TD 12 : RÉDUCTION

PSI 1 2024-2025 **vendredi 06 décembre 2024**

12.1 **a.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, dans le calcul de $\chi_A(\lambda)$, on développe par rapport à la ligne 1 et on obtient la relation

$$\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 & -a_n \\ -a_1 & \lambda & & & 0 \\ 0 & -a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & -a_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-a_n) \begin{vmatrix} -a_1 & \lambda & & (0) \\ 0 & -a_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ainsi, comme il ne reste que les déterminants de matrices triangulaires, $\chi_A(\lambda) = \lambda^n - (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$.

En notant $p = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, on a donc $\chi_A = X^n - p$. Traitons trois cas :

- Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, alors $A = 0$ donc A est diagonalisable.
- Si $p = 0$ et $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$, alors $A \neq 0$ alors que d'après Cayley-Hamilton on a $A^n = 0$ car $\chi_A = X^n$ donc A est nilpotente alors que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) < n$ car $A \neq 0$. Les ordres algébrique et géométrique de 0 n'étant pas égaux, A n'est pas diagonalisable.
- Si $p \neq 0$, $\chi_A = X^n - p$ étant scindé à racines simples et annulateur de A, A est diagonalisable.

On conclut que A est diagonalisable si et seulement $(a_1 = \cdots = a_n = 0$ ou $a_1 \times \cdots \times a_n \neq 0)$.

b. • Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, toute base de $\mathbb{C}^n$ est une base de vecteurs propres de $A = 0$.

• Si $p = \rho e^{i\theta} \neq 0$, les racines de $\chi_A = X^n - p$, donc les valeurs propres de A, sont toutes les racines n-ièmes de p, qui sont les complexes $z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta + 2k\pi)}{n}}$ (pour $k \in [\![0; n-1]\!]$). Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$, on sait qu'en résolvant le système $AX = z_k X$ on va trouver une droite (car z_k est une valeur propre simple de A) et on trouve $E_{z_k}(A) = \mathrm{Vect}(v_k)$ avec $v_k = \left(a_n z_k^{n-1}, a_1 a_n z_k^{n-2}, a_1 a_2 a_n z_k^{n-3}, \cdots, p\right)$. Ainsi, $\mathcal{B} = (v_0, \cdots, v_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

12.2 **a.** On calcule et $\chi_A = X(X-1)^2$ qui est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est au moins trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et elle est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A)) = 2 \iff \mathrm{rang}\,(A - I_3) = 1$ par le théorème du rang. Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Il est visible que $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, -2, 0)$ et que $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = e_2 = (0, 1, 0)$.

<u>Méthode 1</u> : on sait avec la réduction de Jordan que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc il ne reste plus qu'à trouver un vecteur v_3 tel que $Av_3 = v_2 + v_3$ et on trouve sans peine en résolvant le système que $v_3 = \frac{1}{2}(1, 0, 1)$ convient. Ainsi $A = PTP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

<u>Méthode 2</u> : n'importe quel vecteur convient pour compléter (v_1, v_2), par exemple $v_3' = (0, 0, 1) \notin \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et on a une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3')$ de $\mathbb{R}^3$. On calcule $Av_3' = (1, 0, 1) = (0, 0, 1) + (1, -2, 0) + 2(0, 1, 0)$ donc

$Av_3' = v_1 + 2v_2 + v_3'$ et $A = PT'P^{-1}$ où $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Si M vérifie $M^2 = A$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, alors il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$ donc $M^2X = AX = \lambda^2 X$ donc $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$ ainsi $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$ et on a $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}$. On vient de prouver au passage que $E_\lambda(M) \subset E_{\lambda^2}(A)$ donc, comme $E_0(A)$ et $E_1(A)$ sont des droites, les sous-espaces $E_0(M)$, $E_1(M)$, $E_{-1}(M)$ sont égaux à $\{0\}$ ou forment une droite. De plus, comme $E_1(M)$ et $E_{-1}(M)$ sont en somme directe, on a aussi $E_1(M) \oplus E_{-1}(M) \subset E_1(A)$ ce qui montre que 1 et -1 ne peuvent pas être valeurs propres de M simultanément (un plan ne peut pas être inclus dans une droite).

c. Si $M^2 = A$, alors $\det(M^2) = \det(M)^2 = \det(A) = 0$ donc $\det(M) = 0$ et 0 est valeur propre de M. Si 0 était la seule valeur propre de M, alors on aurait $\chi_M = X^3$ et $M^3 = 0$ avec Cayley-Hamilton ce qui est impossible car $M^4 = M^3M = A^2 \neq 0$. Ainsi, avec la question précédente, on ne peut avoir que $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$ ou $\mathrm{Sp}(M) = \{0, -1\}$.

Si $M^2 = A$, alors $E_0(M) = \mathrm{Ker}(M)$ est une droite d'après **c.** et **d.**. En notant $N = P^{-1}MP$, on a $M^2 = A \iff PN^2P^{-1} = PTP^{-1} \iff N^2 = T$. Ainsi, si $M^2 = A$, on a $NT = N^3 = TN$ (même chose avec T').

<u>Méthode 1</u> : en posant le calcul, on trouve que $NT = TN \iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi, pour avoir $N^2 = T$, il faut maintenant $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 2bc \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = T$ d'où $a = 0$ et $\big((b = 1 \text{ et } c = \frac{1}{2}) \text{ ou } (b = -1 \text{ et } c = -\frac{1}{2})\big)$.

Réciproquement, $M_1 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $M_2 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = -M_1$ vérifient la relation $M^2 = A$ et sont donc les deux seules solutions. Comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Méthode 2</u> : en posant le calcul, on trouve que $NT = TN \iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & b-a \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi, pour avoir $N^2 = T$, il faut $N^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & b^2 - a^2 \\ 0 & b^2 & 2bc \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = T$ d'où $a = 0$ et $\big((b = 1 \text{ et } c = 1) \text{ ou } (b = -1 \text{ et } c = -1)\big)$.

Réciproquement, $M_1 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $M_2 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = -M_1$ vérifient bien $M^2 = A$ et sont donc les deux seules solutions. Comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Méthode 3</u> : on traite les deux cas vus à la question **d.**:

$\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$ Alors $E_0(M) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_1(M) = \mathrm{Vect}(v_2)$ donc, par formule de changement de base, $M = PNP^{-1}$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (par exemple) car les traces de deux matrices semblables sont égales. Comme $M^2 = A$, $N^2 = T$ donc $a = 0$ et $2b = 1$.

$\mathrm{Sp}(M) = \{0, -1\}$ Alors $E_0(M) = \mathrm{Vect}(v_1)$ et $E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}(v_2)$ donc, par formule de changement de base,

$M = PNP^{-1}$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ car les traces de deux matrices semblables sont égales. Comme $M^2 = A$, $N^2 = T$ donc $a = 0$ et $2b = -1$.

On retrouve donc, avec les calculs précédents de P^{-1}, les matrices M_1 et $-M_1$ comme uniques solutions.

12.3 **a.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors, par définition, on a $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ ce qui devient, par hypothèse, $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i \Big)$. On obtient $P(u) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k \lambda_i^k v_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_i^k \Big) v_i = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) v_i$ en inversant cette somme double. Si on prend $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P(u) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) v_i = 0$ car les λ_i sont des racines de P. Ainsi, u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

b. Généralisons, soit $k \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de X^k par P, ce qui donne $X^k = QP + R$ avec $\deg(R) < \deg(P) = n$. Ainsi, $u^k = Q(u) \circ P(u) + R(u) = R(u)$ car $P(u) = 0$. Or, d'après ce qui précède, $R(u) = \sum_{i=1}^{n} R(\lambda_i) v_i$. Mais, pour $i \in [\![1;n]\!]$, on a $\lambda_i^k = Q(\lambda_i)P(\lambda_i) + R(\lambda_i) = R(\lambda_i)$ donc $u^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k v_i$.

c. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, le polynôme L_i souhaité admet les λ_k (sauf λ_i) pour racines donc $L_i = Q_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (X - \lambda_k)$.

Comme on veut que $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, Q_i doit être une constante et on veut aussi $L_i(\lambda_i) = 1$ ce qui impose la condition $Q_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_k) = 1$. Il existe donc un unique polynôme L_i possédant ces caractéristiques et c'est $L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \left(\dfrac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} \right)$ (polynômes de Lagrange). Par construction : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $L_i(\lambda_k) = \delta_{i,k}$.

d. Soit $i \in [\![1;n]\!]$, par construction on a $(X - \lambda_i)L_i = Q_i P$ donc $(u - \lambda_i \mathrm{id}_E) \circ L_i(u) = Q_i P(u) = 0$ ce qui équivaut au fait que $\mathrm{Im}\,(L_i(u)) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_E) = E_{\lambda_i}(u)$. Or, puisque $\deg(L_i) = n - 1$ donc $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$, on a d'après les questions **a.** et **c.** la relation $L_i(u) = \sum_{k=1}^{n} L_i(\lambda_k) v_k = v_i$. Comme $v_i \neq 0$ par hypothèse, on a $\mathrm{Im}\,(L_i(u)) = \mathrm{Im}\,(v_i) \neq \{0_E\}$ donc il existe au moins un vecteur $x \neq 0_E$ dans $\mathrm{Im}\,(v_i)$ qui est donc aussi dans $E_{\lambda_i}(u)$, ce qui prouve que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i. Ainsi, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de u. De plus, comme P est annulateur de u, les valeurs propres de u font partie des racines de P. Par double inclusion, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

e. D'après la question précédente, u admet n valeurs propres distinctes et $\dim(E) = n$ donc les n sous-espaces propres sont de dimension 1 car ils sont en somme directe.

12.4 **a.** On vérifie que ni 0, ni 1, ni -2 ne sont racine de P mais que $P(-1) = -1-2+2+1-4+4 = 0$ et $P(2) = 32-32-16+4+8+4 = 0$ donc -1 et 2 sont des racines de P.

On a donc deux racines d'un polynôme de degré 5, ce qui n'est pas suffisant. Voyons si -1 ou 2 ne serait pas par hasard racine multiple de P. Comme $P' = 5X^4 - 8X^3 - 6X^2 + 2X + 4$, on a $P'(-1) = 9 \neq 0$ mais $P'(2) = 0$ donc 2 est racine au moins double de P. Par conséquent $(X-2)^2(X+1)$ divise P. Après calculs, on trouve $P = (X-2)^2(X+1)(X^2+X+1)$ qui devient classiquement $P = (X-2)^2(X+1)(X-j)(X-j^2)$.

b. <u>Analyse</u> : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$. Comme P est annulateur de M, les valeurs propres complexes de M sont des racines de P donc ne peuvent être $2, -1, j$ ou j^2. Comme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on sait d'après le cours que $\det(M) = 2^{m_2(M)}(-1)^{m_1(M)}j^{m_j(M)}j^{2m_{j^2}(M)}$. De plus, comme M est réelle et j et j^2 conjugués, on sait que $m_j(M) = m_{j^2}(M)$. Ainsi, $\det(M) = 2^{m_2(M)}(-1)^{m_1(M)}$ car $j \times j^2 = j^3 = 1$. Ainsi, si on impose $\det(M) = \pm 1$, on doit forcément avoir $m_2(M) = 0$ ce qui prouve que 2 n'est pas valeur propre de M. Ainsi $M - 2I_n$ est inversible donc, puisque $(M-2I_n)^2(M+I_n)(M-jI_n)(M-j^2I_n) = 0$, on peut simplifier ceci, en multipliant par $(M-2I_n)^{-2}$, en la relation $(M+I_n)(M-jI_n)(M-j^2I_n) = 0$. Par conséquent, le polynôme scindé à racines simples $Q = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ est annulateur de M ce qui montre que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, si $M = UDU^{-1}$ avec $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale, on a aussi $M^3 = UD^3U^{-1}$ et M^3 est aussi diagonalisable avec $-1 = (-1)^3$ de multiplicité $m_1(M)$ et $1 = j^3 = (j^2)^3$ de multiplicité $m_j(M) + m_{j^2}(M)$. Ainsi, $\text{Tr}\,(M^3) = (-1) \times m_1(M) + 1 \times (m_j(M) + m_{j^2}(M)) = -m_1(M) + 2m_j(M)$. La condition $\text{Tr}\,(M^3) = 0$ impose donc $m_1(M) = 2m_j(M)$. Mais comme on sait aussi que l'on a la relation $\dim(\mathbb{R}^n) = n = m_1(M) + m_j(M) + m_{j^2}(M) = 4m_j(M)$, on en déduit que n est un multiple de 4.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, la matrice $M = M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ est réelle, de déterminant 1, vérifie $M^3 = \begin{pmatrix} (-I_2)^3 & 0 \\ 0 & R^3 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1,-1,1,1)$ car R représente une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans le plan euclidien canonique, donc $\text{Tr}\,(M^3) = 0$ et $(X+1)(X^2+X+1)$ annule M (raisonner par blocs 2×2) donc a fortiori P (multiple de $(X+1)(X^2+X+1)$) annule M. Plus généralement, si $n = 4p$, si on pose $M = \text{diag}(M_4, \cdots, M_4)$, alors on a bien $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Tr}\,(M^3) = 0$, $\det(M) = \pm 1$ et $P(M) = 0$.

Les entiers cherchés sont donc exactement les multiples de 4.

12.5 Comme le polynôme $X^n - 1$ annule A par hypothèse et que $X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont les n racines n-ièmes de l'unité), la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ où z_1, z_2 sont des racines n-ièmes de l'unité car toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, notamment $X^n - 1$. Par conséquent, $\text{Tr}\,(A) = \text{Tr}\,(D) = z_1 + z_2$ et $\det(A) = \det(D) = z_1 z_2$. Ainsi, $|\text{Tr}\,(A)| \leqslant |z_1| + |z_2| \leqslant 1 + 1 = 2$ donc $\text{Tr}\,(A) \in [\![-2;2]\!]$ et $|\det(A)| = |z_1||z_2| = 1$ donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$. De plus, puisque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\text{Tr}\,(A) = a + d \in \mathbb{Z}$ et $\det(A) = ad - bc \in \mathbb{Z}$ et on sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \text{Tr}\,(A)X + \det(A) \in \mathbb{Z}[X]$. Les valeurs possibles de $\text{Tr}\,(A)$ et $\det(A)$ montrent que $\chi_A = X^2 - \text{Tr}\,(A)X + \det(A)$ ne peut être que l'un des

10 polynômes suivants : X^2-2X+1, X^2-X+1, X^2+1, X^2+X+1, X^2+2X+1 ou X^2-2X-1, X^2-X-1, X^2-1, X^2+X-1, X^2+2X-1.

Éliminons quelques cas ! En effet, si $\det(A)=-1$, $z_1z_2=-1$ donc z_1 et z_2 ne peuvent pas être conjugués sinon $z_1z_2=z_1\overline{z_1}=|z_1|^2=1$. Par conséquent, z_1 et z_2 sont des racines réelles de X^n-1 donc ne peuvent être que ± 1. Pour avoir $z_1z_2=-1$, forcément $z_1=1=-z_2$ ou $z_1=-1=-z_2$ d'où $\mathrm{Tr}\,(A)=1-1=0$. Ainsi, χ_A est l'un des 6 polynômes X^2-2X+1, X^2-X+1, X^2+1, X^2+X+1, X^2+2X+1, X^2-1.

<u>Cas 1 : $\chi_A=X^2-2X+1$</u> : comme $X^2-2X+1=(X-1)^2$, $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$ donc, comme A est diagonalisable, A est donc semblable à la matrice I_2, c'est-à-dire $A=PI_2P^{-1}=I_2$ donc $A^{12}=I_2$.

<u>Cas 2 : $\chi_A=X^2-X+1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2-X+1=(X+j)(X+j^2)$, $\mathrm{Sp}(A)=\{-j,-j^2\}$, on a $A=P\begin{pmatrix}-j & 0\\ 0 & -j^2\end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^6=I_2$ car $(-j,-j^2)\in\mathbb{U}_6^2$. Ainsi, $A^{12}=I_2$. Par exemple, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$.

<u>Cas 3 : $\chi_A=X^2+1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2+1=(X-i)(X+i)$, $\mathrm{Sp}(A)=\{-i,i\}$, on a $A=P\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$ donc $A^4=I_2$ car $(-i,i)\in\mathbb{U}_4^2$. Ainsi, $A^{12}=I_2$. Par exemple, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

<u>Cas 4 : $\chi_A=X^2+X+1$</u> : comme A est diagonalisable et que $X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$, $\mathrm{Sp}(A)=\{j,j^2\}$, on a $A=P\begin{pmatrix}j & 0\\ 0 & j^2\end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^3=I_2$ car $(j,j^2)\in\mathbb{U}_3^2$. Ainsi, $A^{12}=I_2$. Par exemple, $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

<u>Cas 5 : $\chi_A=X^2+2X+1$</u> : comme $X^2+2X+1=(X+1)^2$, $\mathrm{Sp}(A)=\{-1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A=P(-I_2)P^{-1}=-I_2$ donc $A^2=I_2$ puis $A^{12}=I_2$.

<u>Cas 6 : $\chi_A=X^2-1$</u> : comme $X^2-1=(X-1)(X+1)$, $\mathrm{Sp}(A)=\{-1,1\}$ donc, comme A est diagonalisable, $A=P\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$ donc $A^2=I_2$ car $(-1,1)\in\mathbb{U}_2^2$. Ainsi, $A^{12}=I_2$. Par exemple, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$.

Fondamentalement, c'est parce les racines de ces 6 polynômes sont $1,-1,i,-i,j,j^2,-j,-j^2$, c'est-à-dire des racines seconde, troisième, quatrième, sixième de l'unité et que $\mathrm{ppcm}\,(2,3,4,6)=12$, donc toutes ces valeurs $z\in\{1,-1,i,-i,j,j^2,-j,-j^2\}$ vérifient $z^{12}=1$.

Réciproquement, soit une matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que χ_A est l'un des polynômes X^2-X+1, X^2+1, X^2+X+1, X^2-1, alors comme $X^{12}-1=(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$, d'après Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)=0$ donc, comme χ_A divise $X^{12}-1$, on a aussi $A^{12}=I_2$.

Par contre, si $\chi_A=(X+1)^2$ ou $\chi_A=(X-1)^2$, on ne peut pas être sûr que $A^{12}=I_2$ car A pourrait ne pas être diagonalisable, comme dans les cas $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ou $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

12.6 **a.** Si A est diagonalisable, en notant $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$, il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors on a classiquement $A^3 = PD^3P^{-1}$ donc $B = PD^3P^{-1} + PDP^{-1} + PP^{-1} = P(D^3 + D + I_n)P^{-1}$ et la matrice $D' = D^3 + D + I_n = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n), \cdots, f(\lambda_n)\big)$ est diagonale avec $f : x \mapsto x^3 + x + 1$.

Or, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc elle y est strictement croissante et on a clairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. On conclut avec le théorème de la bijection que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc que le spectre de B contient autant de valeurs propres que celui de A, c'est-à-dire qu'on a $\mathrm{Sp}(B) = \{f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_r)\}$ (pas de répétition).

Soit L le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $L(f(\lambda_k)) = \lambda_k$; on sait que $L = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} \dfrac{X - f(\lambda_i)}{f(\lambda_k) - f(\lambda_i)}$ (voilà pourquoi on a besoin de l'injectivité de f sur $\mathbb{R}$) mais l'expression importe peu ! Alors $L(B) = PL(D')P^{-1} = P\mathrm{diag}\big(L(f(\lambda_1)), \cdots, L(f(\lambda_1)), \cdots, L(f(\lambda_n)), \cdots, L(f(\lambda_n))\big)P^{-1}$ ce qui donne $L(B) = PDP^{-1} = A$ comme attendu.

b. Si $n = 1$, $A = (a)$ et $B = (b)$ avec $b = f(a) = a^3 + a + 1$ ($(a, b) \in \mathbb{C}^2$), on peut écrire A comme un polynôme en B en écrivant $A = U(B)$ avec, par exemple, $U = X - b + a$.

Dès que $n \geqslant 2$, comme la fonction polynomiale f est non injective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ même si elle reste surjective d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, il va y avoir du changement. Le polynôme $Q = X^3 + X + 1$ (associé à la fonction polynomiale f) admet trois racines complexes. Comme $Q' = 3X^2 + 1$ s'annule en $\pm \dfrac{i}{\sqrt{3}}$ et que ces deux valeurs ne sont pas des racines de Q, Q n'admet que des racines simples α, β et γ (avec $\gamma = \overline{\beta}$). Posons par exemple $A = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \alpha, \alpha, \cdots, \alpha)$ (matrice diagonale avec un mélange des racines de Q). Alors $B = \mathrm{diag}(Q(\alpha), Q(\beta), Q(\alpha), \cdots, Q(\alpha)) = 0$ et, quel que soit le polynôme $U = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a donc $U(B) = a_0 I_n \neq A$ car $\alpha \neq \beta$.

Ainsi, on peut trouver des matrices diagonalisables $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$ telles qu'en posant $B = A^3 + A + I_n$, la matrice A ne puisse pas s'exprimer comme un polynôme en B.

12.7 • Si $n = 1$ et $A = (a) \neq 0$, $B = (b) \neq 0$, alors $ABAB = (a^2b^2) \neq 0$. Rien à signaler.

• Si $n = 2$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors la matrice AB est nilpotente d'indice inférieur ou égal à 2. Mais on a aussi $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = B0A = 0$ donc BA est aussi nilpotente. Comme X^3 est annulateur de BA, on sait d'après le cours que $\mathrm{Sp}(BA) \subset \{0\}$ car 0 est la seule racine de X^3. Mais comme le spectre complexe est non vide d'après D'ALEMBERT-GAUSS, on a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(BA) = \{0\}$ ce qui montre que $\chi_{BA} = X^2$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a donc $(BA)^2 = 0$ donc $BABA = 0$.

• Si $n = 3$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ telles que $ABAB = 0$, alors AB est nilpotente et, comme avant BA l'est aussi. Mais la même démarche conduit à $(BA)^3 = 0$ et on est bloqué ! On va construire un exemple tel que l'indice de nilpotente de AB soit 2, et celui de BA soit supérieur ou égal à 3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,3}$, alors $N^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $N^3 = 0$ donc N est nilpotente d'indice 3. On cherche A et B non nulles dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $BA = N$ alors que $(AB)^2 = 0$. Si on prend $A = N = E_{1,2} + E_{2,3}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,2} = N'$, alors on a comme attendu $BA = N$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$ donc $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

• Si $n \geqslant 4$, on construit par blocs $A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & 0_{n-3} \end{pmatrix}$ et on a comme dans le cas $n = 3$, par des calculs par blocs, $AB = E_{1,2}$, $BABA = E_{1,3} \neq 0$ alors que $ABAB = 0$.

Au final : si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $ABAB = 0$ alors on ne peut pas avoir $n = 1$, on peut conclure que $BABA = 0$ si $n = 2$ et on ne peut rien conclure sur la valeur de $BABA$ si $n \geqslant 3$.

12.8 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton).

b. Si A et B sont semblables, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = QB^kQ^{-1}$ donc, pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ donc $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k QB^kQ^{-1} = Q\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k B^k\Big)Q^{-1} = QP(B)Q^{-1}$ donc $P(A)$ et $P(B)$ sont aussi semblables.

c. Par une récurrence simple et un calcul par blocs, on montre que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$. Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1}$ donc $XP' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k X^k$. Ainsi, $P(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k & \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k A^k \\ 0_n & \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k \end{pmatrix}$ donc $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

d. Si M est diagonalisable, il existe d'après le cours un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(M) = 0$ donc $P(A) = 0$ d'après la relation de la question précédente (voir le bloc en haut à gauche par exemple). Ainsi, le polynôme scindé à racines simples P annule A ce qui prouve que A est aussi diagonalisable.

e. Avec ce même polynôme P, on a aussi $AP'(A) = 0$ d'après **c.** donc XP' est annulateur de A. Si λ est une valeur propre de A, comme P et XP' annulent A, on sait d'après le cours que $P(\lambda) = 0 = \lambda P'(\lambda)$. Mais comme les racines de P sont simples par hypothèse, P et P' n'ont pas de racine commune d'où $\lambda = 0$ et 0 est la seule valeur propre de A. Comme A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, la matrice A est semblable à la matrice nulle donc $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, alors $M = 0$ donc M est diagonalisable. Par conséquent, la conclusion de cet exercice et que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

12.9 **a.** Comme $u^2 = \mathrm{id}_E$, on a $\mathrm{Tr}\,(v) = \mathrm{Tr}\,(v \circ u \circ u) = \mathrm{Tr}\,((v \circ u) \circ u) = \mathrm{Tr}\,((-u \circ v) \circ u) = -\mathrm{Tr}\,(u \circ v \circ u)$ donc $\mathrm{Tr}\,(v) = -\mathrm{Tr}\,((u \circ v) \circ u) = -\mathrm{Tr}\,(u \circ (u \circ v))) = -\mathrm{Tr}\,(v)$ (car $\mathrm{Tr}\,(f \circ g) = \mathrm{Tr}\,(g \circ f)$ pour tout endomorphismes f et g d'un espace de dimension finie) d'où $\mathrm{Tr}\,(v) = 0$. Bien sûr, par symétrie, $\mathrm{Tr}\,(u) = 0$.

b. Par hypothèse, u et v sont des symétries donc elles sont diagonalisables car $X^2 = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et annulateur de u et de v et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ et $\mathrm{Sp}(v) \subset \{-1, 1\}$. Comme la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, 1 et -1 sont donc valeurs propres doubles de u et de v. Ainsi, $E_1(u), E_{-1}(u), E_1(b)$ et $E_{-1}(v)$ sont des plans.

c. On a $u(v(x)) = u \circ v(x) = -v \circ u(x) = -v(u(x)) = -v(x)$ car $u(x) = x$ donc $v(x) \in E_{-1}(u)$. De même, $v(y) \in E_{-1}(u)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\lambda v(x) + \mu v(y) = 0_E$, il vient $-\lambda x - \mu y = 0_E$ en appliquant u ce qui donne $\lambda = \mu = 0$ car (x, y) libre. Ainsi, $(v(x), v(y))$ est une famille libre de $E_{-1}(u)$ qui est un plan donc $(v(x), v(y))$ est une base de $E_{-1}(u)$.

Comme $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ puisque u est une symétrie de E, et que (x, y) est une base de $E_1(u)$ et $(v(x), v(y))$ une base de $E_{-1}(u)$, la famille $\mathcal{B} = (x, y, v(x), v(y))$ est une base de E adaptée à la décomposition précédente. De plus, on a déjà vu que $u \circ v(x) = -v(x)$ et $u \circ v(y) = -v(y)$ et on a aussi $u \circ v(v(x)) = u(x) = x$ car $v^2 = \mathrm{id}_E$ et, de même, $u \circ v(v(y)) = y$. Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ 1 & 0 & X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X \end{vmatrix}$. En effectuant $C_1 \longleftarrow C_1 + XC_3$ et $C_2 \longleftarrow C_2 + XC_4$, on a $\chi_A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ X^2+1 & 0 & X & 0 \\ 0 & X^2+1 & 0 & X \end{vmatrix}$ puis on développe par rapport à la première colonne deux fois et on a $\chi_A = (X^2+1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (X^2+1)^2$ donc $\mathrm{Sp}(u \circ v) = \{-i, i\}$.

Comme $A + iI_4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix}$ est de rang 2 car $C_3 = -iC_1$, $C_4 = -iC_2$ et que (C_1, C_2) libre, $E_{-i}(u \circ v) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = ix + v(x)$ et $v_2 = iy + v(y)$. De même, $A - iI_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix}$ avec $C_3 = iC_1$, $C_4 = iC_2$ et (C_1, C_2) libre, donc $E_i(u \circ v) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4)$ avec $v_3 = ix - v(x)$, $v_4 = iy - v(y)$. Comme $\dim(E_i(A)) + \dim(E_{-i}(A)) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$, l'endomorphisme $u \circ v$ est diagonalisable. On pouvait aussi constater que $(u \circ v)^2 = (u \circ v) \circ (u \circ v) = u \circ (v \circ u) \circ v = -u \circ (u \circ v) \circ v = -u^2 \circ v^2 = -\mathrm{id}_E$ donc que $X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$ est annulateur de $u \circ v$ et scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc $u \circ v$ est diagonalisable.

12.10 **a.** La deuxième colonne de A vaut j fois la première car $j^3 = 1$ et la troisième vaut j^2 fois la première, ceci justifie que $\text{rang}(A) = 1$ car la matrice A est non nulle. Ainsi, d'après la formule du rang, on a $\dim(\text{Ker}(A)) = 3 - \text{rang}(A) = 2$ donc $\dim(E_0(A)) = 2$ ce qui montre d'après le cours que 0 est racine au moins double de χ_A. Ainsi, $\chi_A = X^3 - \text{Tr}(A)X^2$ car X^2 divise χ_A. Comme $\text{Tr}(A) = 1 + j + j^2 = 0$, on a $\chi_A = X^3$ donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et A est nilpotente d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Comme $\dim(E_0(A)) = 2 \neq 3 = m_0(A)$, A n'est pas diagonalisable (par ce raisonnement, la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle).

b. Comme $\text{Im}(A) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, j, j^2)$ et que $v_1 \in \text{Ker}(A)$, on a $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$ et $A^2 = 0$. On peut compléter (v_1) en une base de $\text{Ker}(A)$, prenons par exemple $v_3 = (j, -1, 0)$ de sorte que $v_3 \in \text{Ker}(A)$ et que (v_1, v_3) est une base de $\text{Ker}(A)$ car on a clairement (v_1, v_3) libre. Comme $Av_2 = v_1$ en prenant $v_1 = (1, 0, 0)$ en regardant la première colonne de A, et que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ car (v_1, v_3) libre et $v_2 \notin \text{Vect}(v_1, v_3) = \text{Ker}(A)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = E_{1,2}$ en notant a l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. En notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à $\mathcal{B}$, on a par formule de changement de base $A = PE_{1,2}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & j \\ j & 0 & -1 \\ j^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($\mathcal{B}$ est à nouveau une base de $\mathbb{C}^3$ car $\det(P) = -j^2 \neq 0$).

c. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $C = P^{-1}BP$ d'où $B = PCP^{-1}$ et on a l'équivalence $AB = BA \iff E_{1,2}C = CE_{1,2}$. Or en notant $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}$, on a $E_{1,2}C = \begin{pmatrix} c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $CE_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,1} & 0 \\ 0 & c_{3,1} & 0 \end{pmatrix}$ donc $E_{1,2}C = CE_{1,2} \iff (c_{2,1} = c_{1,1} - c_{2,2} = c_{2,3} = c_{3,1} = 0)$. Ainsi, les matrices qui commutent avec $E_{1,2}$ sont de la forme $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ 0 & c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}$ donc l'ensemble des matrices qui commutent avec $E_{1,2}$, noté $C(E_{1,2})$, vérifie $C(E_{1,2}) = \text{Vect}(E_{1,1} + E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{3,2})$ est de dimension 5 car la famille $(E_{1,1} + E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{3,2})$ est clairement libre. De plus, l'application $\varphi : C(E_{1,2}) \to C(A)$ définie par $\varphi(C) = P^{-1}CP$ est linéaire, injective car $P^{-1}CP = 0 \Longrightarrow C = 0$ et surjective d'après l'équivalence qui précède. Comme φ est un isomorphisme, il conserve la dimension donc $\dim(C(A)) = \dim(C(E_{1,2})) = 5$.

12.11 **a.** Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme annulateur de M. Il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N},\ M^k X = \lambda^k X$. Ainsi, on peut calculer $0 = P(M)X = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k X = \sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k X = P(\lambda)X = 0$. Comme $X \neq 0$, on a forcément $P(\lambda) = 0$.

On a re-démontré une propriété du cours : les valeurs propres de M sont des racines de P annulateur de M.

b. Si M est symétrique, $M^2 + M - I_n = 0$ donc $P = X^2 + X - 1$ annule M. Or $P = (X - \alpha)(X - \beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ donc P est scindé à racines simples d'où, par théorème, M est diagonalisable. D'après la question **a.**, on a $\text{Sp}(M) \subset \{\alpha, \beta\}$. Comme χ_M est scindé car M est diagonalisable, on a donc $\chi_M = (X - \alpha)^p (X - \beta)^q$ avec $p = m_\alpha(M)$ et $q = m_\beta(M)$ et, d'après le cours, on a $\text{Tr}(M) = p\alpha + q\beta$ et $\det(M) = \alpha^p \beta^q$. Comme 0 n'est pas valeur propre de M, M est inversible.
De plus, $2\text{Tr}(M) = -p - q + (p - q)\sqrt{5} = -n + (p - q)\sqrt{5}$. Comme $n > 0$, si on avait $\text{Tr}(M) = 0$, on aurait

$p-q \neq 0$ et $\sqrt{5} = \dfrac{n}{p-q}$, ce qui montrerait que $\sqrt{5}$ est un rationnel : NON !

Par conséquent, $\mathrm{Tr}\,(M) \neq 0$ et $\det(M) \neq 0$ donc $\mathrm{Tr}\,(M) \times \det(M) \neq 0$.

c. Si on ne suppose plus M symétrique, on cherche un polynôme annulateur de degré supérieur. En transposant, on obtient $({}^tM)^2 + M = I_n$ donc $(I_n - M^2)^2 + M - I_n = M^4 - 2M^2 + M = 0$ et $Q = X^4 - 2X^2 + X$ annule M. Or $Q = X(X-1)(X^2+X-1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ qui est à nouveau scindé à racines simples. Ainsi M est encore diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, 1, \alpha, \beta\}$.

d. Puisque $({}^tM)^2 = I_n - M$, en passant au déterminant, on a $\det({}^t(M^2)) = \det(M)^2 = \det(I_n - M) = \chi_M(1)$. Ainsi, $\det(M) \neq 0 \iff \chi_M(1) \neq 0 \iff$ (1 n'est pas valeur propre de M).

Ou encore, M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

e. Étant donnée la question, on s'attend à un réponse négative. On va commencer par le cas simple $n = 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M \neq M^T$ et $M^2 + M^T = I_2$. Distinguons selon les valeurs propres de M avec **a.**.

<u>Si $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda\}$</u> avec $\lambda \in \{0, 1, \alpha, \beta\}$, alors comme M est diagonalisable d'après **a.**, M est semblable à λI_2 donc $M = \lambda I_2$ ce qui est impossible car M n'est pas symétrique.

<u>Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$</u>, comme M est diagonalisable, $M = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = PD^2P^{-1} = M$ car $D^2 = D$. Ainsi, $M^2 + M^T = M + M^T = I_2$ ce qui montre que $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -a \\ a & 1/2 \end{pmatrix}$. Or $M^2 = M = \begin{pmatrix} (1/4) - a^2 & -a \\ a & (1/4) - a^2 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\dfrac{1}{4} - a^2 = \dfrac{1}{2}$ donc $a^2 = -\dfrac{1}{4}$ d'où $a = \pm\dfrac{i}{2}$. Il y a donc deux matrices vérifiant ces conditions, $M_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Si $\mathrm{Sp}(M) = \{\alpha, \beta\}$</u>, comme M est diagonalisable, $(X-\alpha)(X-\beta) = X^2 + X - 1$ est annulateur de M donc $M^2 + M - I_2 = 0$. Mais ceci est impossible car $M^2 - I_2 = -M^T \neq -M$.

<u>Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \alpha\}$</u>, de même, $X(X-\alpha) = X^2 - \alpha X$ annule M d'où $M^2 = \alpha M$ et $\alpha M + M^T = I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \dfrac{1}{\alpha+1} I_2$, absurde car M non symétrique.

<u>Si $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \beta\}$</u>, de même, $X(X-\beta) = X^2 - \beta X$ annule M d'où $M^2 = \beta M$ et $\beta M + M^T = I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \dfrac{1}{\beta+1} I_2$, absurde car M non symétrique.

<u>Si $\mathrm{Sp}(M) = \{1, \alpha\}$</u>, comme avant, $(X-1)(X-\alpha) = X^2 - (\alpha+1)X + \alpha$ annule M, d'où $M^2 = (\alpha+1)M + \alpha I_2$ et $(\alpha+1)M + M^T = (1-\alpha)I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \dfrac{1}{\alpha+2} I_2$, absurde car M non symétrique.

<u>Si $\mathrm{Sp}(M) = \{1, \beta\}$</u>, comme avant, $(X-1)(X-\beta) = X^2 - (\beta+1)X + \beta$ annule M, d'où $M^2 = (\beta+1)M + \beta I_2$ et $(\beta+1)M + M^T = (1-\beta)I_2$ (1). En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la relation (1) montre que $M = \dfrac{1}{\beta+2} I_2$, absurde car M non symétrique.

Les seules $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $M \neq M^T$ et $M^2 + M^T = I_2$ sont $M_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Si $n = 2p$</u> avec $p \in \mathbb{N}^*$, il suffit de poser $M = \mathrm{diag}(M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})$ avec $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1, 2\}^p$ et on a $M^2 = \mathrm{diag}(I_n - M_{i_1}^T, \cdots, I_2 - M_{i_p}^T) = I_n - \big(\mathrm{diag}(M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})\big)^T = I_n - M^T$ et M n'est pas symétrique.

<u>Si $n = 2p+1$</u> avec $p \in \mathbb{N}^*$, il suffit de poser $M = \mathrm{diag}(\alpha, M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})$ avec $(i_1, \cdots, i_p) \in \{1, 2\}^p$ et on a

$M^2 = \mathrm{diag}(\alpha^2, I_n - M_{i_1}^T, \cdots, I_2 - M_{i_p}^T) = I_n - \big(\mathrm{diag}(\alpha, M_{i_1}, \cdots, M_{i_p})\big)^T = I_n - M^T$ car $\alpha^2 + \alpha = 1$ et M n'est pas symétrique.

La réponse à la question posée est :

Si $n = 1$, oui, car toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont symétriques.

Si $n \geqslant 2$, non, la matrice M n'est pas forcément symétrique si elle vérifie les conditions $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$, avec les contre-exemples vus ci-dessus dans les cas n pair ou n impair.

12.12 **a.** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$. On va considérer différents cas :

- Si χ_A admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2, on sait d'après le cours qu'alors A est diagonalisable et il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Posons $D' = P^{-1}BP$, on a l'équivalence $AB = BA \iff PDD'P^{-1} = PD'DP^{-1} \iff DD' = D'D$. Or, par un calcul matriciel direct, on montre que $DD' = D'D$ équivaut à $D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$ diagonale. En posant Q l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que $Q(\lambda_1) = \mu_1$ et $Q(\lambda_2) = \mu_2$, on a $Q(D) = D'$ donc $Q(A) = PQ(D)P^{-1} = PD'P^{-1} = B$ et B est bien un polynôme en A.
- Si χ_B admet deux racines distinctes, on conclut par symétrie que A est un polynôme en B.
- Si χ_A admet une racine double λ mais que A est diagonalisable, alors $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A) = 2$ donc $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_2) = \mathbb{C}^2$ et $A = \lambda I_2$ de sorte que $A = Q(B)$ avec $Q = \lambda$.
- Si χ_B admet une racine double μ mais que B est diagonalisable, $B = \mu I_2$ et $B = Q(A)$ avec $Q = \mu$.
- Si χ_A, χ_B admettent respectivement pour racine double λ, μ et que ni A ni B ne sont diagonalisables, on sait néanmoins que A et B sont trigonalisables car χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{C}$ et il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$. En notant $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ la base de $\mathbb{C}^2$ telle que P est la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, on a donc $Av_1 = \lambda v_1$ donc, comme $AB = BA$, $ABv_1 = BAv_1 = \lambda Bv_1$ donc $Bv_1 \in E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ ce qui prouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Bv_1 = \alpha v_1$. Mais comme μ est la seule valeur propre de B, on a forcément $\alpha = \mu$. Comme $\mathrm{Tr}\,(B) = 2\mu$, on a forcément, par la formule de changement de base, $B = PT'P^{-1}$ avec $T' = \begin{pmatrix} \mu & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$. Par exemple, comme $T' = \dfrac{b}{a}T + \Big(\mu - \dfrac{b\lambda}{a}\Big)I_2$, on a aussi en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, $B = \dfrac{b}{a}A + \Big(\mu - \dfrac{b\lambda}{a}\Big)I_2 = Q(A)$ avec $Q = T' = \dfrac{b}{a}X\mu - \dfrac{b\lambda}{a}$ donc B est un polynôme en A (mais A est aussi dans ce cas un polynôme en B).

Dans tous les cas, si $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que $AB = BA$, B est un polynôme en A ou A un polynôme en B.

b. Prenons $A = E_{1,2}$ et $B = E_{1,3}$, alors $AB = BA = 0$. Comme $A^2 = 0$, si $Q = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $Q(A) = q_0 I_3 + q_1 A \in \mathrm{Vect}(I_3, A)$ donc l'ensemble des polynômes en A, noté $\mathbb{C}[A]$, vérifie $\mathbb{C}[A] = \mathrm{Vect}(I_3, A)$ car il est clair que $\mathrm{Vect}(I_3, A) \subset \mathbb{C}[A]$. De même, comme $B^2 = 0$, on a $\mathbb{C}[B] = \mathrm{Vect}(I_3, B)$. Par conséquent, $A \notin \mathbb{C}[B]$ et $B \notin \mathbb{C}[A]$ donc A n'est pas un polynôme en B et B n'est pas un polynôme en A.

c. Prenons à nouveau $A = E_{1,2}$ et $B = E_{1,3}$, alors $AB = BA = 0$, $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}(I_3, A)$ et $\mathbb{R}[B] = \mathrm{Vect}(I_3, B)$ donc, puisque $A \notin \mathrm{Vect}(I_3, B)$ et $B \notin \mathrm{Vect}(I_3, A)$, donc A (resp. B) n'est pas un polynôme en B (resp. A).

12.13 **a.** Si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ est diagonale. Comme on a aussi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = D^2$ est diagonale, $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de f^2 qui est donc diagonalisable.

b. Si $n = 1$, tout endomorphisme de E étant une homothétie, f et f^2 sont diagonalisables. Ainsi, dans ce cas particulier, f^2 diagonalisable $\Longrightarrow f$ diagonalisable.

Si $n \geqslant 2$, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = E_{1,2}$, alors $E_{1,2}^2 = 0$ donc $f^2 = 0$ est diagonalisable. De plus, $\chi_f = \chi_{E_{1,2}} = X^n$ puisque $E_{1,2}$ est triangulaire supérieure. Comme, par la formule du rang, on obtient $\dim(E_0(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) = n - \text{rang}(f) = n - 1 \neq n$ qui est l'ordre de multiplicité algébrique de 0 dans χ_f, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Dès que $n \geqslant 2$, on n'a donc plus forcément f diagonalisable si f^2 l'est.

c. Une inclusion : si $x \in \text{Ker}(f - \mu\text{id}_E) + \text{Ker}(f + \mu\text{id}_E)$, alors $\exists (y, z) \in \text{Ker}(f - \mu\text{id}_E) \times \text{Ker}(f + \mu\text{id}_E)$, $x = y + z$ donc $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z)$. Or $f(y) = \mu y$ donc $f^2(y) = f(\mu y) = \mu f(y) = \mu^2 y = \lambda y$ et $f(z) = -\mu z$ donc $u^2(z) = u(-\mu z) = -\mu u(z) = (-\mu)^2 y = \lambda z$ d'où $f^2(x) = \mu^2(y + z) = \lambda x$ et on a bien $x \in \text{Ker}(f^2 - \lambda\text{id}_E)$. On a bien établi l'inclusion $\text{Ker}(f - \mu\text{id}_E) + \text{Ker}(f + \mu\text{id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda\text{id}_E)$.

L'autre inclusion : si $x \in \text{Ker}(f^2 - \lambda\text{id}_E)$, $x = y + z$ (1) avec $(y, z) \in \text{Ker}(f - \mu\text{id}_E) \times \text{Ker}(f + \mu\text{id}_E)$, on a donc $f(x) = \mu y - \mu z$ (2) donc $y = \dfrac{f(x) + \mu x}{2\mu}$ et $z = \dfrac{\mu x - f(x)}{2\lambda}$ en combinant les deux équations (1) et (2) puisque $\mu \neq 0$. Réciproquement, si on pose $y = \dfrac{f(x) + \mu x}{2\mu}$ et $z = \dfrac{\mu x - f(x)}{2\mu}$, on a la relation $x = y + z$ et $f(y) = \dfrac{f^2(x) + \mu f(x)}{2\mu} = \dfrac{\mu^2 x + \mu f(x)}{2\mu} = \mu y$ et, de même $f(z) = -\mu z$. On vient de prouver l'inclusion $\text{Ker}(f^2 - \lambda\text{id}_E) \subset \text{Ker}(f - \mu\text{id}_E) + \text{Ker}(f + \mu\text{id}_E)$. Pour cette dernière inclusion, on aurait pu dire que $X^2 - \lambda = (X - \mu)(X + \mu)$ était un polynôme annulateur scindé à racines simples de l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f dans $E_\lambda(f^2)$ donc que $E_\lambda(f^2) = E_\mu(\tilde{f}) \oplus E_{-\mu}(\tilde{f})$ et on conclut car $E_\mu(\tilde{f}) = E_\mu(f)$ puisque $E_\mu(f) \subset E_\lambda(f^2)$ et $E_{-\mu}(\tilde{f}) = E_{-\mu}(f)$ puisque $E_{-\mu}(f) \subset E_\lambda(f^2)$ d'après la première inclusion.

Par double inclusion, on a donc $\text{Ker}(f^2 - \lambda\text{id}_E) = \text{Ker}(f - \mu\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu\text{id}_E)$ puisque les deux sous-espaces propres sont en somme directe car $\mu \neq -\mu$.

d. Méthode 1 : si f^2 est diagonalisable, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f^2, elles sont non nulles car f^2 est inversible. Par définition, $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker}(f^2 - \lambda_k\text{id}_E)$. D'après la question précédente, on a donc $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{r} \text{Ker}(f - \mu_k\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \mu_k\text{id}_E)$ en notant μ_k une racine carrée complexe de λ_k. Comme E est la somme directe de sous-espaces propres associés à f, par définition, f est diagonalisable.

Méthode 2 : si f^2 est diagonalisable et f^2 inversible, alors f est aussi inversible et $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc $0 \notin \text{Sp}(f)$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f^2. On sait que $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$ est annulateur de f^2 d'où $P(f^2) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (f^2 - \lambda_k\text{id}_E) = 0$. Notons, pour $k \in [\![1; r]\!]$, μ_k une racine carrée (complexe) de λ_k, alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} (f^2 - \lambda_k\text{id}_E) = \prod_{k=1}^{r} (f - \mu_k\text{id}_E) \circ (f + \mu_k\text{id}_E) = 0$ donc le polynôme $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)(X + \mu_k)$ est annulateur de f. De plus, $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $\mu_k \neq -\mu_k$ car $\lambda_k = \mu_k^2 \neq 0$ et $\forall (i, j) \in [\![1; r]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\pm\mu_i \neq \pm\mu_j$

car $\lambda_i = \mu_i^2 \neq \mu_j^2 = \lambda_j$. Ainsi, Q annule f et est scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

12.14 **a.** On calcule $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & -2 \\ 1 & X-5 & 2 \\ 1 & -3 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-3 & 3 & 2(2-X) \\ 1 & X-5 & 0 \\ 1 & -3 & X-2 \end{vmatrix}$ avec l'opération $C_3 \longleftarrow C_3 - 2C_1$ et après avoir factorisé par $X-2$ dans la troisième colonne et effectué l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3$, on trouve $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ 1 & X-5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (X-2)\big[(X-1)(X-5)+3\big] = (X-2)(X^2-6X+8) = (X-2)^2(X-4)$ après développement par rapport à la dernière colonne. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 1, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I_3)) = 2$ avec la formule du rang donc l'ordre de multiplicité algébrique de 2 est égal à la dimension du sous-espace propre $E_2(A)$, ce qui permet de conclure par le cours que la matrice A est diagonalisable (car $\dim(E_2(A)) + \dim(E_4(A)) = 3$).

On constate que $C_1 = C_2 + C_3$ dans $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Comme 4 est une valeur propre simple de A, $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1,-1,-1)$. De plus, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $E_2(A)$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 3y + 2z = 0$ et, par exemple, $E_2(A) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ avec $v_2 = (3,1,0)$ et $v_3 = (2,0,-1)$.

b. Comme $\mathbb{R}^3 = E_4(A) \oplus E_4(A)$ car A est diagonalisable, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(4,2,2)$.

Il suffit de prendre $R = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ et on a $\Delta^2 = D$ donc $R^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Si $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $R^2 = A$, comme $(X-2)(X-4)$ est annulateur de A car $\mathrm{Sp}(A) = \{2,4\}$ et A diagonalisable, $(R^2 - 2I_3)(R^2 - 4I_3) = (R - \sqrt{2}I_3)(R + \sqrt{2}I_3)(R - 2I_3)(R + 2I_3) = 0$ donc le polynôme $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-2)(X+2)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ est annulateur de R donc R est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

12.15 **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & 1 \\ 1 & X-5 & 1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)((X-5)(X-2)+1) - (-2(X-2)+1)$ en développement par rapport à la première colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-2)(X^2-7X+11) + 2X - 5 = X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = (X-3)^3$ (binôme de Newton). Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par contre, comme $E_3(A) = \mathrm{Ker}(A - 3I_3) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\dim(E_3(A)) \neq 3$ (l'ordre de multiplicité de 3 dans χ_A) car $A \neq 3I_3$, A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ni bien sûr dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$).

b. Comme $\mathrm{Sp}(A) = \{3\}$ d'après **a.**, si x est un vecteur propre de A, alors $Ax = 3x$ donc la droite $D = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par A. Réciproquement, si la droite $D' = \mathrm{Vect}(y)$ est stable par A, on a $y \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ car D' est une droite et $Ay \in D'$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ Ay = \lambda y$ donc y est un vecteur propre de A donc $\lambda = 3$ et $y \in E_3(A)$. Par conséquent, les seules droites stables par A sont celles qui sont incluses dans $E_3(A)$. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, et qu'on constate que $(1,1,1)$ est dans le noyau de $A - 3I_3$, on a $E_3(A) = \mathrm{Vect}(x)$ avec $x = (1,1,1)$. Il existe donc une seule droite stable par A, et c'est $D = \mathrm{Vect}(x)$.

c. Soit une base $\mathcal{B}' = (a_1, a_2)$ de P qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Par stabilité de

P, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} A' & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(a')$. Ainsi, $\chi_a = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} XI_2 - A' & * \\ 0 & X - \lambda \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = (X - \lambda)\chi_{A'}$ ce qui justifie que $\chi_{A'}$ divise χ_A (et en plus que $\lambda = 3$).

d. Comme P est de dimension 2, $\chi_{a'}$ est unitaire et de degré 2 et il divise $\chi_a = (X-3)^3$ donc $\chi_{a'} = (X-3)^2$. Par CAYLEY-HAMILTON, $(a' - 3\mathrm{id}_{\mathsf{P}})^2 = 0$ donc $\forall x \in \mathsf{P},\ (a' - 3\mathrm{id}_{\mathsf{P}})^2(x) = (a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2(x) = 0$ et on a bien l'inclusion $\mathsf{P} \subset \mathrm{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

e. Comme $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A - 3I_3)^2$ et $(a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ sont de rang 1 ce qui montre avec la formule du rang que $\dim(\mathrm{Ker}((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = 2$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a $\mathsf{P} = \mathrm{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$.

Dans cet exemple, il y a seulement quatre sous-espaces stables par a : $\{0\}$ de dimension 0, $\mathsf{D} = \mathrm{Ker}\left(a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\right)$ de dimension 1, $\mathsf{P} = \mathrm{Ker}\left((a - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2\right)$ de dimension 2 et $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.