PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 11

PSI 1 2024-2025 **du lundi 09/12 au vendredi 13/12**

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice : voir programme précédent

2 Polynôme caractéristique :

- définition du polynôme caractéristique ($\chi_u = \det(X\mathrm{id}_E - u)$) d'une matrice ou d'un endomorphisme ;
- expression développée de $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}\,(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$;
- les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u ;
- multiplicité algébrique (ordre de multiplicité de la racine dans χ_u) d'une valeur propre ;
- si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ relation entre $\dim(E)$, $\mathrm{Tr}\,(u)$, $\det(u)$ et les valeurs propres ;
- polynôme caractéristique de matrices semblables ou de la transposée d'une matrice ;
- si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u ;
- multiplicité géométrique (dimension du sous-espace propre associé) d'une valeur propre ;
- la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique (et $\geqslant 1$) pour une valeur propre ;
- application du polynôme caractéristique pour calculer le déterminant des matrices ;
- théorème de Cayley-Hamilton (preuve non exigible) ;

3 Diagonalisation en dimension finie :

- définition d'un endomorphisme diagonalisable, propriétés équivalentes ;
- projecteurs (spectraux) associés à la décomposition de l'espace avec les sous-espaces propres ;
- équivalence entre u diagonalisable et χ_u scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$;
- cas particulier pratique où il y a $\dim(E)$ racines distinctes de χ_u;
- matrices A diagonalisables et relations avec un endomorphisme de matrice A ;
- polynômes en u et relations avec les valeurs propres de u ; racines des polynômes annulateurs ;
- u diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur simplement scindé de u ;
- si u diagonalisable, caractérisation de son polynôme minimal (hors programme) ;
- si F stable par u et u diagonalisable alors u_F l'est aussi ;
- trigonalisation : définition et caractérisation par χ_u scindé ;

4 Codiagonalisation (hors programme mais bon...) :

- si u diagonalisable, $v \circ u = u \circ v \iff \forall\lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ E_\lambda(u)$ stable par v ;
- si u et v diagonalisables et commutent, ils codiagonalisent ;

QUESTIONS DE COURS :

1. définir la diagonalisabilité d'un endomorphisme (déf. 6.6)
2. énoncer quelques propriétés équivalentes au fait que u est diagonalisable (th. 6.17)
3. énoncer des propriétés des projecteurs spectraux si u diagonalisable (prop. 6.18)
4. énoncer la CNS de diagonalisabilité de u par les ordres de multiplicité (th. 6.19)
5. énoncer la CNS de diagonalisabilité par l'existence d'un polynôme annulateur SARS (th. 6.22)
6. énoncer la CNS de diagonalisabilité par le fait que $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u (th. 6.23)
7. énoncer la CNS de trigonalisabilité d'un endomorphisme (th. 6.26)
8. prouver que si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$ (prop. 6.10)
9. prouver que les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur de u (prop. 6.21)
10. prouver que si u diagonalisable et F stable par u, alors u_F est diagonalisable (prop. 6.24)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur la réduction et début des probabilités