CHAPITRE 9
ALGÈBRE BILINÉAIRE

PARTIE 9.1 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

DÉFINITION 9.1 :
Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$*, on dit que* φ *est un* **produit scalaire** *sur* E *si* φ *est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur* E*, c'est-à-dire si :*

- $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall(u,v,w) \in E^3,\ \begin{cases} \varphi(\alpha u+\beta v, w) = & \alpha\varphi(u,w)+\beta\varphi(v,w) \\ \varphi(u, \alpha v+\beta w) = & \alpha\varphi(u,v)+\beta\varphi(u,w) \end{cases}$ *(bilinéarité).*
- $\forall(u,v) \in E^2,\ \varphi(u,v) = \varphi(v,u)$ *(symétrie).*
- $\forall u \in E, \varphi(u,u) = q(u) \geqslant 0$ *(positivité).*
- $\forall u \in E, \varphi(u,u) = q(u) \geqslant 0$ et $\varphi(u,u) = q(u) = 0 \Longrightarrow u = 0_E$ *(aspect défini).*

Un **espace préhilbertien réel** *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

<u>*REMARQUE 9.1*</u> *: On note souvent* $(u|v) = \varphi(u,v)$*, ou* $u.v$ *(en géométrie) ou* $\langle u,v\rangle$ *le produit scalaire.*

THÉORÈME 9.1 :
Soit E **un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté** $(.|.)$**. Alors l'application** $x \in E \mapsto ||x|| = \sqrt{(x|x)}$ **est une norme sur** E **appelée norme euclidienne associée à** $(.|.)$ **:**

(i) $\forall x \in E,\ ||x|| \geqslant 0$ **(positivité),**

(ii) $\forall x \in E,\ ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$ **(séparation),**

(iii) $\forall(\lambda,x) \in \mathbb{R}\times E,\ ||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$ **(homogénéité),**

(iv) $\forall(x,y) \in E^2,\ ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ **(inégalité triangulaire ou de MINKOWSKI).**

De plus : $||x+y|| = ||x|| + ||y|| \Longleftrightarrow \big(\exists\lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y$ **ou** $y = \lambda x\big)$ (x **et** y **sont positivement liés).**

THÉORÈME 9.2 :
Soit E **un espace préhilbertien réel et** $(u,v) \in E^2$ **:**

- $|(u|v)| \leqslant ||u|| \times ||v||$ **(CAUCHY-SCHWARZ) et** $|(u|v)| = ||u|| \times ||v|| \Longleftrightarrow (u,v)$ **est liée.**
- $(u|v) = \dfrac{1}{2}\big(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\big) = \dfrac{1}{2}\big(||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2\big)$ **(identités de polarisation).**
- $(u|v) = \dfrac{1}{4}\big(||u+v||^2 - ||u-v||^2\big)$ **(identité de polarisation).**
- $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2\big(||u||^2 + ||v||^2\big)$ **(identité du parallélogramme).**

<u>*REMARQUE 9.2*</u> *: L'inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ *nous permet de définir l'angle non orienté* $\theta \in [0;\pi]$ *entre deux vecteurs non nuls* u *et* v *de* E *par :* $\theta = \text{Arccos}\left(\dfrac{(u|v)}{||u||\,||v||}\right)$.

DÉFINITION 9.2 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* $(u, v) \in E^2$*, on dit que :*

- u *est* **unitaire** *(ou normé) si* $||u|| = 1$.
- u *et* v *sont* **orthogonaux** *si* $(u|v) = 0$ *; on le note* $u \perp v$.

<u>*REMARQUE 9.3*</u> *: Si* $x \neq 0_E$ *alors le vecteur* $\dfrac{x}{||x||}$ *est toujours unitaire.*

DÉFINITION 9.3 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs de* E*, on dit que* $(x_i)_{i\in I}$ *est :*

- **orthogonale** *si* $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow (x_i|x_j) = 0$.
- **orthonormale** *(ou* **orthonormée***) si* $\forall (i,j) \in I^2,\ (x_i|x_j) = \delta_{i,j}$.

PROPOSITION 9.3 :
Soit E un espace préhilbertien réel.

- **Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.**
- **Si $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille orthogonale :** $\left|\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2$ **(PYTHAGORE).**

<u>*REMARQUE 9.4*</u> *: • Pour* $(x, y) \in E^2, ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Longleftrightarrow x \perp y$*. Par contre :*
- *Si* $n > 2$ *et si* $(x_1, \cdots, x_n)$ *vérifie la relation de* PYTHAGORE*, elle n'est pas forcément orthogonale.*

DÉFINITION 9.4 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On dit que* F *et* G *sont des* **sous-espaces orthogonaux** *si* $\forall (x,y) \in F \times G, (x|y) = 0$ *; on le note* $F \perp G$.

PROPOSITION 9.4 :
Soit E un espace préhilbertien réel et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E supposés deux à deux orthogonaux. Alors la somme des F_k est directe : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$**.**

DÉFINITION 9.5 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel et* F *un sous-espace vectoriel de* E *(et même si* F *n'est qu'une partie* E*). On définit* **l'orthogonal** *de* F*, noté* $F^\perp$ *par :* $F^\perp = \big\{x \in E \mid \forall y \in F,\ (x|y) = 0\big\}$.

<u>*REMARQUE 9.5*</u> *: Avec cette définition, on a toujours* $\{0_E\}^\perp = E$ *et* $E^\perp = \{0_E\}$.

PROPOSITION 9.5 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- $F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$
- $F \perp G \Longleftrightarrow F \subset G^\perp \Longleftrightarrow G \subset F^\perp$
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ et $F \subset \big(F^\perp\big)^\perp$
- $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$
- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

<u>*REMARQUE 9.6*</u> *: On peut avoir* $\big(F^\perp\big)^\perp \neq F$ *et/ou* $F^\perp + G^\perp \neq (F \cap G)^\perp$.

PARTIE 9.2 : ESPACES EUCLIDIENS

DÉFINITION 9.6 :

- *Un* **espace euclidien** E *est un espace préhilbertien réel de dimension finie.*
- *Dans un tel espace* E*, une famille* $\mathcal{B}$ *de vecteurs de* E *est dite une* **base orthonormale** *(ou* **orthonormée***) de* E *si* $\mathcal{B}$ *est base de* E *et une famille orthonormale de* E*.*

THÉORÈME ÉNORME 9.6 :
Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de E, alors il existe une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ de vecteurs de E qui vérifie les conditions suivantes :

- $\forall p \in [\![1;n]\!],\ \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.
- $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_n)$ **est une famille orthonormale de E.**
- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ (x_k|e_k) > 0$ **(ceci amène aussi l'unicité).**

C'est le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

REMARQUE 9.7 : On orthonormalise directement $(x_1, \cdots, x_n)$ *en* $(f_1, \cdots, f_n)$ *avec les formules :*

- $e_1 = \dfrac{x_1}{||x_1||}$ *(et on a bien* $(e_1|x_1) = ||x_1|| > 0$*).*
- $\forall p \in [\![2;n]\!],\ e_p = \dfrac{g_p}{||g_p||}$ *en notant* $g_p = x_p - \sum\limits_{k=1}^{p-1} (e_k|x_p)e_k$ *(avec* $(e_p|x_p) = ||g_p|| > 0$ *car* $g_p \neq 0_E$*).*

PROPOSITION 9.7 :
Soit E un espace euclidien.

- **E possède au moins une base orthonormale.**
- **Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.**

REMARQUE 9.8 : Si $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1 \leqslant k \leqslant p}} F_k$ *et si* $\mathcal{B}_k$ *est une base orthonormale de* F_k *(pour tout indice* $k \in [\![1;p]\!]$*) alors* $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ *est une base orthonormale de* E *dite adaptée à cette décomposition.*

THÉORÈME 9.8 :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, $(x,y) \in E^2$ qui se décomposent $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$:

- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ x_k = (e_k|x)$, **(**$x = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k|x)e_k$ **: coordonnées en fonction des produits scalaires).**
- $(x|y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ **(produit scalaire en fonction des coordonnées).**
- $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ **(norme en fonction des coordonnées).**

PROPOSITION 9.9 :
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, on associe à des vecteurs x et y de E les vecteurs colonnes X et Y de leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Alors on a $(x|y) = {}^tXY = X^TY$ (en identifiant réel et matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$).

REMARQUE FONDAMENTALE 9.9 : Soit E *euclidien,* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormée de* E *:*

- *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$*, alors on a* $A = \Big((e_i|f(e_j))\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
- *Si* $\mathcal{B}'$ *est une autre base orthonormée et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *:* ${}^tP = P^{-1}$.

THÉORÈME 9.10 :
Soit E un espace préhilbertien réel (pas forcément de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E. Et $(F^\perp)^\perp = F$.
En particulier, si E est de dimension finie alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

DÉFINITION 9.7 :
Soit E *un espace préhilbertien réel et* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension finie, alors le sous-espace* $F^\perp$ *est appelé* **le supplémentaire orthogonal** *de* F.
La **projection orthogonale** *sur* F *est la projection* p_F *sur* F *parallèlement à* $F^\perp$.

PROPOSITION 9.11 :
Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Nous avons maintenant les égalités : $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ et $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

PROPOSITION 9.12 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E de dimension finie, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de F. Pour $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est $p_F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k|x)e_k$.

REMARQUE 9.10 : Si $a \neq 0_E$, $D = \mathrm{Vect}(a)$, $H = D^\perp$ *:* $p_D(x) = \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a$, $p_H(x) = x - p_D(x) = x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a$.

DÉFINITION 9.8 :
Soit E *un espace préhilbertien réel,* F *un sous-espace de* E*, la* **distance de** $x \in E$ **à** F *est* $d(x, F) = \operatorname*{Inf}\limits_{y\in F} ||x - y||$.

THÉORÈME ÉNORME 9.13 :
Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E de dimension finie et $x \in E$. Alors la distance $d(x, F) = ||x - p_F(x)|| = \sqrt{||x||^2 - ||p_F(x)||^2} = \operatorname*{Min}\limits_{y\in F} ||x - y||$ est atteinte seulement en $y = p_F(x)$.

REMARQUE HP 9.11 : Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ *un espace préhilbertien réel,* $(e_1, \cdots, e_p)$ *une famille orthonormée de vecteurs de* E, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$*, alors* $\forall x \in E$, $\sum\limits_{k=1}^{p} (e_k|x)^2 = ||p_F(x)||^2 \leqslant ||x||^2$ *(inégalité de* BESSEL*).*

THÉORÈME ÉNORME 9.14 :
Soit $\big(E, (\,.\,|\,.\,)\big)$ un espace euclidien et φ une forme linéaire (element de E^*) alors il existe un unique vecteur a de E tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = (a|x)$ (théorème de représentation).

PROPOSITION 9.15 :
Soit E un espace euclidien, $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ un hyperplan de E (donc $a \neq 0_E$), la droite associée $D = H^\perp = \mathrm{Vect}(a)$ et $x \in E$: $d(x, H) = \dfrac{\big|(x|a)\big|}{||a||}$ et $d(x, D)^2 = \left|\left|x - \dfrac{(a|x)}{||a||^2}a\right|\right|^2 = ||x||^2 - \dfrac{(x|a)^2}{||a||^2}$.