TD 11 : RÉDUCTION

PSI 1 2024-2025 **vendredi 29 novembre 2024**

11.1 **a.** Comme $f \in E$ est de classe C^∞, $u(f)$ l'est aussi par composition. De plus, u est clairement linéaire. Soit $\varphi : x \mapsto px+q$, l'application φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on a facilement $\forall y \in \mathbb{R},\ \varphi^{-1}(y) = \dfrac{y-q}{p}$.
Enfin, si $(f,g) \in E^2$, $u(f) = g \iff f \circ \varphi = g \iff f = g \circ \varphi^{-1}$ donc u est bien un automorphisme de E car toute fonction g de E admet un unique antécédent f de E par u.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f, par définition, il existe $f \in E$ tels que $u(f) = f \circ \varphi = \lambda f$ et $f \neq 0$.
Par une récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N},\ f \circ \varphi^n = \lambda^n f$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(x) = px+1-p = p(x-1)+1$, $\varphi^2(x) = p\big((p(x-1)+1)-1\big)+1 = p^2(x-1)+1$ et, à nouveau, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi^n(x) = p^n(x-1)+1$ par une récurrence simple. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f\big(p^n(x-1)+1\big) = \lambda^n f(x)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, si on fait tendre n vers $+\infty$, comme $|p| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = 0$ donc, par continuité de f en 1, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f(p^n(x-1)+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n f(x) = f(1)$. Pour un réel x tel que $f(x) \neq 0$ (il en existe car $f \neq 0$), on a donc la convergence de $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui impose $\lambda \in]-1;1]$.

c. Si f est un vecteur propre de u, alors $f \neq 0$ et il existe $\lambda \in]-1;1]$ tel que $u(f) = \lambda f$. Ainsi, $u(f) = f \circ \varphi = \lambda f$ donc, en dérivant k fois (toutes les fonctions sont de classe C^∞), on a $\forall k \in \mathbb{N},\ \big(u(f)\big)^{(k)} = \lambda f^{(k)}$ d'où $\forall k \in \mathbb{N},\ p^k f^{(k)} \circ \varphi = \lambda f^{(k)}$ par récurrence car $\varphi'(x) = p$. Ainsi, $u(f^{(k)}) = \dfrac{\lambda}{p^k} f^{(k)}$ car $p \neq 0$. Si $f^{(k)}$ est non nulle, cette relation montre que $f^{(k)}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\dfrac{\lambda}{p^k}$. Mais comme $\left|\dfrac{\lambda}{p^k}\right| > 1$ si k assez grand car $|p| < 1$, la question **b.** prouve que c'est absurde. Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} = 0$.

d. Si λ valeur propre, f vecteur propre de u associé à λ, on sait d'après **c.** qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)} = 0$ donc que f est une fonction polynomiale (de degré inférieur ou égal à $k-1$). En notant $n = \deg(f) \in \mathbb{N}$ et en écrivant $f(x) = a_n x^n + \cdots$ avec $a_n = \mathrm{dom}(f) \neq 0$, on obtient $p^n a_n = \lambda a_n$ en identifiant le terme en x^n dans la relation $u(f) = \lambda f$. Ainsi, comme $a_n \neq 0$, on a $\lambda = p^n$. Comme on a vu en **c.** que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} \circ \varphi = \dfrac{\lambda}{p^k} f^{(k)} = p^{n-k} f^{(k)}$, si on évalue en 1 sachant que $\varphi(1) = p+q = 1$, on obtient $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(1) = p^{n-k} f^{(k)}(1)$. Comme $p^{n-k} \neq 1$ dès que $k \neq n$, on en déduit $\forall k \neq n,\ f^{(k)}(1) = 0$. En particulier, $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ f^{(k)}(1) = 0$ donc, d'après la formule de TAYLOR sur les polynômes, comme $\deg(f) = n$, on a $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = a_n(x-1)^n$.
On a montré que $\mathrm{Sp}(u) = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ E_{p^n}(u) = \mathrm{Vect}(f_n)$ est une droite où $f_n : x \mapsto (x-1)^n$.

11.2 **a.** Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Si P est annulateur A, comme $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $a_0I_3 + a_1A + a_2A^2 = \begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_1+a_2 & 0 \\ -a_1-a_2 & a_0-a_2 & 0 \\ 2a_1 & 2a_2 & a_0-a_1+a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
donc $a_1 = 0$ (case $(3,1)$) et $a_2 = 0$ (case $(3,2)$) puis $a_0 = 0$ (case $(1,1)$).
Ainsi, le seul polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$ est $P = 0$.

b. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) = \lambda^3+1 = (\lambda+1)(\lambda+j)(\lambda+j^2)$ après développement par rapport à la colonne 3 et $\chi_A = X^3+1$. D'après CAYLEY-HAMILTON, $\chi_A(A) = A^3+I_3 = 0$. On écrit alors $(-A^2)A = A(-A^2) = I_3$ donc la matrice A est inversible et $A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Méthode 1 : si P est un multiple de χ_A, $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $P = \chi_A Q$, alors $P(A) = \chi_A(A)Q(A) = 0.Q(A) = 0$. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$. Écrivons $P = Q\chi_A.Q + R$ la division euclidienne de P par χ_A avec $\deg(R) \leqslant 2$. Ainsi, $P(A) = \chi_A(A)Q(A) + R(A)$ donc $R(A) = 0$. D'après la question **a.**, on a donc $R = 0$ donc $P = \chi_A\, Q$ est un multiple de χ_A.

Méthode 2 : on sait que tous les polynômes annulateurs de A ont en particulier pour racines les valeurs propres de A. Si P annule A, alors $P(-1) = P(-j) = P(-j^2) = 0$ donc $P = (X+1)(X+j)(X+j^2)Q = (X^3+1)Q = \chi_A Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, si $P = \chi_A Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(A) = \chi_A(A)Q(A) = 0.Q(A) = 0$.

Conclusion : les polynômes annulateurs de A sont donc tous les polynômes multiples de χ_A, c'est-à-dire ceux de la forme $P = (X^3+1)Q = \chi_A Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

χ_A est donc le polynôme minimal de A (HP) ce qui est équivalent au fait que A est cyclique (HP) : il existe un vecteur non nul X de $\mathbb{R}^3$ tel que (X, AX, A^2X) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et il suffit de prendre $X = (0,1,0)$ pour s'en convaincre car $AX = (1,0,0)$ et $A^2X = (1,-1,2)$.

11.3 **a.** La matrice nulle $N = 0$ est dans E_X car $NX = 0 = 0.X$. Ainsi $E_X \neq \emptyset$. Si $(A,B) \in E_X^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe par définition des réels a et b tels que $AX = aX$ et $BX = bX$, ainsi $(A+\lambda B)X = AX + \lambda BX = aX + \lambda bX = (a+\lambda b)X$ donc X est aussi valeur propre de $A+\lambda B$ d'où $A+\lambda B \in E_X$. Par conséquent, E_X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc est lui-même un espace vectoriel.

b. Méthode 1 : traduisons l'appartenance à E_X, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans E_X si et seulement si MX est colinéaire à X, c'est-à-dire que $MX \in \mathrm{Vect}(X)$, ce qui se traduit par le fait que le projeté de MX sur l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(X)^\perp$ est le vecteur nul. En notant p_H cette projection, on sait que son expression vectorielle est $p_H : Y \mapsto Y - \dfrac{(Y|X)}{||X||^2}X$. Ainsi, $M \in E_X \iff MX = \dfrac{(MX|X)}{||X||^2}X$. Définissons donc $\theta : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ par $\theta(M) = MX - \dfrac{(MX|X)}{||X||^2}X$. θ est clairement linéaire et $E_X = \mathrm{Ker}(\theta)$. Par la formule du rang, on a $\dim(E_X) = n^2 - \mathrm{rang}\,(\theta)$. Or, comme $\theta(M) = p_H(MX)$ par construction, on a $\mathrm{Im}\,(\theta) \subset H$. Soit Z un vecteur non nul de H, il existe un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ qui envoie X sur Z (car en construisant une base $\mathcal{B} = (X, X_2, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ qui envoie $\mathcal{B}$ sur $(Z, \cdots, Z)$ par exemple), ainsi en notant M la matrice de u, on a $MX = Z$ donc $\theta(M) = Z \in \mathrm{Im}\,(\theta)$. Par double inclusion, on a montré que $\mathrm{Im}\,(\theta)$ est l'hyperplan H donc $\mathrm{rang}\,(\theta) = n-1$ et $\dim(E_X) = n^2 - (n-1) = n^2 - n + 1$.

Méthode 2 : comme (X) est libre, en posant $X_1 = X$, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, alors en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M, et en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on a $M = PAP^{-1}$ par formule de changement de base. Or, $M \in E_X$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $MX_1 = \lambda X_1$, c'est-à-dire si et seulement si la première colonne de la matrice A contient des 0 à partir de la deuxième ligne car l'image de X_1 par u est proportionnelle à X_1. En notant F le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant les matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que $\forall i \in [\![2;n]\!],\ a_{i,1} = 0$, on vient de montrer que $\varphi : F \mapsto E_X$ définie par $\varphi(A) = PAP^{-1}$ est un isomorphisme (sa linéarité est claire). Comme il est clair que $\dim(F) = n^2 - (n-1)$. On a, par l'isomorphisme φ : $\dim(E_X) = n^2 - n + 1$.

11.4 On a par calculs $\det(A) = \det(B) = 4 \neq 0$ donc rang $(A) =$ rang $(B) = 3$, $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B) = 5$ et même $\chi_A = \chi_B = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-2)^2(X-1)$ mais ce ne sont que des conditions nécessaires de similitude. Cherchons si les matrices A et B sont diagonalisables ou pas. Par un théorème du cours, puisque χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{R}$ et que $\dim(E_1(A)) = \dim(E_1(B)) = 1$ puisque 1 est une valeur propre simple de A et de B, A (resp. B) est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2(A)) = 2$ (resp. $\dim(E_2(B)) = 2$). Or $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc on a clairement rang $(A - 2I_3) = 2$ alors que rang $(B - 2I_3) = 1$. D'après le théorème du rang, comme $E_2(A) = \operatorname{Ker}(A - 2I_3)$ et $E_2(B) = \operatorname{Ker}(B - 2I_3)$, on a donc les ordres de multiplicité géométriques de la valeur propre 2 : $\dim(E_2(A)) = 1$ et $\dim(E_2(B)) = 2$.
On peut répondre à la question posée. En effet, si A et B étaient semblables, $E_2(A)$ et $E_2(B)$ auraient la même dimension, ce qui n'est pas le cas ici : A et B ne sont donc pas semblables.
Ainsi, A n'est pas diagonalisable alors que B l'est. Ainsi, B est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et on peut montrer, c'est la théorie hors programme de la réduction de Jordan, que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Si on fait les calculs, on trouve $A = PTP^{-1}$ et $B = QDQ^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

11.5 On calcule $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -a & -a \\ 1 & X-1 & 1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-1 & 2-X \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ en utilisant la linéarité par rapport à la troisième colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-2) \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ donc, en développant par rapport à la troisième colonne, on obtient $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -a \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2)$.
Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et que $1 \leqslant \dim(E_2(A)) \leqslant 1 = m_2(A)$ implique $\dim(E_2(A)) = 1 = m_2(A)$, on sait d'après un théorème du cours que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A)) = 2 = m_1(A)$. Comme $E_1(A) = \operatorname{Ker}(A - I_3)$, ceci est équivalent à rang $(A - I_3) = 3 - \dim(\operatorname{Ker}(A - I_3)) = 1$ par la formule du rang.
Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 si et seulement si $a = 0$ (regarder les lignes de A).
Ainsi A est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.
Même si ce n'est pas demandé, si $a = 0$, $E_2(A) = \operatorname{Vect}((0,-1,1))$ et $E_1(A) = \operatorname{Vect}((0,1,0),(1,0,-1))$ (en résolvant par exemple $AX = X$ et $AX = 2X$) donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De même, si $a \neq 0$, χ_A étant scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable et on peut montrer, théorie de la réduction de JORDAN (Camille JORDAN : français !) hors programme, que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Après calculs, on trouve $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a+1 & 1 \\ -a & -a & -1 \end{pmatrix}$.

11.6 **a.** A est diagonalisable car elle est symétrique réelle d'après le théorème spectral. Mais sans ça, on voit tout de suite que $v_1 = (1,1)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = 3$. Puisque $\mathrm{Tr}\,(A) = 2$, on en déduit que $\lambda_2 = -1$ est la seconde valeur propre de A et on vérifie que $v_2 = (1,-1)$ est un vecteur propre de A associé à λ_2. On aurait bien sûr pu calculer $\chi_A = (X-3)(X+1)$ et résoudre les systèmes $AX = 3X$ et $AX = -X$. Ainsi, comme (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $\det(A) = -3$, A est inversible (il suffit de dire que 0 n'est pas valeur propre de A). D'après les calculs précédents, comme $E_3(A)$ et $E_{-1}(A)$ sont des droites car 3 et -1 sont valeurs propres simples de A, on a $E_3(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$.
b. B est aussi diagonalisable car symétrique réelle, toujours d'après le théorème spectral pas encore vu.
Méthode 1 : comme on a clairement rang$\,(B) = 2$, le sous-espace $\mathrm{Ker}(B)$ est de dimension 2 par la formule du rang et on a $E_0(B) = \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ avec $w_1 = (1,0,-1,0)$ et $w_2 = (0,1,0,-1)$. De plus, comme les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont 0 et 2, on espère $2 \times 3 = 6$ et $2 \times (-1) = -2$ comme valeurs propres de B. Or, en posant $w_3 = (1,1,1,1)$, on a $Bw_3 = 6w_3$ donc 6 est valeur propre de B. De plus, en posant $w_4 = (1,-1,1,-1)$, on trouve $Bw_4 = -2w_4$ donc -2 est valeur propre de B. Comme $E_0(B)$, $E_6(B)$ et $E_{-2}(B)$ sont en somme directe, on a $E_0(B) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$, $E_6(B) = \mathrm{Vect}(w_3)$ et $E_{-2}(B) = \mathrm{Vect}(w_4)$ donc $\mathbb{R}^4 = E_0(B) \oplus E_6(B) \oplus E_{-2}(B)$; on retrouve que B est diagonalisable.
Enfin, $B = Q\Delta Q^{-1}$ avec les matrices $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Méthode 2 : on pouvait aussi trouver un polynôme annulateur de B en se servant du fait que $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$ puisque $(X-3)(X+1)$ annule A. Ensuite, $B^2 = \begin{pmatrix} 2A^2 & 2A^2 \\ 2A^2 & 2A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4A+6I_2 & 4A+6I_2 \\ 4A+6I_2 & 4A+6I_2 \end{pmatrix}$ et on a aussi $B^3 = \begin{pmatrix} 8A^2+12A & 8A^2+12A \\ 8A^2+12A & 8A^2+12A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28A+24I_2 & 28A+24I_2 \\ 28A+24I_2 & 28A+24I_2 \end{pmatrix} = 4B^2 + 12B$ donc le polynôme scindé à racines simples $X^3 - 4X^2 - 12X = X(X+2)(X-6)$ annule bien B. Et on pouvait aussi bien sûr calculer le polynôme caractéristique de B, ce qui aurait conduit après calculs à $\chi_B = X^2(X+2)(X-6)$.

11.7 **a.** Si $f \in E$ et $x \in [0;1]$, $t \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$ donc $T(f)(x)$ existe : T est bien définie. De plus, la linéarité de T provient de celle de l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
On peut montrer la continuité de T par le théorème de continuité sous le signe somme car :

(H_1) $\forall t \in [0;1]$, $x \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ est continue sur $[0;1]$.

(H_2) $\forall x \in [0;1]$, $t \mapsto \mathrm{Min}(x,t)f(t)$ est continue sur $[0;1]$.

(H_3) Comme f est continue sur le segment $[0;1]$, elle y est bornée donc $||f||_{\infty,[0;1]} = \underset{t\in[0;1]}{\mathrm{Max}}\,|f(t)|$ existe.

Ainsi, $\forall (x,t)\in[0;1]^2,\ |\operatorname{Min}(x,t)f(t)|\leqslant ||f||_{\infty,[0;1]}$ et $t\mapsto ||f||_{\infty,[0;1]}$ est intégrable sur $[0;1]$.

Ainsi, $T(f)$ est continue sur $[0;1]$ par le théorème de continuité sous le signe somme. Mais le théorème de dérivation sous le signe somme ne peut pas s'appliquer car $x\mapsto \operatorname{Min}(x,t)f(t)$ n'est pas dérivable.

Néanmoins, on constate que $T(f)(x)=\int_0^x \operatorname{Min}(x,t)f(t)dt+\int_x^1 \operatorname{Min}(x,t)f(t)dt=\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt$ et la dérivabilité de $T(f)$ découle du théorème fondamental de l'intégration car f et $t\mapsto tf(t)$ sont continues sur $[0;1]$. Ainsi, comme $T(f)(x)=\int_0^x tf(t)dt-x\int_1^x f(t)dt$, on a $T(f)'(x)=xf(x)-\int_1^x f(t)dt-xf(x)=-\int_1^x f(t)dt$. On recommence et $T(f)$ est de classe C^2 sur $[0;1]$ avec $T(f)''(x)=-f(x)$ ((f) est même de classe C^4 car f est de classe C^2). Par conséquent, T est un endomorphisme de E.

On remarque que l'aspect C^2 de $T(f)$ a été démontré seulement avec l'hypothèse f continue !!!

b. Soit $f\in \operatorname{Ker}(T)$, alors $T(f)=0$ donc $T(f)''=-f=0$ donc $f=0$. Ainsi, $\operatorname{Ker}(T)=\{0\}$ donc T est injective et 0 n'est pas valeur propre de T. Soit f un vecteur propre de T, alors il existe un réel $\lambda\neq 0$ tel que $T(f)=\lambda f$. On dérive deux fois pour avoir $T(f)''=\lambda f''$ mais on sait que $T(f)''=-f$ donc $f''=-\dfrac{1}{\lambda}f=\beta f$ avec $\beta=-\dfrac{1}{\lambda}$.

c. Soit $\beta\in\mathbb{R}$ et f une solution non nulle de l'équation $y''=\beta y$ sur $[0;1]$. D'après la question précédente, on a donc $f''=-\beta T(f)''$. La fonction $f+\beta T(f)$ a ainsi une dérivée seconde nulle sur l'intervalle $[0;1]$ donc elle y est affine. Il existe donc $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in[0;1],\ f(x)+\beta T(f)(x)=ax+b$. Or $T(f)(0)=0$ donc $b=f(0)$. On a aussi $T(f)'(1)=0$ donc $f'(1)=a$. Ainsi, $\forall x\in[0;1],\ \beta T(f)(x)=-f(x)+f'(1)x+f(0)\quad (A)$.

<u>Analyse</u> : supposons que f est un vecteur propre de T, $\exists \lambda\in\mathbb{R},\ T(f)=\lambda f$ et, d'après **b.**, $\lambda\neq 0$ et $T(f)''=\lambda f''=\lambda\beta f=-f$ donc $\lambda\beta=-1$ car $f\neq 0$. Comme $\forall x\in[0;1],\ (1+\beta\lambda)f(x)=0=f'(1)x+f(0)$ d'après (A), on a $\forall x\in[0;1],\ f'(1)x+f(0)=0$ ce qui impose $f(0)=f'(1)=0$.

<u>Synthèse</u> : supposons que $f(0)=f'(1)=0$ et $\beta\neq 0$, alors d'après ce qui précède, $\forall x\in[0;1],\ \beta T(f)(x)=-f(x)$ donc $T(f)=-\dfrac{1}{\beta}f$. Comme f est non nulle, $\lambda=-\dfrac{1}{\beta}$ est valeur propre de T et f est un vecteur propre de T.

Au final, si $f\neq 0$ est solution de $y''=\beta y$, on a : (f est un vecteur propre de T) $\Longleftrightarrow$ ($\beta\neq 0$ et $f(0)=f'(1)=0$).

d. • Si $\beta>0$, les solutions de $y''=\beta y$ sont les $f: x\mapsto Ae^{\sqrt{\beta}x}+Be^{-\sqrt{\beta}x}$ et la condition $f(0)=0$ impose $A+B=0$ donc $B=-A$, la condition $f'(1)=0$ amène $2A\sqrt{\beta}\operatorname{ch}(\sqrt{\beta})=0$ ce qui est montre que $A=B=0$ et $f=0$ donc f n'est pas vecteur propre de T. Ainsi, $\operatorname{Sp}(T)\subset\mathbb{R}_+$.

• Si $\beta<0$, les solutions de $y''=\beta y$ sont les $f: x\mapsto A\cos(\sqrt{-\beta}x)+B\sin(\sqrt{-\beta}x)$ et la condition $f(0)=0$ impose $A=0$, la condition $f'(1)=0$ amène $B\cos(\sqrt{-\beta})=0$. On a deux deux cas :

- si $\sqrt{-\beta}\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors $\cos(\sqrt{-\beta})\neq 0$ donc $B=0$ et f est nulle donc pas un vecteur propre pour T.
- si $\sqrt{-\beta}\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors B est quelconque. Posons $\sqrt{-\beta}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$ (car $\sqrt{-\beta}>0$) de sorte que $\beta=\beta_k=-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2$. En prenant $B=1$, la fonction $f_k: x\mapsto \sin(\sqrt{-\beta}\,x)=\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right)$ est vecteur propre de T associée à la valeur propre $\lambda_k=-\dfrac{1}{\beta_k}=\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-2}$.

Le spectre de T est $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{-2}\ \middle|\ k\in\mathbb{N}\right\}$ et les sous-espaces propres sont les droites $E_{\lambda_k}(T)=\operatorname{Vect}(f_k)$.

11.8 **a.** Comme B et C sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PCP^{-1}$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{C}$, on a $xI_n - B = xPP^{-1} - PCP^{-1} = P(xI_n - C)P^{-1}$ donc $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont semblables. Si x n'est valeur propre ni de B ni de C, les matrices $xI_n - B$ et $xI_n - C$ sont inversibles par définition donc $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$ existent. On prend l'inverse dans la relation $xI_n - B = P(xI_n - C)P^{-1}$ et on obtient $(xI_n - B)^{-1} = P(xI_n - C)^{-1}P^{-1}$ donc $(xI_n - B)^{-1}$ et $(xI_n - C)^{-1}$ sont aussi semblables.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C} \setminus Sp(A)$. On note $Sp(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$. Comme A est complexe, χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est trigonalisable, elle est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T. Comme $\chi_A = \chi_T = \prod\limits_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)}$ et que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux, il y a donc $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sur la diagonale de T comptées avec leurs ordres $m_{\lambda_1}(A), \cdots, m_{\lambda_r}(A)$. La matrice $xI_n - T$ étant triangulaire supérieure avec des termes non nuls sur la diagonale, $(xI_n - T)^{-1}$ est aussi triangulaire supérieure avec les inverses des termes diagonaux de $xI_n - T$ sur la diagonale. Ainsi, $(xI_n - A)^{-1}$ étant semblable à $(xI_n - T)^{-1}$, $\mathrm{Tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left((xI_n - T)^{-1}\right) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{m_{\lambda_k}(A)}{x - \lambda_k}$. Or, par dérivée d'un produit de polynômes, on a $\chi_A' = \sum\limits_{k=1}^{r} m_{\lambda_k}(A)(X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)-1} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r}(X - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}(A)}$, il vient donc

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus Sp(A),\ \frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \sum_{k=1}^{r} m_{\lambda_k}(A)\frac{(x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)-1}}{(x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(A)}} = \sum_{k=1}^{r}\frac{m_{\lambda_k}(A)}{x - \lambda_k} = \mathrm{Tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right).$$

11.9 Analyse : soit E un tel sous-espace tel que $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$. Distinguons selon la dimension $d = \dim(E)$.

si $d = 0$, on a $E = \{0\}$.

si $d = 1$, alors $E = \mathrm{Vect}(A)$ est une droite avec $A \neq 0$ et, comme $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$, on a forcément A inversible sinon $A \neq 0$ appartiendrait à $E \setminus GL_n(\mathbb{C})$ contredisant l'hypothèse.

si $d \geqslant 2$, E contient au moins un plan $F = \mathrm{Vect}(C, D)$ avec (C, D) libre. Comme avant, les matrices non nulles C et D sont forcément inversibles puisque sinon l'une d'entre elles ferait partie de $E \setminus GL_n(\mathbb{C})$ contredisant l'hypothèse. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A = \lambda C - D$, $\det(A) = \det(\lambda C - D) = \det(C(\lambda I_n - C^{-1}D))$ donc $\det(A) = \det(C)\det(\lambda I_n - C^{-1}D) = \det(C)\chi_M(\lambda)$ où $M = C^{-1}D$. Or le polynôme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS car $\deg(\chi_M) = n \geqslant 1$, il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_M(\lambda_0) = 0$ ce qui montre que la matrice $A = \lambda_0 C - D$ n'est pas inversible puisque $\det(A_0) = 0$. Ainsi, $A_0 \notin GL_n(\mathbb{C})$, $A_0 \neq 0$ car (C, D) est libre et $A_0 \in \mathrm{Vect}(C, D) \subset E$ ce qui prouve que $A_0 \in E \setminus GL_n(\mathbb{C})$ et on a une contradiction.

Synthèse : réciproquement, $E = \{0\}$ ou $E = \mathrm{Vect}(A)$ avec A inversible vérifient la condition $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$ car si $M = \alpha A$ avec $\alpha \neq 0$, on a $\det(M) = \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \neq 0$ donc $M \in GL_n(\mathbb{C})$.

Par double implication, les seuls sous-espaces E de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $E \setminus GL_n(\mathbb{C}) = \{0\}$ sont le sous-espace $\{0\}$ réduit au vecteur nul (de dimension 0) ou toutes les droites $\mathrm{Vect}(A)$ avec A inversible (de dimension 1).

La situation est différente sur le corps $\mathbb{R}$, il peut y avoir des plans de matrices où seule la matrice nulle est non inversible. Par exemple, si $n = 2$ et $E = \mathrm{Vect}(I_2, R)$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\dim(E) = 2$ et, si $M \in E$ et $M \neq 0$, on a $M = xI_2 + yR = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$ et $\det(M) = x^2 + y^2 > 0$ donc $M \in GL_2(\mathbb{R})$.

11.10 Soit λ une valeur propre de A, il existe donc un vecteur $u \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $Au = \lambda u$. Considérons un indice $p \in [\![1;n]\!]$ tel que $|u_p| = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |u_i| = ||u||_\infty > 0$. Si on écrit la ligne p du système $Au = \lambda u$, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{p,j}u_j = \lambda u_p$ qui s'écrit aussi $(\lambda - a_{p,p})u_p = -\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} a_{p,j}u_j$. En passant au module, par inégalité triangulaire, on a donc $|\lambda - a_{p,p}|\,|u_p| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,|u_j| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} |a_{p,j}|\,|u_p|$ par définition de p. Comme $|u_p| > 0$, il vient $|\lambda - a_{p,p}| \leqslant \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} |a_{p,j}|$ et on a $\lambda \in \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{p,p}| < \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} |a_{p,j}|\right\}$. Mais comme p dépend de λ et n'est pas unique, on peut juste dire que le spectre de A est inclus dans une réunion de disque fermés, $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{i,i}| < \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\right\}$. C'est le théorème de GERSCHGORIN.

11.11 **a.** Soit $P \in E$, on a $\deg(P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)) \leqslant 2$ donc le polynôme $T(P)$ appartient bien à E. De plus, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par définition $T(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(1)(X^2 - X) + (\lambda P + Q)(-1)(X^2 + X)$ qui devient $T(\lambda P + Q) = (\lambda P(1) + Q(1))(X^2 - X) + (\lambda P(-1) + Q(-1))(X^2 + X)$ et on a enfin la relation $T(\lambda P + Q) = \lambda(P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)) + (P(1)(X^2 - X) + P(-1)(X^2 + X)) = \lambda T(P) + T(Q)$ donc T est bien un endomorphisme de E. Comme $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $T(X^k) = X^2 - X + (-1)^k(X^2 + X)$, on a $T(X^k) = 2X^2$ si k est pair et $T(X^k) = -2X$ si k est impair. Ainsi, en notant $\mathcal{B}_0 = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de E, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(T) = A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Les colonnes d'indice pairs (resp. impairs) sont égales.

b. Visiblement, $\mathrm{rang}\,(T) = \mathrm{rang}\,(A) = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(E) - 2 = n + 1 - 2 = n - 1$ avec la formule du rang. On sait que $\mathrm{Im}\,(T)$ est engendré par les images par T des vecteurs de $\mathcal{B}_0$ donc $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et il est clair que les vecteurs $P_k = X^{2k} - 1$ pour $2k \leqslant n$ et $Q_k = X^{2k+1} - X$ pour $2k + 1 \leqslant n$ sont dans le noyau de T car $T(X^{2k}) = T(1) = 2X^2$ et $T(X^{2k+1}) = T(X) = -2X$. Ainsi, selon la parité de n :

- Si $n = 2p$ est pair, $\mathcal{B} = (P_1, Q_1, \cdots, Q_{p-1}, P_p)$ est une famille de degrés échelonnés donc libre de $n - 1 = 2p - 1$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(T)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathrm{Ker}(T)$.

- Si $n = 2p + 1$ est impair, $\mathcal{B} = (P_1, Q_1, \cdots, P_p, Q_p)$ est une famille de degrés échelonnés donc libre de $n - 1 = 2p$ vecteurs de $\mathrm{Ker}(T)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathrm{Ker}(T)$.

c. On a déjà vu que 0 était valeur propre de T. Comme on a vu que $T(X^2) = 2X^2$, 2 est valeur propre de T. De même, $T(X) = -2X$ donc -2 est aussi valeur propre de T. Ainsi, $\mathrm{Sp}(T) = \{-2, 0, 2\}$ et $E_0(T) = \mathrm{Ker}(T)$ est de dimension $n - 1$, $E_2(T) = \mathrm{Vect}(X^2)$ et $E_{-2}(T) = \mathrm{Vect}(X)$ sont des droites. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $\dim(E)$, T est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{11.12}}$ **a.** Si $f \in E$, par opérations, comme $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ sont de classe C^∞ de $[0;1]$ dans $[0;1]$, la fonction $T(f)$ est bien définie et de classe C^∞ sur $[0;1]$ donc $T(f) \in E$. Pour $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule $\forall x \in [0;1]$, $T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{2}\Big((\lambda f+g)\Big(\frac{x}{2}\Big)+(\lambda f+g)\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big) = \frac{\lambda}{2}\Big(f\Big(\frac{x}{2}\Big)+f\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big)+\frac{1}{2}\Big(g\Big(\frac{x}{2}\Big)+g\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big)$ ce qui donne $T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x)+T(g)(x)$ donc $T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$: T est en endomorphisme de E.

b. Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$, $T^2(f)(x) = T(T(f))(x) = \frac{1}{2}\Big(T(f)\Big(\frac{x}{2}\Big)+T(f)\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big)$ et, par définition de $T(f)$, on a $T^2(f)(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Big(f\Big(\frac{x}{4}\Big)+f\Big(\frac{x+1}{4}\Big)\Big)+\frac{1}{2}\Big(f\Big(\frac{x+2}{4}\Big)+f\Big(\frac{x+3}{4}\Big)\Big)\right)$ ce qui donne l'initialisation suivante : $T^2(f)(x) = \frac{1}{4}\Big(f\Big(\frac{x}{4}\Big)+f\Big(\frac{x+1}{4}\Big)+f\Big(\frac{x+2}{4}\Big)+f\Big(\frac{x+3}{4}\Big)\Big)$.

Soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall f \in E$, $\forall x \in [0;1]$, $T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)$. Par définition, comme $T^{n+1} = T^n \circ T$, on obtient $T^{n+1}(f)(x) = T^n(T(f))(x) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} T(f)\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)$ par hypothèse de récurrence puis, par définition de T, $T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\Big(f\Big(\frac{x+k}{2^{n+1}}\Big)+f\Big(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big)\Big) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k}{2^{n+1}}\Big)+\frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big)$.
En posant $j = k+2^n$ dans le seconde somme, on a $\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\Big) = \sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f\Big(\frac{x+j}{2^{n+1}}\Big)$ donc, en changeant j en k et en regroupant les deux sommes, on arrive bien à $T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\Big(\frac{x+k}{2^{n+1}}\Big)$.

Par principe de récurrence, $\forall f \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)$, cette formule étant même valable quand $n = 0$ car $T^0(f)(x) = f(x) = \frac{1}{2^0}\sum\limits_{k=0}^{2^0-1} f\Big(\frac{x+k}{2^0}\Big)$ puisque $T^0 = \mathrm{id}_E$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de Riemann $R_n(f) = \frac{1-0}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\Big(0+k\frac{1-0}{n}\Big)$ associée à $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. D'après un théorème du cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$. D'après **b.**, $T^n(f)(0) = R_{2^n}(f)$. Comme $(R_{2^n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(0) = \int_0^1 f(t)dt$.

d. Pour $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $T^n(f)(x) - T^n(f)(0) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\Big(f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)-f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)\Big)$ donc, par inégalité triangulaire, $|T^n(f)(x)-T^n(f)(0)| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\Big|f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)-f\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big|$. Or, par inégalité des accroissements finis, en posant $M = ||f'||_{\infty,[0;1]}$ qui existe puisque la fonction f' est continue sur le segment $[0;1]$ d'après le théorème des bornes atteintes, on a $\Big|f\Big(\frac{x+k}{2^n}\Big)-f\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big| \leqslant \frac{Mx}{2^n}$. Ainsi, $|T^n(f)(x)-T^n(f)(0)| \leqslant \frac{2^n Mx}{2^{2n}} \leqslant \frac{M}{2^n}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(T^n(f)(x)-T^n(f)(0)) = 0$ dont on déduit que $\forall x \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt$ en écrivant $T^n(f)(x) = \big(T^n(f)(x)-T^n(f)(0)\big)+T^n(f)(0)$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $c : x \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ sur $[0;1]$. D'ailleurs, avec ce qui précède, $|T^n(f)(x)-c(x)| = |T^n(f)(x)-T^n(f)(0)+T^n(f)(0)-c(x)| \leqslant |T^n(f)(x)-T^n(f)(0)|+|T^n(f)(0)-c(x)|$ donc $|T^n(f)(x)-c(x)| \leqslant \frac{M}{2^n}+\Big|T^n(f)(0)-\int_0^1 f(t)dt\Big|$. Ainsi, $||T^n(f)-c||_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{M}{2^n}+\Big|T^n(f)(0)-\int_0^1 f(t)dt\Big|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\frac{M}{2^n}+\Big|T^n(f)(0)-\int_0^1 f(t)dt\Big|\Big) = 0$ donc $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers c sur $[0;1]$.

e. Si 1 est la fonction constante égale à 1 sur $[0;1]$, $T(1) = 1$ donc, comme $1 \neq 0$, 1 est valeur propre de T. Soit $f \in E_1(T)$, alors $T(f) = f$ donc, par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n(f) = f$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt$ ce qui prouve que f est constante. Ainsi, $E_1(T) = \text{Vect}(1)$.

f. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$. Supposons qu'il existe $f \in E$ telle que $T(f) = kf$. Par une autre récurrence simple, pour $x \in [0;1]$, il vient $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n(f) = k^n f(x)$. Comme $(T^n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après **d.** et que $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ceci impose que $f(x) = 0$. Seule la fonction nulle est dans $E_k(f)$ donc k n'est pas valeur propre de f si $|k| > 1$. Par le même argument, comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on en déduit aussi que $E_1(T) = \{0\}$ donc que -1 n'est pas valeur propre de T.

g. Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$, on a $T(f)'(x) = \frac{1}{4}\left(f'\left(\frac{x}{2}\right) + f'\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \frac{T(f')(x)}{2}$ donc $T(f)' = \frac{T(f')}{2}$. Soit $f \in E_{1/2}(T)$, alors $T(f) = \frac{f}{2}$ donc $\frac{f'}{2} = T(f)' = \frac{T(f')}{2}$ et $T(f') = f'$ ce qui, d'après **e.**, montre que f' est constante. Ainsi, f est une fonction affine. Réciproquement, si on pose $f : x \mapsto ax + b$, alors $f \in E$ et $\forall x \in [0;1],\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(a\frac{x}{2} + b + a\frac{x+1}{2} + b\right) = \frac{ax}{2} + \frac{a}{4} + b = \frac{ax+b}{2} = \frac{f(x)}{2}$ si et seulement si $a + 2b = 0$ ce qui montre que $f(x) = b(1-2x)$. Ainsi, $E_{1/2}(T) = \text{Vect}(g)$ avec $g : x \mapsto 1-2x$ et $\frac{1}{2} \in \text{Sp}(T)$.

11.13 <u>(i) $\Longrightarrow$ (iv)</u> : supposons (i). Par l'absurde, si λ était une valeur propre commune à A et à B, λ serait aussi une valeur propre de B^T car $\text{Sp}(B^T) = \text{Sp}(B)$ et il existerait deux vecteurs non nuls $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AU = \lambda U$ et $V \in \mathcal{M}n, 1(\mathbb{C})$ tel que $B^T V = \lambda V$. Alors, en posant $X = UV^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on aurait $AX - XB = AUV^T - UV^T B = (AU)V^T - U(B^T V)^T = \lambda UV^T - U(\lambda V^T) = 0$ donc $UV^T = 0$ d'après (i). Mais ceci est impossible car si $U^T = (u_1\ \cdots u_n)$ et $V^T = (v_1\ \cdots\ v_n)$, $\exists (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ u_i \neq 0$ et $v_j \neq 0$ et alors, si $X = (x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $x_{i,j} = u_i v_j \neq 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde : il n'existe aucune valeur propre commune à A et à B.

<u>(iv) $\Longrightarrow$ (iii)</u> : supposons (iv). En posant $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de la matrice B, on écrit $\chi_B = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}(B)}$ donc, par les propriétés des polynômes de matrices, $\chi_B(A) = \prod\limits_{k=1}^{r} (A - \lambda_k I_n)^{m_{\lambda_k}(B)}$. Or, pour un complexe λ, la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible si et seulement si λ n'est pas une valeur propre de A. Ici, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ n'étant pas des valeurs propres de A puisque ce sont des valeurs propres de B, les matrices $A - \lambda_1 I_n, \cdots, A - \lambda_r I_n$ sont toutes inversibles. En tant que produit de puissances de matrices inversibles, $\chi_B(A)$ est donc inversible ($GL_n(\mathbb{C})$ est une groupe multiplicatif).

<u>(iii) $\Longrightarrow$ (ii)</u> : supposons la matrice $\chi_A(B)$ inversible. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX = XB$. On a alors $A^0 X = XB^0 = X$ et $A^1 X = XB^1$ par hypothèse. Si on suppose que $A^k X = XB^k$ pour un entier $k \geqslant 1$, alors $A^{k+1}X = A(A^k X) = A(XB^k) = (AX)B^k = (XB)B^k = XB^{k+1}$. Par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = XB^k$. Si on écrit $\chi_B = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$, alors $\chi_B(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k A^k$ donc $\chi_B(A)X = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k A^k X = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k XB^k = X\chi_B(B)$. Or $\chi_B(B) = 0$ d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON donc $\chi_B(A)X = 0$. Comme $\chi_B(A)$ est inversible, on en déduit que $X = 0$ comme attendu.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u> : supposons (ii) et soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(X) = AX - XB$. φ est clairement linéaire donc c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'hypothèse $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AX = XB \Longrightarrow X = 0$ traduit le fait que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ donc que φ est injective. Comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$ est fini, φ est donc un

automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui se traduit bien par (i).

11.14 Le polynôme $P = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$ est annulateur de A donc, d'après le cours, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{2,4\}$. De plus, comme P est scindé à racines simples, A est diagonalisable, donc $\det(A) = 2^{m_2(A)}4^{m_4(A)}$ d'après le cours. Comme $\det(A) = 32 = 2^1 \times 4^2$ par hypothèse, on a forcément $m_2(A) = 1$ et $m_4(A) = 2$. Il existe donc une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(2,4,4)$.

Comme $\psi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est clairement linéaire et qu'elle est bijective car $QMQ^{-1} = N \iff N = Q^{-1}MQ$ pour $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, qui transforme donc une base en base, donc la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ en une base $\mathcal{B} = (QE_{1,1}Q^{-1}, QE_{1,2}Q^{-1}, QE_{1,3}Q^{-1}, QE_{2,1}Q^{-1}, QE_{2,2}Q^{-1}, QE_{2,3}Q^{-1}, QE_{3,1}Q^{-1}, QE_{3,2}Q^{-1}, QE_{3,3}Q^{-1})$.

L'application φ_A est aussi un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(R)$ et on sait que sa trace est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en particulier en notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$, on a $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A) = \mathrm{Tr}\,(M)$. Or,

- $\varphi_A(QE_{1,1}Q^{-1}) = QDE_{1,1}Q^{-1} = 2QE_{1,1}Q^{-1}$ car $DE_{1,1} = 2E_{1,1}$.
- $\varphi_A(QE_{1,2}Q^{-1}) = QDE_{1,2}Q^{-1} = 2QE_{1,2}Q^{-1}$ car $DE_{1,2} = 2E_{1,2}$.
- $\varphi_A(QE_{1,3}Q^{-1}) = QDE_{1,3}Q^{-1} = 2QE_{1,3}Q^{-1}$ car $DE_{1,3} = 2E_{1,3}$.
- $\varphi_A(QE_{2,1}Q^{-1}) = QDE_{2,1}Q^{-1} = 4QE_{2,1}Q^{-1}$ car $DE_{2,1} = 4E_{1,1}$.
- $\varphi_A(QE_{2,2}Q^{-1}) = QDE_{2,2}Q^{-1} = 4QE_{2,2}Q^{-1}$ car $DE_{2,2} = 4E_{1,2}$.
- $\varphi_A(QE_{2,3}Q^{-1}) = QDE_{2,3}Q^{-1} = 4QE_{2,3}Q^{-1}$ car $DE_{2,3} = 4E_{1,3}$.
- $\varphi_A(QE_{3,1}Q^{-1}) = QDE_{3,1}Q^{-1} = 4QE_{3,1}Q^{-1}$ car $DE_{3,1} = 4E_{3,1}$.
- $\varphi_A(QE_{3,2}Q^{-1}) = QDE_{3,2}Q^{-1} = 4QE_{3,2}Q^{-1}$ car $DE_{3,2} = 4E_{3,2}$.
- $\varphi_A(QE_{3,3}Q^{-1}) = QDE_{3,3}Q^{-1} = 4QE_{3,3}Q^{-1}$ car $DE_{3,3} = 4E_{3,3}$.

Ainsi, $M = \mathrm{diag}(2,2,2,4,4,4,4,4,4)$ donc $\mathrm{Tr}\,(\varphi_A) = 30$.

11.15 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on constate que la somme des trois colonnes de A donne la colonne $\begin{pmatrix} \sin(\alpha)+\sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha)+\sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha)+\sin(2\alpha) \end{pmatrix}$ donc on effectue l'opération de Gauss $C_1 \longleftarrow C_1+C_2+C_3$ dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & X & -\sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & 0 & X-\sin(2\alpha) \end{vmatrix}$ et on obtient $\chi_A = \begin{vmatrix} X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha) & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha) & X & -\sin(\alpha) \\ X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha) & 0 & X-\sin(2\alpha) \end{vmatrix}$ et on utilise la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne pour avoir $\chi_A = \big(X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha)\big)\begin{vmatrix} 1 & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 1 & X & -\sin(\alpha) \\ 1 & 0 & X-\sin(2\alpha) \end{vmatrix}$. Ensuite $L_2 \longleftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$ et $\chi_A = \big(X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha)\big)\begin{vmatrix} 1 & -\sin(2\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & X+\sin(2\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(2\alpha) & X-\sin(2\alpha)+\sin(\alpha) \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la première colonne, $\chi_A = \big(X-\sin(2\alpha)-\sin(\alpha)\big)\big(X+\sin(2\alpha)\big)\big(X-\sin(2\alpha)+\sin(\alpha)\big)$. Posons $\lambda_1 = -\sin(2\alpha)$, $\lambda_2 = \sin(2\alpha)+\sin(\alpha)$ et $\lambda_3 = \sin(2\alpha)-\sin(\alpha)$ de sorte que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois valeurs propres réelles de A.

• $\lambda_1 = \lambda_2 \iff 2\sin(2\alpha) + \sin(\alpha) = 0 \iff \sin(\alpha)\big(4\cos(\alpha)+1\big) = 0 \iff \big(\alpha \equiv 0\ [\pi] \text{ ou } \alpha \equiv \pm\alpha_0\ [2\pi]\big)$ en posant $\alpha_0 = \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ car $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

• $\lambda_1 = \lambda_3 \iff 2\sin(2\alpha) - \sin(\alpha) = 0 \iff \sin(\alpha)\big(4\cos(\alpha)-1\big) = 0 \iff \big(\alpha \equiv 0\ [\pi] \text{ ou } \alpha \equiv \pm\alpha_1\ [2\pi]\big)$ en posant $\alpha_1 = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{4}\right) \sim 1,32$ (ou $\sim 76^o$) et $\alpha_0 = \pi - \alpha_1$ par les propriétés de la fonction Arccos.

• $\lambda_2 = \lambda_3 \iff \sin(\alpha) = 0 \iff \alpha \equiv 0\ [\pi]$.

Nous pouvons maintenant distinguer plusieurs cas :

• Si $\alpha \not\equiv 0, \pi, \pm\alpha_0, \pm\alpha_1\ [2\pi]$, alors d'après les équivalences précédentes, A possède trois valeurs propres réelles distinctes donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

• Si $\alpha \equiv 0\ [\pi]$, alors $A = 0$ donc A est diagonalisable.

• Si $\alpha \equiv \alpha_0\ [2\pi]$, $\cos(\alpha) = -\dfrac{1}{4}$ et $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ donc $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{8} \sim 0,48$ et $\lambda_3 = -\dfrac{\sqrt{15}}{8} - \dfrac{\sqrt{15}}{4} = -\dfrac{3\sqrt{15}}{8} \sim -1,45$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \left\{\dfrac{\sqrt{15}}{8}, -\dfrac{3\sqrt{15}}{8}\right\}$ et λ_1 est valeur propre double de A. Or $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix}$

donc $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{15}}{8} & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{8} & -\frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 car les lignes 1 et 2 sont égales et les deux dernières sont indépendantes. Par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3)) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

• Si $\alpha \equiv -\alpha_0\ [2\pi]$, la matrice A est l'opposée de celle du cas précédent donc elle n'est pas non plus diagonalisable mais seulement trigonalisable.

• Si $\alpha \equiv \alpha_1\ [2\pi]$, $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{4}$ et $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ donc $\lambda_1 = -\dfrac{\sqrt{15}}{8} \sim -0,48$ et $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{8} + \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{3\sqrt{15}}{8} \sim 1,45$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \left\{-\dfrac{\sqrt{15}}{8}, \dfrac{3\sqrt{15}}{8}\right\}$ et λ_1 est valeur propre double de A. Or $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{8} \end{pmatrix}$

donc $A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{8} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix}$ est encore de rang 2 car les lignes 1 et 2 sont égales et les deux dernières sont indépendantes. Par la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3)) = 1$ donc A n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

- Si $\alpha \equiv -\alpha_1\ [2\pi]$, la matrice A est l'opposée de celle du cas précédent donc elle n'est pas non plus diagonalisable mais seulement trigonalisable.

En conclusion, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour toute valeur de α réelle sauf si $\alpha = \pm \mathrm{Arccos}\left(\pm \frac{1}{4}\right)$ (4 valeurs) auquel cas A n'est que trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

11.16 **a.** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

b. Par définition, pour $j \in [\![2;n]\!]$, la colonne j-ième colonne de A, notée C_j, vaut α fois la $(j-1)$-ième colonne de A, c'est-à-dire $C_j = \alpha C_{j-1}$. Comme la première colonne de A n'est pas nulle car $\alpha^{1+1-2} = \alpha^0 = 1$, on a donc $\text{rang}\,(A) = 1$. D'après la formule du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n-1 > 0$ et 0 est de multiplicité au moins $n-1$ de sorte que $\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss. Puisque $\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}\,(A)X^{n-1}$ grâce au cours et que $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2}$, la dernière valeur propre est $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2}$. Ainsi, les valeurs propres de A sont $\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\ \text{fois}}, \mathrm{Tr}\,(A)$.

c. Traitons deux cas :

$\underline{\mathrm{Tr}\,(A) = 0}$: dans ce cas, $\chi_A = X^n$ donc $A^n = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton. Comme $A \neq 0$, on a vu ci-dessus que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n-1 \neq n$ donc A n'est pas diagonalisable (la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle).

$\underline{\mathrm{Tr}\,(A) \neq 0}$: comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et que les ordres de multiplicité des deux valeurs propres de A sont égales aux dimensions des sous-espaces propres associés donc Aest diagonalisable, c'est-à-dire semblable à $\mathrm{Tr}\,(A)E_{n,n}$ par exemple.

Ainsi, A est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{Tr}\,(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^{2i-2} \neq 0$. On a $\mathrm{Tr}\,(A) = n \neq 0$ si $\alpha = \pm 1$ et, si $\alpha^2 \neq 1$, on a $\mathrm{Tr}\,(A) = \dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2-1}$ donc A est diagonalisable si et seulement si α est un racine $(2n)$-ième de l'unité différente de 1 et de -1. En conclusion, A diagonalisable $\iff$ $\alpha \in \mathbb{U}_{2n} \setminus \{1,-1\}$.

11.17 Par hypothèse, le polynôme $P = X^3 - 3X - 5$ est annulateur de A. Comme $P' = 3(X^2-1)$, la fonction polynomiale P est croissante sur $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$ et elle est décroissante sur $[-1;1]$. Comme $P(-1) = 3$ et $P(1) = -7$, d'après le théorème de la bijection, la fonction P ne s'annule qu'une seule fois en α sur $\mathbb{R}$ car elle est strictement négative sur $]-\infty;1[$ et qu'elle réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]-7;+\infty[$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = +\infty$. De plus, comme $P(2) = -3 < 0 = P(\alpha) < 13 = P(3)$, on a $\alpha \in]2;3[$. Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note β et $\overline{\beta}$ (avec $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$) les deux autres racines complexes de P. Or on sait que les valeurs propres de A sont des racines de P donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\alpha,\beta,\overline{\beta}\}$. Puisque P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\det(A) = \alpha^{m_\alpha(A)}\beta^{m_\beta(A)}\overline{\beta}^{m_{\overline{\beta}}(A)}$ (en notant $m_\lambda(A)$ la multiplicité de λ dans χ_A) d'après le cours. Comme A est une matrice réelle, $m_{\overline{\beta}}(A) = m_\beta(A)$ donc $\det(A) = \alpha^{m_\alpha(A)}(\beta\overline{\beta})^{m_\beta(A)} = \alpha^{m_\alpha(A)}|\beta|^{2m_\beta(A)} > 0$.