_n(x)dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

D'après le fameux théorème, f est intégrable sur $[0;1]$ (on le savait déjà) et $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ ce qui donne, puisque $\int_0^1 f(x)dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$, la valeur $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{3}{2}$.

Autre méthode par télescopage car $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^{n-1}} - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^n} = u_{n-1} - u_n$ en posant $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^n}$ pour $n \geqslant -1$. Comme $\forall n \geqslant 2$, $u_n = \left[-\frac{1}{(n-1)(1+x)^{n-1}}\right]_0^1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc, par dualité suite-série, $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = u_{-1} - \lim_{n\to+\infty} u_n = u_{-1} = \int_0^1 (1+x)dx = \frac{3}{2}$.

10.8 **a.** • Si $x \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement. Par contre, si $x > 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge par le critère spécial des séries alternées. Ainsi, le domaine de définition de η est $\mathbb{R}_+^*$.

• Si $x \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ diverge grossièrement. Par contre, si on a $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ étant décroissante et continue sur $[1;+\infty[$, $\forall n \geqslant 2$, $f_x(n) \leqslant \int_{n-1}^n f_x(t)dt$ (1) et $\forall n \geqslant 1$, $\int_n^{n+1} f_x(t)dt \leqslant f_x(n)$ (2). Traitons deux cas :

Si $x > 1$, en sommant les inégalités (1) pour $k \in [\![2;n]\!]$ et par CHASLES, on obtient la majoration

$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} f_x(k) \leqslant 1 + \int_1^n f_x(t)dt = 1 + \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)n^{x-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$ (comparaison série-intégrale). Comme la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ des sommes partielles de cette série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ est bornée, on sait d'après le cours que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge.

Si $x \leqslant 1$, en sommant les inégalités (2) pour $k \in [\![1;n]\!]$ et par CHASLES, on obtient la minoration $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{n} f_x(k) \geqslant \int_1^{n+1} f_x(t)dt \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t}$ car $x \in]0;1]$ donc $S_n \geqslant \ln(n+1)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par minoration, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ diverge.

Ainsi, le domaine de définition de ζ est $]1;+\infty[$.

b. Pour $x > 1$, posons les deux sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} - 2 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^x}$ (séparer termes d'indices pairs et impairs). Ainsi, $S'_{2n} = S_{2n} - \frac{1}{2^{x-1}} S_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette relation, comme les deux séries convergent d'après **a.**, $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ car $\lim_{n\to+\infty} S'_{2n} = \theta(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \zeta(x)$ (suite extraite).

c. Pour $n \geqslant 1$, posons $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ de sorte que $\forall x > 0,\ \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

(H_1) $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement vers η sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **a.**.

(H_2) Toutes les fonctions g_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ g'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^x}$ et $|g'_n|$ est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $a > 0$, on a $||g'_n||_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{\ln(n)}{n^a}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ ne converge pas si $a \leqslant 1$ donc la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 1} g'_n$ n'est pas assurée et on va passer par la convergence uniforme.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n(x)$ est alternée pour $x > 0$, on s'intéresse à la décroissance de la suite $(|g'_n(x)|)_{n\geqslant 1}$, au moins à partir d'un certain rang. Posons $h_x : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'_x(t) = \frac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$. Ainsi, h_x est décroissante sur $[e^{1/x};+\infty[$, donc notamment sur $[e^{1/a};+\infty[$ car $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{x}$. Ainsi, dès que $n \geqslant e^{1/a}$, $h_x(n) = |g'_n(x)| \geqslant |g'_{n+1}(x)| = h_x(n+1)$ donc la suite $(|g'_n(x)|)_{n\geqslant \lfloor e^{1/a}+1 \rfloor}$ est décroissante et tend vers 0 par croissances comparées. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n(x)$ converge et on peut donc définir sa fonction reste d'ordre n, $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1} g'_k(x)$. Pour $n \geqslant e^{1/a}$, le critère spécial montre aussi que l'on a $|R_n(x)| \leqslant |g'_{n+1}(x)| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Ainsi, la fonction R_n est bornée sur $[a;+\infty[$ et on a $||R_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0$ par croissances comparées toujours, la série $\sum_{n\geqslant 1} g'_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, η est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0,\ \eta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^x}$.

d. Pour $n \geqslant 1$, posons $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dont la somme vaut $\eta(1)$. Alors $S'_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}dt = \int_0^1\Big(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j t^j\Big)dt$ par linéarité de l'intégrale. Comme $\forall t \in [0;1]$, $\sum_{j=0}^{n-1}(-t)^j = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$, on a $\left|S'_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t}\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^n}{1+t}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ car $\forall t \in [0;1]$, $\frac{1}{1+t} \leqslant 1$. Par encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} S'_n = \eta(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ car $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Or $1-2^{1-x} = 1-e^{(1-x)\ln(2)} \underset{1}{=} 1-(1+(1-x)\ln(2)+o(1-x)) \underset{1}{\sim} (x-1)\ln(2)$ donc, par continuité de η en 1, $\zeta(x) = \frac{\eta(x)}{1-2^{1-x}} \underset{1+}{\sim} \frac{\ln(2)}{(1-x)\ln(2)} = \frac{1}{1-x}$ et on a déjà $\zeta(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1-x}$ donc $a = 1$.

Pour avoir b, il nous faudrait le développement limité de η en 1 à l'ordre 1 et pas seulement 0 donc la valeur de $\eta'(1)$. Pour $n \geqslant 1$, posons $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k}$ de sorte que $\eta'(1) = \lim_{n\to+\infty} T_n$ d'après **c.**. Or, en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans $T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k}$, on obtient $T_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}$ donc, comme $\ln(2k) = \ln(2)+\ln(k)$, on a $T_{2n} = \ln(2)H_n + U_n - U_{2n}$ en posant $U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}$. Or la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est dérivable et décroissante sur $[e;+\infty[$ car $\forall t > 1$, $f'(t) = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$. Ainsi, par comparaison série-intégrale, on a $\forall k \geqslant 4$, $\int_{k-1}^{k} f(t)dt \geqslant f(k)$ (1) et $\forall k \geqslant 3$, $\int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$ (2). Pour $n \geqslant 4$, on somme (1) pour $k \in [\![4;n]\!]$ et, par CHASLES, $\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}dt \geqslant U_n - f(2) - f(3)$ et on somme (2) pour $k \in [\![3;n]\!]$ pour avoir $\int_3^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant U_n - f(2)$. Ainsi, $\frac{\ln(2)}{2} + \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_3^{n+1} \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} + \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_4^{n}$. Comme on a $\frac{\ln^2(n+1)}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$, par encadrement, on a donc $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

De plus, en posant $a_n = U_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$ pour $n \geqslant 1$, on a $\forall n \geqslant 2$, $a_n - a_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln^2(n-1)}{2}$ donc $a_n - a_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\Big(\ln(n)+\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big)^2}{2} = \frac{\ln(n)}{n} + \ln(n)\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^2$ et on arrive à $a_n - a_{n-1} \underset{+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} + \ln(n)\Big(-\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$ ce qui montre par comparaison aux séries de RIEMANN que $\sum_{n\geqslant 2}(a_n - a_{n-1})$ converge donc que, par dualité suite-série, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge, notons $\alpha = \lim_{n\to+\infty} a_n$ de sorte que $U_n \underset{+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2} + \alpha + o(1)$.

Par conséquent, $T_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(2)\big(\ln(n)+\gamma+o(1)\big) + \frac{\ln^2(n)}{2} + \alpha + o(1) - \frac{\ln^2(2n)}{2} - \alpha + o(1)$ dont on déduit que $T_{2n} \underset{+\infty}{=} \ln(2)\ln(n) + \gamma\ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\ln(n) + o(1)$ car $\ln(2n) = \ln(2)+\ln(n)$ et on a enfin la valeur $\lim_{n\to+\infty} T_{2n} = \gamma\ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2} = \eta'(1)$.

Comme $\forall x > 1$, $\zeta(x) = \frac{\eta(x)}{1-2^{1-x}}$, la connaissance locale du numérateur et du dénominateur au voisinage de 1^+ va nous donner les valeurs de a et b. En effet, $\eta(x) = \eta(1) + \eta'(1)(x-1) + o\big((x-1)\big)$ par le théorème de TAYLOR-YOUNG car η est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $1-2^{1-x} = 1-e^{(1-x)\ln(2)}$ donc

$1-2^{1-x} \underset{1}{=} 1-\Big(1+\ln(2)(1-x)+\dfrac{\ln^2(2)}{2}(1-x)^2+o\big((1-x)^2\big)\Big) \underset{1}{=} \ln(2)(x-1)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)$

puis $\zeta(x) \underset{1^+}{=} \dfrac{\ln(2)+\Big(\gamma\ln(2)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}\Big)(x-1)+o(x-1)}{\ln(2)(x-1)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}(x-1)^2+o\big((x-1)^2\big)} \underset{1^+}{=} \dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{1+\Big(\gamma-\dfrac{\ln(2)}{2}\Big)(x-1)+o(x-1)}{1-\dfrac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)}$. Or

il vient $\dfrac{1+\Big(\gamma-\dfrac{\ln(2)}{2}\Big)(x-1)+o(x-1)}{1-\dfrac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)} \underset{1^+}{=} \Big(1+\Big(\gamma-\dfrac{\ln(2)}{2}\Big)(x-1)+o(x-1)\Big)\times\Big(1+\dfrac{\ln(2)}{2}(x-1)+o(x-1)\Big)$

et on a enfin $\zeta(x) \underset{1^+}{=} \dfrac{1}{x-1}\big(1+\gamma(x-1)+o(x-1)\big) \underset{1^+}{=} \dfrac{1}{x-1}+\gamma+o(1)$ donc $a=1$ (on le savait) et $b=\gamma$.

10.9 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge pour tout réel x. Ainsi, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$: f est définie sur $\mathbb{R}$. La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{\pi}{2n^2}$) et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\pi}{2n^2}$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par théorème, la fonction somme f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

- (H_1) On vient de voir que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).
- (H_2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.
- (H_3) Soit $a > 0$, posons $J_a =]-\infty;-a] \cup [a;+\infty[$, on a $\forall x \in J_a$, $\forall n \geqslant 1$, $|f_n'(x)| \leqslant f_n'(a)$ donc $||f_n'||_{\infty,J_a} = f_n'(a) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3a^2}$ donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||f_n'||_{\infty,J_a}$ converge ce qui justifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur J_a.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0,\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

c. On effectue une comparaison série-intégrale. Si $x > 0$ est fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n \geqslant 2$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leqslant g_x(n) = f_n'(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_x(t)dt$. On somme pour n allant de 1 à p pour l'inégalité de gauche et pour n allant de 2 à p pour celle de droite et on obtient par Chasles $\displaystyle\int_1^{p+1} g_x(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{p} f_n'(x) \leqslant f_1'(x) + \int_1^p g_x(t)dt$. Or, pour $y \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_1^y g_x(t)dt = \int_1^y \Big(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)}\Big)dt = \Big[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2t^2)\Big]_1^y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x^2y^2}{y^2}\Big)$ donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_1^y g_x(t)dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Ainsi, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus, on parvient à $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x) \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(x)$. Par encadrement, on en déduit l'équivalent $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$. Pour $x > 0$ par exemple, par le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[0;x]$ et dérivable sur $]0;x[$, il existe $c_x \in]0;x[$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} = f'(c_x)$ donc, comme $\lim\limits_{x\to 0^+} c_x = 0^+$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: le graphe de f admet donc en 0^+ une tangente verticale et f n'est pas dérivable en 0, ni à gauche ni à droite car toutes les f_n étant impaires, la fonction f est aussi impaire.

Pour $x > 0$, comme $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ pour $a > 0$ par le théorème fondamental de l'intégration, en faisant tendre a vers 0, par continuité de f en 0, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Comme $f'(t) \underset{0}{\sim} -\ln((t)$, on a $f'(t) + \ln(t) \underset{0}{=} o(\ln(t))$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0;\alpha[, |f'(t) + \ln(t)| \leqslant \varepsilon|\ln(t)|$. Ainsi, $\left|\int_0^x (f'(t) + \ln(t))dt\right| \leqslant \varepsilon \int_0^x (-\ln(t))dt$. Il vient donc $\left|f(x) + x\ln(x) - x\right| \leqslant \varepsilon\left|x\ln(x) - x\right|$, ce qui garantit que $f(x) + x\ln(x) - x \underset{0}{=} o(x\ln(x) - x)$, ou encore que $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x) + x$. Mais comme $-x\ln(x) + x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$, on a enfin l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.

d. Comme toutes les f_n sont croissantes comme la fonction Arctan, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée positive vue en **b.**.

e. On a vu en **b.** que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Or les fonctions f_n admettent des limites finies en $\pm\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^3}{12}$.
Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.

f. La fonction f est impaire, croissante et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^3}{12} \sim 2,58$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$. Son graphe ressemble donc à celui de la fonction Arctan, avec deux asymptotes horizontales d'équation $y = \pm\frac{\pi^3}{12}$, mais avec une tangente verticale en 0.

10.10 **a.** Si $x = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, le terme $\frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ n'est pas défini donc $D \subset \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, en posant $u_n = \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$, on a $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n!}\right)$ et la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ converge donc par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ converge absolument donc converge. Ainsi, $D = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$.

b. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions pour $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} f_n$ sur $[-n_0;+\infty[$:

- (H_1) On a convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} f_n$ sur $[-n_0;+\infty[$ car toutes les fonctions f_n pour $n \geqslant n_0+1$ sont définies sur cet intervalle, la convergence ayant été vue en **a.**.
- (H_2) Toutes les fonctions f_n pour $n \geqslant n_0+1$ sont C^∞ sur $[-n_0;+\infty[$ car ce sont des fonctions rationnelles et, par récurrence simple, $\forall n \geqslant n_0+1$, $\forall x \geqslant -n_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$.
- (H_3) $\forall n \geqslant n_0+1$, $\forall x \in [-n_0;+\infty[$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{n!(n+x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{n!}$ donc $f_n^{(k)}$ est bornée sur $[-n_0;+\infty[$ et $||f_n^{(k)}||_{\infty,[-n_0;+\infty[} \leqslant \frac{k!}{n!}$. Or la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} \frac{1}{n!}$ converge ($k!$ est une constante) donc $\sum\limits_{n\geqslant n_0+1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[-n_0;+\infty[$.

Par un théorème du cours, la fonction $R_{n_0} : x \mapsto \sum\limits_{n\geqslant n_0+1} f_n(x)$ est de classe C^∞ sur $[-n_0;+\infty[$. Or $f = R_{n_0} + \sum\limits_{n=0}^{n_0} f_n$ et toutes les fonctions f_n pour $n \leqslant n_0$ sont de classe C^∞ sur D car rationnelles donc, par somme, f est de classe C^∞ sur $[-n_0;+\infty[\cap D$.
Puisque ceci est vrai pour tout entier $n_0 \in \mathbb{N}$, la fonction f est bien de classe C^∞ sur D.

c. Pour $x \in D$, on a $x+1 \in D$ et, en posant $p = n+1$ dans l'expression de $f(x+1)$, on obtient la relation

$xf(x)-f(x+1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{n!(n+x)}-\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!(p+x)}$ donc $xf(x)-f(x+1)=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{e}$.

d. En 0^+ : comme f est continue en 1 d'après **b.**, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x+1)=f(1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{e}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} xf(x)=\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e}=1$. Par conséquent, $f(x)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{x}$.

En $+\infty$: comme $|f_n|$ est décroissante et positive sur $[1;+\infty[$, on a $||f_n||_{\infty,[1;+\infty[}=|f_n(1)|=\frac{1}{(n+1)!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)!}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\ell_n=0$. Ainsi, par le théorème de la double limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1)=0$. Avec **c.**, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\frac{1}{e}$ donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{ex}$.

e. Soit $g_x:]0;1]\to\mathbb{R}$ défini par $g_x(t)=t^{x-1}e^{-t}$. La fonction g_x est continue sur $]0;1]$ et $g_x(t)\underset{0}{\sim}\frac{1}{t^{1-x}}$ donc g_x est intégrable sur $]0;1]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $1-x<1$. On connaît le développement en série entière de $\exp$, à savoir $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{-t}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!}$ donc $g_x(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$.

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $h_n:]0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $h_n(t)=\frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$.

- (H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} h_n$ converge simplement vers g_x sur $]0;1]$ (on en vient).
- (H_2) Les h_n sont continues et intégrables par RIEMANN sur $]0;1]$ car $h_n(t)\underset{0}{\sim}\frac{1}{t^{1-x-n}}$ et $1-x-n<1$.
- (H_3) La fonction g_x est continue sur $]0;1]$.
- (H_4) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1|h_n(t)|dt=\int_0^1\frac{t^{n+x-1}}{n!}dt=\frac{1}{n!}\left[\frac{t^{n+x}}{n+x}\right]_0^1=\frac{1}{n!(n+x)}$ car $n+x>0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!(n+x)}$ converge d'après la question **a.**.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a g_x intégrable sur $]0;1]$ (on le savait déjà) et surtout la relation $\int_0^1 g_x(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 h_n(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+x)}=f(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

10.11 La fonction $f:x\mapsto\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}$ est continue sur $]0;1[$. $f(x)\underset{0}{\sim}-\ln(x)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ car $\ln(1-x)\underset{0}{\sim}-x$ donc f est intégrable sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. De plus, f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$ car $f(x)\underset{1^-}{\sim}(x-1)\ln(1-x)$ car $\ln(x)\underset{1}{\sim}x-1$ donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=0$. Comme on a le développement en série entière $\forall x\in]0;1[$, $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, il vient, avec $f_n:]0;1]\to\mathbb{R}$ définie par avec $f_n(x)=-\frac{x^{n-1}\ln(x)}{n}$, la relation $I=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)dx$.

Le fonctions f_n sont continues sur $]0;1]$ et, comme $f_1(x)\underset{0}{\sim}-\ln(x)\underset{0}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)=0$ par croissances comparées donc que f_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$ en posant $f_n(0)=0$ si $n\geqslant 2$, les fonctions f_n sont intégrables sur $]0;1]$.

D'abord, en posant $u(x)=x^n$ et $v(x)=\ln(x)$, les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)v(x)=0$ par croissances comparées car $n\geqslant 1$ donc, par intégration par parties, on obtient la relation $\int_0^1 f_n=\left[-\frac{x^n\ln x}{n^2}\right]_0^1+\frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n^2}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1=\frac{1}{n^3}$ si $n\geqslant 1$.

Méthode 1 : par linéarité de l'intégrale, comme la fonction $f_1:x\mapsto-\ln(x)$ est intégrable sur $]0;1]$, et donc $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}f_n(x)=f-f_1$ aussi d'après ce qui précède, on a $I=\int_0^1 f_1+\int_0^1\sum\limits_{n=2}^{+\infty}f_n(x)dx$.

Pour $n \geqslant 2$, f_n est continue sur $[0;1]$ en posant $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 0$. De plus, f_n est dérivable sur $]0;1]$ et $\forall x \in]0;1]$, $f'_n(x) = -\frac{1}{n}\Big((n-1)x^{n-2}\ln(x) + x^{n-2}\Big)$ donc, avec le tableau de variations de f_n, on trouve $||f_n||_{\infty,[0;1]} = f_n\Big(e^{-\frac{1}{(n-1)}}\Big) = \frac{1}{en(n-1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{n^2}$. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ par RIEMANN. Par convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ sur le segment $[0;1]$, d'après le cours, $\int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3) - 1$. Comme $\int_0^1 f_1 = 1$, on obtient la valeur $I = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1.202$.

Méthode 2 : utilisons le théorème d'intégration terme à terme :

- (H_1) La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0;1[$ (on en vient).
- (H_2) Les f_n sont continues et intégrables (déjà vu).
- (H_3) La fonction f est continue sur $]0;1[$.
- (H_4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n^3}$ et la série de RIEMANN $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ converge.

Par le fameux théorème, on conclut que f est intégrable sur $]0;1]$[(on le savait déjà) et surtout la relation $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} = \zeta(3) \sim 1,202$.

10.12 **a.** Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $f_{n,p} : x \mapsto x^p \ln^n(x)$ est continue sur $]0;1]$ et $f_{n,0}(x) = (\ln(x))^p \underset{0}{=} o\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ et $\lim_{x\to 0^+} f_{n,p}(x) = 0$ si $n \geqslant 1$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, $f_{n,p}$ est intégrable sur $]0;1]$ donc $I_{n,p}$ est bien définie.

b. Pour $n \geqslant 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u : x \mapsto (\ln x)^n$ et $v : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$, u et v sont bien de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim_{x\to 0+} u(x)v(x) = 0$ et $u(1)v(1) = 0$. Ainsi, on obtient la formule de récurrence $I_{n,p} = \int_0^1 f_{n,p}(x)dx = -\frac{n}{p+1}\int_0^1 (\ln x)^{p-1}x^n dx = -\frac{n}{p+1}I_{n-1,p}$.

c. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^x} = x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ est continue sur $]0;1]$, on a $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ car $\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 1$. Ainsi, $\int_0^1 f(x)dx$ existe car f se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0;1]$.

d. Si $p = 0$, alors $I_{n,0} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. Alors, pour $p \in \mathbb{N}$, en reportant successivement, on a $I_{n,p} = -\frac{nI_{n-1,p}}{p+1} = \frac{n}{p+1} \times \frac{(n-1)I_{n-2,p}}{p+1} = \cdots = \frac{(-1)^n n!}{(p+1)^n}I_{n,0} = \frac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}$.

Comme $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n(\ln x)^n}{n!}$ (classique), on peut écrire $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n,n}(x)dx$.

- (H_1) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n f_{n,n}}{n!}$ converge simplement vers la fonction f sur $]0;1]$.
- (H_2) Toutes les fonctions $f_{n,n}$ sont continues et intégrables sur $]0;1]$ (on vient de le voir) et la fonction f est continue sur $]0;1]$.
- (H_3) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |\frac{f_{n,n}}{n!}| = \frac{|I_{n,n}|}{n!} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |\frac{f_{n,n}}{n!}|$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $u_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{n^2}$ dès que $n \geqslant 1$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0;1]$ (on le savait déjà) et il vient $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n I_{n,n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$ après changement d'indice.