DEVOIR 10 : SUITES, SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2024-2025 **mardi 19 novembre 2024**

QCM

1 *Suites de fonctions : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*

1.1 (les f_n sont bornées) $\Longrightarrow$ f est bornée

1.2 (les f_n sont continues) $\Longrightarrow$ f est continue

1.3 (les f_n sont paires) $\Longrightarrow$ f est paire

1.4 (les f_n sont 2π-périodiques) $\Longrightarrow$ f est 2π-périodique

2 *Suites de fonctions : soit la fonction $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=0$ si $x\in[0;1[$ et $f(1)=1$ puis, pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}$ définie par $f_n(x)=x^n$; 0 représente la fonction nulle*

2.1 $f_n \xrightarrow{CVS} 0$ sur $[0;1]$

2.2 $f_n \xrightarrow{CVS} f$ sur $[0;1]$

2.3 $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[0;1[$

2.4 $f_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[0;a]$ si $a\in[0;1[$

3 *Séries de fonctions : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (TS pour "sur Tout Segment") ; on suppose que chaque f_n admet une limite finie ℓ_n en $+\infty$*

3.1 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVUTS $\Longrightarrow$ S continue

3.2 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVNTS $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\ell_n$

3.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVNTS

3.4 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVN $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU

4 *Séries de fonctions : pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, une fonction $f_n:I\to\mathbb{R}$ et enfin $f:I\to\mathbb{R}$ une autre fonction (CVS, CVU et CVN comme habituellement)*

4.1 $\Big(\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n \text{ CVS (vers } f)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall\varepsilon>0,\ \forall x\in I,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ \Big|f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\Big|\leqslant\varepsilon\Big)$

4.2 $\Big(\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n \text{ CVU (vers } f)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall x\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \forall n\geqslant n_0,\ \Big|f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\Big|\leqslant\varepsilon\Big)$

4.3 $\Big(\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n \text{ CVN (vers } f)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists(\alpha_n)\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}},\ \big(\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n \text{ converge et } \forall x\in I,\ |f_n(x)|\leqslant\alpha_n\big)\Big)$

4.4 $\Big(\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n \text{ CVN (vers } f)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall x\in I,\ \big(\exists(\alpha_n)\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}},\ \sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n \text{ converge et } |f_n(x)|\leqslant\alpha_n\big)\Big)$

Définition Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et $f:I\to\mathbb{K}$ une fonction. Définir (avec des quantificateurs), l'assertion "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f".

Preuve Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers une fonction $f:I\to\mathbb{K}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers cette même fonction f.

Exercice 1 On pose $u_n(x)=e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x\in\mathbb{R}_+$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
b. Étudier la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a;+\infty[$ avec $a>0$.
c. Étudier la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$. On pourra évaluer $u_n(\pi/2n)$.

Exercice 2 On pose $f_n(x)=\dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ et, en cas de convergence, on pose $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

a. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer une expression simple de $S(x)$ pour $x\in\mathbb{R}_+$.
b. Trouver un équivalent de $||f_n||_\infty$ en $+\infty$ avec Stirling. Y-a-t-il convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$?
c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$. Y-a-t-il convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$?
d. Montrer que pourtant il y a convergence normale (donc uniforme) de $\sum f_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

DEVOIR 10 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 10	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1			X	X	
2		X		X	
3	X			X	
4	X		X		

1.1 Faux : $f_n(x) = e^x$ si $x \in [-n; n]$, $f_n(x) = 0$ sinon, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers $f = \exp$ non bornée **1.2** Faux : $f_n(x) = x^n$ sur $[0; 1]$ (classique) **1.3** Vrai : $f_n(-x) = f_n(x)$, à la limite : $f(-x) = f(x)$ **1.4** Vrai : idem.
2.1 Faux : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$ **2.2** Vrai : cours **2.3** Faux : $||f_n||_{\infty,[0;1[} = 1 \not\to 0$ **2.4** Vrai : $||f_n||_{\infty,[0;a[} = a^n \to 0$.
3.1 Vrai : CVU et continuité des f_n assure la continuité de S sur chaque segment de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$ **3.2** Faux : voir par exemple l'exercice 2 de ce devoir **3.3** Faux : si $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1+x}$ on a CVU de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ par le CSSA mais $||f_n||_{\infty,[a;b]} = \dfrac{1}{n+1+a}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1+a}$ diverge **3.4** Vrai : du cours.
4.1 Vrai : définition en inversant $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall x \in I$ **4.2** Faux : c'est $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \dots$ **4.3** Vrai : $(\Longleftarrow)$ alors $||f_n||_\infty \leqslant \alpha_n$ et comparaison $(\Longrightarrow)$ on prend $\alpha_n = ||f_n||_{\infty,I}$ **4.4** Faux : ceci ne traduit que la convergence absolue pour chaque x ce qui n'est pas la CVN.

Définition Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers f si les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,[a;b]} = 0$ où $||f_n - f||_{\infty,[a;b]} = \operatorname*{Sup}\limits_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)|$.
C'est-à-dire : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ (n_0 ne dépend que de ε).

Preuve Par hypothèse, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, la fonction $f_n - f$ est bornée. De plus, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geqslant n_1,\ \forall n \geqslant n_0,\ ||f_n - f||_{\infty,I} \leqslant \varepsilon$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,I} = 0$.
Soit $x \in I$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant ||f_n - f||_{\infty,I} \leqslant \varepsilon$ donc $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ par transitivité. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$; et ceci étant vrai pour tout réel $x \in I$, on a bien la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

Exercice 1 **a.** Si $x = 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(0) = 0$. Si $x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n(x)| \leqslant e^{-nx} = (e^{-x})^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-x})^n = 0$ car $0 < e^{-x} < 1$. La suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
b. Si $a > 0$, $\forall x \in [a; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-na} = (e^{-a})^n$ donc $||u_n||_{\infty,[a;+\infty[} \leqslant e^{-an}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-a})^n = 0$ car $0 < e^{-a} < 1$ d'où la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la $f = 0$ sur $[a; +\infty[$.
c. $u_n'(x) = n\Big(\cos(nx) - \sin(nx)\Big)e^{-nx}$ et l'étude de $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}}$ est délicate (même s'il semble clair que le maximum de $|u_n|$ sera atteint en $x = \dfrac{\pi}{4n}$). Mais $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}} \geqslant \left|u_n\Big(\dfrac{\pi}{2n}\Big)\right| = e^{-\pi/2}$ qui ne tend pas vers 0. Pas de convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 **a.** Pour $x \geqslant 0$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ CV par D'ALEMBERT car si $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n+1} = 0$ si $x > 0$. $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+$ et on sait que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = e^{-x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^{-x}e^x = 1$.
b. Pour $n \geqslant 1$: $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}(n-x)e^{-x}}{n!}$ donc $||f_n||_\infty = f_n(n) = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ avec STIRLING. Comme $1/2 < 1$, par RIEMANN, $\sum ||f_n||_\infty$ diverge donc il n'y a pas convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ par croissances comparées. Si $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$, par double limite, on a $1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\big) = 0$: NON ! Pas de convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
d. Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}_+$, $\forall x \in [a; b]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{b^n e^{-a}}{n!}$ donc $||f_n||_{\infty,[a;b]} \leqslant \dfrac{b^n e^{-a}}{n!}$ et $\sum \dfrac{b^n e^{-a}}{n!}$ converge comme avant (sa somme vaut e^{b-a}). Ainsi, $\sum f_n$ CVN sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ vers $f : x \to 1$.