DEVOIR 11 : RÉDUCTION DE SÉRIES

PSI 1 2024-2025 **mardi 26 novembre 2024**

QCM

1 *Suites de fonctions et intégration : soit un intervalle* I *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues et intégrables sur* I *qui converge uniformément vers une fonction continue* f

1.1 Si $I = \mathbb{R}_+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$

1.2 Si $I = \mathbb{R}_+$ et $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$

1.3 Si $I =]a;b[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$

1.4 Si $I = [a;b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$

2 *Séries et dérivation :* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de classe* C^1 *définies sur un intervalle* I *telle que* $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement vers* S *(CVN, CVNTS, CVU, CVUTS comme habituellement)*

2.1 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVNTS de I $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVN sur I

2.2 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVUTS de I $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur I

2.3 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f'_n$ CVN sur I $\Longrightarrow S$ de classe C^1 sur I

2.4 $\sum\limits_{n\geqslant 0} f'_n$ CVUTS de I $\Longrightarrow S$ de classe C^1 sur I

3 *Éléments propres d'un endomorphisme : soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* $u \in \mathcal{L}(E)$*, on prend* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$, $\mu \in \mathbb{C}$ *et* $E_\mu(u) = \mathrm{Ker}(u - \mu\,\mathrm{id}_E)$ *avec* $\lambda \neq \mu$

3.1 $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe

3.2 $E_\lambda(u)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(u)$

3.3 $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longleftrightarrow E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$

3.4 $\mathrm{Sp}(u)$ est non vide

4 *Éléments propres d'une matrice : soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ *tel que* $AB = BA$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$

4.1 $\mathrm{card}\,(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)) \leqslant n$

4.2 $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$

4.3 $E_\lambda(A)$ stable par B

4.4 $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$

Énoncé Donner (précisément) le théorème de dérivation des séries de fonctions (les définir d'abord).

Preuve Soit $n \geqslant 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre complexe de A.

Montrer que $\overline{\lambda}$ est valeur propre (complexe bien sûr) de A.

Exercice 1 Avec les séries géométriques, en écrivant $\dfrac{e^{ip\theta}}{2-e^{i\theta}} = \dfrac{e^{ip\theta}}{2} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{e^{i\theta}}{2}}$, écrire $\dfrac{e^{ip\theta}}{2-e^{i\theta}}$ sous la forme d'une série. Pour $m \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\theta$. En déduire, pour $p \in \mathbb{Z}$, la valeur de $I_p = \int_0^{2\pi} \dfrac{e^{ip\theta}}{2-e^{i\theta}} d\theta$.

Exercice 2 Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$.

a. Justifier que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$ est bien défini pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n$ converge normalement sur tout segment de $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. En déduire que f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer une expression très simple de $f'(x)$.

c. En déduire alors une expression simple de $f(x)$.

DEVOIR 11 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 11	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X	X	X	
2			X	X	
3	X		X		
4	X	X	X		

1.1 Faux : si $f_n(x) = n^{-2}ye^{-y/n}$, on a CVU de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $x \to 0$ car $||f_n||_\infty = \dfrac{e}{n}$ mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = 1$ **1.2** Vrai : par encadrement, on a $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = 0$ et $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **1.3** Vrai : $\left|\displaystyle\int_I f_n - \int_I f\right| \leqslant (b-a)||f_n - f||_\infty$ qui tend vers 0 **1.4** Vrai : un théorème **2.1** et **2.2** Faux : $f_n(x) = x^n$ sur $]0;1[$ par exemple **2.3** Vrai : CVN $\Longrightarrow$ CVU **2.4** Vrai : S de classe C^1 sur tout segment de I implique S C^1 sur I **3.1** Vrai : et ceci a fortiori si λ ou μ n'est pas valeur propre de u car alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$ ou $E_\mu(u) = \{0_E\}$ **3.2** Faux : si $\lambda = 0$, on ne sait pas si $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)$ **3.3** Vrai : $E_\lambda(u) \neq \{0_E\} \iff (\exists x \in E,\ x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x)$ **3.4** Faux : on a vu par exemple $P \mapsto XP$ dans $\mathbb{C}[X]$ **4.1** Vrai : des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre **4.2** Vrai : vu en cours **4.3** Vrai : A et B commutent **4.4** Faux : $A = E_{2,1} - E_{1,2}$ n'a pas de valeur propre réelle.

$\boxed{\textbf{Énoncé}}$ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

(H_1/H_2) $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers S et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I,

(H_3) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ CVU (ou CVN) sur I (ou CVU (ou CVN) sur tout segment de I).

Alors (R_1) S est C^1 sur I (R_2) $S' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f'_n$ sur I , c'est-à-dire que $\forall x \in I$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(f'_n(x)\right)$.

$\boxed{\textbf{Preuve}}$ Par définition, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. On transpose et $\overline{AX} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$ ce qui donne, puisque A est réelle, $A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$. Mais comme $\overline{X} \neq 0$ puisque $X \neq 0$, on en déduit que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ Pour $\theta \in [0;2\pi]$, $g_p(\theta) = \dfrac{e^{ip\theta}}{2 - e^{i\theta}} = \dfrac{e^{ip\theta}}{2}\dfrac{1}{1-(e^{i\theta}/2)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} e^{i(n+p)\theta}$ car $\left|\dfrac{e^{i\theta}}{2}\right| < 1$. De plus $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta}d\theta = \left[\frac{e^{im\theta}}{im}\right]_0^{2\pi} = 0$ si $m \neq 0$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta}d\theta = 2\pi$ si $m = 0$. Posons $f_n : \theta \mapsto \dfrac{1}{2^{n+1}} e^{i(n+p)\theta}$:

(H_1) $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers g_p sur $[0;2\pi]$ (on en vient).

(H_2) Les f_n sont continues et intégrables sur le segment $[0;2\pi]$ et g_p est continue sur $[0;2\pi]$.

(H_3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f_n| = \frac{\pi}{2^n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\pi}{2^n}$ converge (série géométrique). Par le TITT, g_p intégrable sur $[0;2\pi]$ et on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} g_p = I_p = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ip\theta}d\theta}{2 - e^{i\theta}}$ vérifie $I_p = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_n$: $I_p = 0$ si $p > 0$ et $I_p = \dfrac{1}{2^{-p+1}} \times (2\pi) = 2^p\pi$ si $p \leqslant 0$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ **a.** Si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[= I$, $|\sin x| < 1$ donc $\dfrac{\sin^{2n}(x)}{n} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (croissances comp.), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ CV.

b. Si $a \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'_n(x) = 2\cos(x)\sin^{2n-1}(x)$ donc $|f'_n(x)| \leqslant 2\sin(a)^{2n-1}$ donc $||f'_n||_{\infty,[-a;a]} \leqslant 2\sin(a)^{2n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2\sin(a)^{2n-1}$ converge car $|\sin a| < 1$. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement, les f_n sont de classe C^1 et $\sum\limits_{n\geqslant 1} f'_n$ converge normalement sur tout segment de I. On en déduit que f est de classe C^1 sur I et que $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2\cos(x)\sin^{2n-1}(x) = 2\sin(x)\cos(x)\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin^{2n-2}(x) = \dfrac{2\cos(x)\sin(x)}{1-\sin^2(x)} = 2\tan(x)$.

c. Comme I est un intervalle sur lequel $f'(x) = 2\tan(x) = -\Big(2\ln(\cos x)\Big)'$, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ f(x) = -2\ln(\cos x) + C$. Mais $f(0) = 0$ donc $C = 0$. Ainsi : $\forall x \in I,\ f(x) = -2\ln(\cos x)$.