

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 10

PSI 1 2024-2025

du lundi 02/12 au vendredi 06/12

- 1 Suites et séries de fonctions : voir programme précédent
- 2 Convergence uniforme et régularité : voir programme précédent
- 3 Intégration et dérivation des suites et séries de fonctions : voir programme précédent
- 4 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice :
 - valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme ; spectre ;
 - exemples en dimension infinie : spectre vide, spectre infini ;
 - les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe ;
 - rapport entre commutation des endomorphismes et stabilité des sous-espaces propres ;
 - valeurs propres réelles ou complexes d'une matrice ; relation avec la conjugaison ;
 - relation entre spectre d'un endomorphisme et d'une matrice ;
- 5 Polynôme caractéristique :
 - définition du polynôme caractéristique ($\chi_u = \det(\text{Xid}_E - u)$) d'une matrice ou d'un endomorphisme ;
 - expression développée de $\chi_u = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$;
 - les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u ;
 - multiplicité algébrique (ordre de multiplicité de la racine dans χ_u) d'une valeur propre ;
 - si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ relation entre $\dim(E)$, $\text{Tr}(u)$, $\det(u)$ et les valeurs propres ;
 - polynôme caractéristique de matrices semblables ou de la transposée d'une matrice ;
 - si F stable par u alors $\chi_{u|_F}$ divise χ_u ;
 - multiplicité géométrique (dimension du sous-espace propre associé) d'une valeur propre ;
 - la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique (et ≥ 1) pour une valeur propre ;
 - application du polynôme caractéristique pour calculer le déterminant des matrices ;
 - théorème de CAYLEY-HAMILTON (preuve non exigible) ;
- 6 Diagonalisation en dimension finie :
 - définition d'un endomorphisme diagonalisable, propriétés équivalentes ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie (déf. 6.3)
- 2 définir les ordres de multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre (déf 6.4 et 6.5)
- 3 énoncer la propriété sur des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes (prop. 6.2)
- 4 énoncer la propriété sur les valeurs propres et sous-espaces propres de matrices semblables (prop. 6.5)
- 5 énoncer le théorème concernant certains coefficients de χ_u (th. 6.7)
- 6 énoncer le résultat sur le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit (rem. 6.9)
- 7 énoncer le théorème de CAYLEY-HAMILTON (th. 6.12)
- 8 énoncer le théorème sur $\text{Tr}(u)$ et $\det(u)$ en fonction des valeurs propres si χ_u est scindé (th. 6.13)
- 9 énoncer les inégalités concernant les différents ordre de multiplicité d'une valeur propre (th. 6.14)
- 10 prouver que si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$ (prop. 6.1)
- 11 prouver que si u et v commutent, les $E_\lambda(u)$ sont stables par v (prop. 6.3)
- 12 prouver que λ est valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$ (th. 6.8)

Prévision pour la prochaine semaine : toute la réduction