Autour des matrices de Toeplitz

stephane.gonnord@prepas.org

I Généralités et quelques exemples

I.A – Généralités

Q 1. Notons, pour $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $D^{(k)}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $D^{(k)}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Les matrices de Toeplitz sont alors les matrices de la forme

$$t_{-(n-1)}D^{(-(n-1))} + \cdots + t_0 D^{(0)} + \cdots + t_{n-1}D^{(n-1)}$$

avec les t_i décrivant $\mathbb{C}$. Bref : $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est l'espace engendré par les $D^{(k)}$. Comme cette famille est clairement libre (prendre une combinaison linéaire libre ; regarder le coefficient $(1, 1+k)$ si $k \geq 0$ et $(1-k, 1)$ sinon...) elle en constitue une base, et il ne reste plus qu'à compter sur ses petits doigts :

$$\boxed{\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \text{ est un sous-espace de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ de dimension } 2n-1.}$$

Q 2. Supposons que A et B commutent. On a alors $A^2B = A.AB = A.BA = AB.A = BA.A = BA^2$ puis par récurrence immédiate, $AB^k = B^kA$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par distributivité, A commute ensuite avec tout polynôme en B.
On peut ensuite retourner l'argument : si $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors $Q(B)$ commute avec A d'après ce qui précède, donc avec tout polynôme en A !

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent et } P, Q \in \mathbb{C}[X], \text{ alors } P(A) \text{ et } P(B) \text{ commutent.}}$$

I.B – Cas de la dimension 2

Q 3. Le calcul est sans finesse :

$$\boxed{\chi_A = (X-a)^2 - bc}$$

Q 4. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire les λ tels que $(\lambda - a)^2 = bc$.
On évite de sortir les racines de complexes, sauf à vouloir faire rire l'examinateur.

- Si $bc \neq 0$ alors il existe deux complexes dont le carré vaut bc, donc A possède deux valeurs propres donc (dimension) est diagonalisable.
- Si $bc = 0$, alors A possède a comme unique valeur propre. Elle est donc diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_2, donc **égale** à aI_2, ce qui est vrai si et seulement si $b = c = 0$.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } b \text{ et } c \text{ sont tous les deux non nuls ou tous les deux nuls.}}$$

Q 5. Discutons (bien entendu) sur le nombre de valeurs propres de A. Puisque le corps de base est $\mathbb{C}$ il y en a au moins une, et puisque qu'on est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il y en a au plus 2.

- Si A possède deux valeurs propres $\alpha \neq \beta$, alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
- Si A possède une seule valeur propre α, on se contente de trigonaliser A (rappel : c'est possible car on est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$), et A est bien semblable à une matrice triangulaire supérieure avec sur la diagonale l'unique valeur propre.

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de la forme } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ (avec } \alpha \neq \beta\text{) ou } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}$$

Q 6. La question précédente nous invite à ne traiter que les deux matrices de la conclusion précédente (si A et B sont semblables ainsi que B et C, alors A et C sont semblables[1]).

— La deuxième $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ est directement une matrice de Toeplitz.

— La première a pour polynôme caractéristique

$$(X-\alpha)(X-\beta) = \cdots = \left(X - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \gamma,$$

avec $\gamma = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \alpha\beta$. Considérons alors $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \gamma \\ 1 & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$: cette matrice est de Toeplitz et a pour polynôme caractéristique $\left(X - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \gamma = (X-\alpha)(X-\beta)$, donc $(\alpha \neq \beta)$ est diagonalisable, et même semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$; c'est ce qu'on voulait montrer.

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de Toeplitz.}}$$

I.C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Q 7. La relation $AX = \lambda X$ fournit n équations scalaires. La première et la dernière sont respectivement $ax_1+bx_2 = \lambda x_1$ et $cx_{n-1}+ax_n = \lambda x_n$; les autres sont, pour $i \in [\![2, n-1]\!]$: $cx_{i-1}+ax_i+bx_{i+1} = \lambda x_i$. En ayant posé $x_0 = x_{n+1} = 0$, les deux équations aux bords s'unifient à l'équation générique, à savoir $(k = i-1)$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

Il reste à noter que la famille finie $(x_0, ..., x_{n+1})$ s'étend en une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence souhaitée, en posant pour tout $k \geq n$: $x_{k+2} = \frac{1}{b}\left((\lambda - a)x_{k+1} - bx_k\right)$ (on avait bien entendu noté que la condition $bc \neq 0$ impose $b \neq 0$...)

$$\boxed{\text{c.q.f.d.}}$$

Q 8. Il s'agit évidemment de discuter selon le nombre de racines.

— Si (I.1) possède deux racines $r_1 \neq r_2$, alors il existe deux constantes K_1, K_2 telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = K_1 r_1^k + K_2 r_2^k$.

— Si (I.1) possède une racine double r_0, alors il existe deux constantes K_1, K_2 telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = (K_1 + K_2 k) r_0^k$.

$$\boxed{\text{Et on vient de montrer qu'on se souvient du cours de première année.}}$$

Q 9. Supposons par l'absurde que (I.1) possède une unique racine r_0. Avec les notations précédentes, la condition $x_0 = 0$ donne $K_1 = 0$; la condition $x_{n+1} = 0$ fournit alors $K_2 r_0^{n+1} = 0$. On s'inquiète alors de la nullité éventuelle de r_0. Mais 0 n'est pas solution de (I.1) (car $c \neq 0$), donc $r_0 \neq 0$, puis $K_2 = 0$. On a alors tous les x_i nuls, donc X aussi, ce qui n'est pas raisonnable pour un vecteur propre.

$$\boxed{\text{(I.1) possède deux racines distinctes.}}$$

1. On peut aussi plisser les yeux et dire que la relation de similitude est transitive...

Q 10. On a déjà vu que 0 n'est pas racine de (I.1), donc r_1 et r_2 sont non nuls. Ensuite, les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ fournissent successivement (avec les notations vues plus haut) : $K_2 = -K_1$, puis $K_1(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$. Puisque $X \neq 0$, on a $K_1 \neq 0$, donc $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$ puis : $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$.

$$\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont non nuls et } \frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}.}$$

Q 11. Si par malheur on a oublié son cours de terminale/sup/spé/whatever, ça doit pouvoir se retrouver, en partant de la factorisation d'un polynôme (et pas d'un réel, bien entendu...) dont on connaît le coefficient dominant et les racines :

$$bX^2 + (a-\lambda)X + c = b(X-r_1)(X-r_2) = bX^2 - b(r_1+r_2)X + br_1r_2,$$

et en identifiant les coefficients de ces polynômes (et toujours grâce au fait que $b \neq 0$) :

$$\boxed{r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b} \text{ et } r_1r_2 = \frac{c}{b}.}$$

Puisque $\dfrac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}$, il existe $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que $r_1 = r_2 \mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)}$; le produit r_1r_2 vaut alors d'une part $r_1^2\mathrm{e}^{-2i\ell\pi/(n+1)}$ et d'autre part $\dfrac{c}{b}$, donc :

$$r_1^2 = \frac{c}{b}\mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)} = \frac{bc}{b^2}\mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)} = \left(\frac{\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}\right)^2,$$

où on a choisi ρ_0 un complexe dont le carré vaut bc (et un tel complexe existe bien). Il existe donc $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $r_1 = \varepsilon\dfrac{\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}$. On a alors :

$$\lambda = a + b(r_1 + r_2) = a + \varepsilon\rho_0 \underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)} + \mathrm{e}^{-i\ell\pi/(n+1)}\right)}_{2\cos(\ell\pi/(n+1))},$$

et il reste à poser $\rho = \varepsilon\rho_0$ (dont le carré vaut toujours bc). Remarquons enfin que $r_2 \neq r_1$, donc $\dfrac{r_1}{r_2} \neq 1$ donc $\ell \neq 0$.

$$\boxed{\text{Il existe } \ell \in [\![1, n]\!] \text{ et } \rho \in \mathbb{C} \text{ tels que } \rho^2 = bc \text{ et } \lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)}$$

Q 12. Avec les notations précédentes,

$$x_k = K_1(r_1^k - r_2^k) = K_1\left(\left(\frac{\varepsilon\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}\right)^k - \left(\frac{\varepsilon\rho_0}{b}\mathrm{e}^{-i\ell\pi/(n+1)}\right)^k\right) = K_1\frac{\rho^k}{b^k}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\ell k\pi/(n+1)} - \mathrm{e}^{-i\ell k\pi/(n+1)}\right)}_{=2i\sin(\ell k\pi/(n+1))}.$$

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que pour tout } k \in [\![0, n+1]\!],\ x_k = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right).}$$

Q 13. Il s'agit de faire la synthèse, en fixant ρ de carré bc puis en montrant que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$ est effectivement valeur propre de A $(= A_n(a, b, c))$.
On fixe donc un tel ℓ, et une géniale intuition nous conduit à définir

$$x_k = 2i\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

pour $0 \leq k \leq n+1$, considérer le vecteur $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et essayer de montrer que X est vecteur propre pour la valeur propre λ_ℓ. Tout d'abord, X est non nul [2] ; il s'agit alors de vérifier : $AX = \lambda_\ell X$.
Cette équation est équivalente (grâce aux valeurs aux bords) aux n équations $bx_{k+2}+(a-\lambda_\ell)x_{k+1}+cx_k = 0$ $(0 \leq k \leq n-1)$. Mais $x_k = \left(\underbrace{\dfrac{\rho e^{i\ell\pi/(n+1)}}{b}}_{t_1}\right)^k - \left(\underbrace{\dfrac{\rho e^{-i\ell\pi/(n+1)}}{b}}_{t_2}\right)^k$ avec $t_1 t_2 = \dfrac{\rho^2}{b^2} = \dfrac{c}{b}$ et $t_1 + t_2 = \dfrac{2\rho\cos(\ell\pi/(n+1))}{b} = \dfrac{\lambda_l - a}{b}$, donc $b(X-t_1)(X-t_2) = bX^2 + (a-\lambda_\ell)X + c$, donc t_1 et t_2 sont les racines (oui, elles sont différentes) de (I.1), donc la relation de récurrence souhaitée est bien vérifiée, ce qui achève la synthèse : les λ_ℓ sont toutes valeurs propres de A.
Il reste tout de même à noter que lorsque $\ell \in [\![1,n]\!]$, on a $\dfrac{\ell\pi}{n+1} \in [0,\pi]$, intervalle sur lequel la fonction cos est injective, donc les λ_ℓ sont distincts.

$$\boxed{A(a,b,c) \text{ est diagonalisable avec } n \text{ valeurs propres distinctes : } a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right), \text{ pour } 1 \leq \ell \leq n.}$$

II Matrices circulantes

Q 14. Chaque multiplication par M_n « remonte les diagonales » (ou les décale vers la droite) :

$$\boxed{M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \end{pmatrix}, \ldots\ M_n^n = I_n.}$$

Pour les grincheux, M_n^k est constitué de zéros, sauf en les positions $(i, i+k)$ (pour $1 \leq i \leq n-1-k$) et $(i-k, i)$ (pour $i+1 \leq k \leq n$) où il y a des 1.
La question 30 donnera l'occasion de « prouver » ce genre de choses.
La relation $M_n^n = I_n$ fournit pour le même prix :

$$\boxed{M_n \text{ est inversible (d'inverse } M_n^{n-1} = {}^t M_n) \text{ et } X^n - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } M_n.}$$

Q 15. Puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$, $X^n - 1$ est scindé à racines simples (les n racines $n$èmes de l'unité) donc :

$$\boxed{M_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Ensuite, on peut calculer le polynôme caractéristique de M_n en développant par rapport à la première colonne : $\chi_{M_n} = X^n - 1$ (ce n'est pas très surprenant, sans être évident : une matrice diagonalisable peut avoir des polynômes annulateurs de degré n qui ne sont pas le polynôme caractéristique). Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M_n) = \mathbb{U}_n = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}}$$

2. Je fais le pari que sur beaucoup de copies il aura été question de $x_k = 2i\alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$ avec hélas α potentiellement nul...

Pour obtenir des vecteurs propres, on peut résoudre $M_nX = \omega_n^k X$, ou bien regarder la question suivante, et être pris d'une furieuse envie de considérer (pour $0 \leq k \leq n-1$) $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}$: il vérifie $M_nX_k = \omega_n^k X_k$! (Et bien entendu il est non nul).

$$\boxed{(X_k)_{0\leq k\leq n-1} \text{ constitue une base de vecteurs propres de } M_n.}$$

Ben oui c'est une base : n vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, en dimension n.

Q 16. Bien entendu, Φ_n est la matrice dont les colonnes sont les X_k. Il s'agit donc de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers la base de diagonalisation vue plus haut. On a alors directement :

$$\boxed{\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \omega_n & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}}$$

Q 17. D'après la valeur de M_n^k :

$$T(t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_0, t_1, ..., t_{n-1}) = t_0I_n + t_1M_n + t_2M_n^2 + \cdots t_{n-1}M_n^{n-1}$$

$$\boxed{\text{Avec les notations précédentes, il suffit donc de prendre } P = t_0 + t_1X + \cdots + t_{n-1}X^{n-1}}$$

Q 18. Écrivons la division euclidienne de $P \in \mathbb{C}[X]$ par $X^n - 1$: $P = (X^n - 1)Q + R$ avec $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On a alors :

$$P(M_n) = \underbrace{(M_n^n - I_n)}_{=0} Q(M_n) + R(M_n);$$

et on a vu à la question précédente que $R(M_n)$ est une matrice circulante.

$$\boxed{\text{Si } P \in \mathbb{C}[X], \text{ alors } P(M_n) \text{ est une matrice circulante.}}$$

Q 19. En combinant les faits suivants :
- toute matrice circulante est de la forme $P(M_n)$;
- $\lambda P_1(M_n) + P_2(M_n) = (\lambda P_1 + P_2)(M_n)$;
- $P_1(M_n)P_2(M_n) = (P_1P_2)(M_n)$;
- toute matrice de la forme $P(M_n)$ est circulante...

on obtient le fait que l'ensemble des matrices circulantes est stable par combinaison linéaire et produit ; il contient par ailleurs la matrice nulle et est inclus dans $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ par définition.
Enfin, ${}^t(P(M_n)) = P({}^tM_n) = P(M_n^{n-1}) = Q(M_n)$ avec $Q = P(X^{n-1})$, ce qui nous donne la stabilité par transposition.

$$\boxed{\text{Les matrices circulantes constituent un sous-espace de } \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \text{ stable par produit et transposition.}}$$

Q 20. Puisque $M_nX_k = \omega_n^k X_k$, on a $M_n^2X_k = \omega_n^{2k}X_k$, puis $M_n^rX_k = \omega_n^{rk}X_k$ et enfin (pour $P \in \mathbb{C}[X]$) :

$$P(M_n)X_k = P(\omega_n^k)X_k$$

La famille $(X_0, ..., X_{n-1})$ est donc une base de vecteurs propres pour la matrice circulante $P(M_n)$, associée aux valeurs propres $\left(P(\omega_n^k)\right)_{0\leq k\leq n-1}$.

$$\boxed{\text{Toute matrice circulante est diagonalisable.}}$$

L'auteur a oublié de demander la valeur du déterminant d'une matrice circulante...

III Étude des matrices cycliques

III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Q 21. Tout d'abord, si $\left(x_0, ..., f_M^{(n-1)}(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$, alors la matrice de f_M dans cette base est bien de la forme $C(a_0, ..., a_{n-1})$ (puisque $f\left(f^{(k)}(x_0)\right) = f^{(k+1)}(x_0)$). M et cette matrice cyclique représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables.

Réciproquement, si $M = PC(a_0, ..., a_{n-1})P^{-1}$ avec P inversible : P représente une base $\mathcal{G} = (g_1, ..., g_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et $P^{-1}MP = C$ représente alors f_M dans la base $\mathcal{G}$. Mais on a alors (lire la matrice !) $f_M(g_k) = g_{k+1}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, et donc : $g_k = f_M^{k-1}(g_1)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donc $\mathcal{G} = (g_1, f_M(g_1), ..., f_M^{n-1}(g_1))$, ce qui prouve la deuxième implication.

$$\boxed{(i) \text{ et } (ii) \text{ sont bien équivalentes.}}$$

Q 22. On a $u = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n$, $f_M(u) = \lambda_1u_1e_1 + \cdots + \lambda_nu_ne_n$... et plus généralement $f_M^k(u) = \lambda_1^ku_1e_1 + \cdots + \lambda_n^ku_ne_n$. La matrice représentant les $f_M^k(u)$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} u_1 & \lambda_1u_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}u_1 \\ u_2 & \lambda_2u_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}u_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ u_n & \lambda_nu_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}u_n \end{pmatrix}$$

C'est presque une matrice de Vandermonde. Par multilinéarité, son déterminant se ramène d'ailleurs à celui d'une Vandermonde : il vaut

$$u_1 \cdots u_n \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Et ce déterminant est donc non nul si et seulement si les u_i sont tous non nuls et les λ_i distincts. Ce déterminant non nul *caractérise* l'inversibilité de la matrice donc le fait que la famille de vecteurs représentée soit une base.

$$\boxed{\left(u, f_M(u), ..., f_M^{(n-1)}(u)\right) \text{ est une base si et seulement si les } u_i \text{ sont tous non nuls et les } \lambda_i \text{ distincts.}}$$

Q 23. Tout d'abord, si les λ_i ne sont pas distincts, on ne pourra pas trouver de vecteur u tel que $\left(u, f_M(u), ..., f_M^{(n-1)}(u)\right)$ soit une base. Mais réciproquement, si les λ_i sont distincts, alors en prenant $u = e_1 + \cdots + e_n$ (bref : $u_i = 1$ pour tout i), alors $\left(u, f_M(u), ..., f_M^{(n-1)}(u)\right)$ est une base d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Un endomorphisme diagonalisable est cyclique si et seulement s'il est à spectre simple}}$$

La question précédente nous dit également :

$$\boxed{\text{Lorsqu'il est cyclique, ses vecteurs cycliques sont ceux de la forme } \sum_{i=1}^{n} u_ie_i, \text{ où } u_i \neq 0 \text{ pour tout } i.}$$

Q 24. *Je prédis du grand n'importe quoi dans le « si et seulement si »...*

Tout d'abord, $CX = \lambda X$ est équivalent aux équations $\begin{cases} a_0x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1x_n = \lambda x_2 \\ \cdots \\ x_{n-2} + a_{n-2}x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases}$

Si $x_n = 0$ alors (en remontant les équations de la dernière à la seconde) tous les x_k sont nuls, donc X n'est pas vecteur propre.
Supposons que λ est valeur propre, et prenons pour X un vecteur propre associé. Il est donc non nul, donc $x_n \neq 0$. La dernière équation fournit $x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1})x_n$, puis l'avant-dernière

$$x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2})x_n,$$

puis en remontant jusqu'à la seconde équation : $x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1)x_n$. Combinée avec la première équation, et puisque $x_n \neq 0$, on obtient donc la *condition nécessaire* :

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0 = 0.$$

Réciproquement, supposons cette condition vérifiée, et construisons un vecteur propre associé à λ en posant *successivement* :

$$\begin{cases} x_n = 1 \\ x_{n-1} = \lambda x_n - a_{n-1}x_{n-1} \\ x_{n-2} = \lambda x_{n-1} - a_{n-2}x_{n-2} \\ \vdots \\ x_1 = \lambda x_2 - a_1 x_n \end{cases}$$

Pour avoir $CX = \lambda X$, il suffit de vérifier la première des n équations, les autres étant vérifiées par construction. Mais bien sûr

$$\lambda x_1 = \lambda\left(\lambda x_2 - a_1\right) = \lambda\left(\lambda(\lambda x_3 - a_2) - a_1\right) = \cdots = -\lambda a_1 - \lambda^2 a_2 - \cdots - \lambda^{n-1}a_{n-1} + \lambda^n = a_0 = a_0 x_n$$

Ainsi, on a bien $CX = \lambda X$, avec $X \neq 0$, et λ est bien une valeur propre.

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } C \text{ si et seulement si } \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0 = 0.}$$

Un calcul de polynôme caractéristique aurait probablement fait gagner un peu de temps : pour les candidats d'une part ; et pour le jury d'autre part : on savait avant de corriger les copies que le « si et seulement si » serait traité n'importe comment...

Q 25. On a vu dans la résolution précédente que lorsque $CX = \lambda X$, alors les x_k sont tous imposés par la valeur de x_n : le sous-espace propre (lorsque λ est valeur propre) est donc de dimension 1.

$$\boxed{\text{Lorsque } \lambda \in \mathrm{Sp}(C),\ \mathrm{Ker}(C - I_n) \text{ est une droite dirigée par } \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1 \\ \vdots \\ \lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2} \\ \lambda - a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Q 26. Puisque chaque sous-espace propre est de dimension 1, leur somme sera tout l'espace si et seulement s'il y en a n :

$$\boxed{\text{Un endomorphisme cyclique est diagonalisable si et seulement s'il est à spectre simple.}}$$

L'implication (diagonalisable et cyclique) $\Rightarrow$ (à spectre simple) était déjà établie à la question 23, et (cyclique et à spectre simple) $\Rightarrow$ (diagonalisable) est évidente (sans le caractère cyclique !) ; WTF ?

Q 27. Relisons la question 2 : Si A et B commutent (par exemple si $B = A$) alors tout polynôme en A commute avec tout polynôme en B (par exemple B) ; bref : $P(A)$ commute avec A. La version géométrique de ce résultat matriciel est le résultat demandé.

$$\boxed{\text{Si } P \in \mathbb{C}[X], \text{ alors } P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)}$$

Q 28. Suivons l'indication en décomposant effectivement $g(x_0)$ dans la base suggérée : il existe $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$g(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 f_M(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_0 f_M^i(x_0).$$

On va alors montrer que g est l'endomorphisme

$$h = \alpha_0 \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \cdots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_0 f_M^i.$$

Déjà, g et h coïncident en x_0, ce qui est un bon début. Pour peu qu'ils coïncident en chaque $f_M^k(x_0)$ (pour $0 \leq k \leq n-1$), on devrait pouvoir conclure. Et en l'occurrence $g \circ f_M^k = f_M^k \circ g$, donc :

$$g\left(f_M^k(x_0)\right) = f_M^k\left(g(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_0 f_M^k\left(f_M^i(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_0 f_M^i\left(f_M^k(x_0)\right) = h\left(f_M^k(x_0)\right),$$

de sorte que g et h coïncident sur une base, donc sont égales.

$$\boxed{\text{Si } g \text{ commute avec } f_M \text{ alors c'est un polynôme en } f_M.}$$

Q 29. Bon, donc si on a bien suivi :

$$\boxed{g \in \mathcal{L}(E) \text{ commute avec un cyclique } f_M \text{ si (Q 27) et seulement si (Q 28) c'est un polynôme en } f_M.}$$

Q 30. Le polynôme caractéristique de N est X^n : son spectre est réduit à $\{0\}$. L'unique sous-espace propre est donc le noyau, qui contient e_n (dernier vecteur de la base canonique) et est de dimension (théorème du rang) $n - (n-1)$ ($n-1$ colonnes échelonnées).

$$\boxed{\mathrm{Sp}(N) = \{0\}, \text{ et } \mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Q 31. Heu... comment dire...

$$\boxed{\text{Bien sûr que oui !}}$$

Puisqu'elle vaut $C(0, ..., 0)$!

Q 32. D'après la question 29, $\mathcal{C}(N)$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec N. Mais N^k est la matrice avec des zéros partout sauf sur la diagonale d'ordre $-k$ (avec les notations à venir de la partie III.B) où il y a des 1. Les combinaisons linéaires de ces matrices sont exactement celles données dans l'énoncé.

$$\boxed{\mathcal{C}(N) \text{ est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.}}$$

III.B – Quelques résultats de calcul matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q 33. Sous les hypothèses de l'énoncé, il s'agit de montrer (en notant $C = AB$) que pour $k, \ell \in [\![1, n]\!]$ tels que $\ell - k \neq i + j$, $c_{k\ell} = 0$. Fixons donc k et ℓ ainsi :

$$c_{k,\ell} = \sum_{r=1}^{n} \underbrace{a_{k,r}}_{=0 \text{ si } r-k\neq i} b_{r,\ell} = a_{k,k+i} b_{k+i,\ell}.$$

Mais $\ell - k \neq i + j$, donc $\ell - (k+i) \neq j$ donc $b_{k+i,\ell} = 0$.

$$\boxed{\text{Si } A \in \Delta_i \text{ et } B \in \Delta_j \text{ alors } AB \in \Delta_{i+j}}$$

Q 34. Soient $A \in H_i$ et $B \in H_j$. On peut écrire $A = \sum\limits_{k=i}^{n-1} A_k$ et $B = \sum\limits_{\ell=j}^{n-1} B_\ell$ (avec $A_k \in \Delta_k$ et $B_\ell \in \Delta_\ell$). On a alors :

$$AB = \sum_{k=i}^{n-1} \sum_{\ell=j}^{n-1} A_k B_\ell;$$

mais chaque $A_k B_\ell$ est dans $\Delta_{k+\ell}$ (question précédente) donc dans H_{i+j} (car $k + \ell \geq i + j$), donc la (double-)somme aussi.

$$\boxed{\text{Si } A \in H_i \text{ et } B \in H_j \text{ alors } AB \in H_{i+j}.}$$

Q 35. Notons $P = 1 + X$ et $Q = 1 - X + X^2 + \cdots + (-1)^{n-1} X^{n-1}$, de sorte que $PQ = 1 + (-1)^{n-1} X^n$. On a alors :

$$(I_n + C)(I_n - C + C^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C^{n-1}) = P(C)Q(C) = (PQ)(C) = I_n + (-1)^{n-1} C^n = 0$$

car $C^n = 0$. De même, $(I_n - C + C^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C^{n-1})(I_n + C) = I_n$. Ainsi :

$$\boxed{I_n + C \text{ est inversible, d'inverse } I_n - C + C^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C^{n-1}.}$$

Le statut de « Si $AB = I_n$ alors A est inversible d'inverse B » ne me semble jamais clair, d'où mon passage par $BA = I_n$... qui ne pose lui jamais problème.

Q 36. La question précédente nous assure que P est effectivement inversible, avec P^{-1} combinaison linéaire de $I_n, C, C^2, ..., C^{n-1}$; or chaque C^p est dans $\Delta_{p(k+1)}$ (question 33 et récurrence immédiate), ce qui prouve le résultat demandé.

$$\boxed{P \text{ est inversible, et } P^{-1} \in \bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{p(k+1)}.}$$

Q 37. En regardant la preuve précédente, on peut écrire : $P^{-1} = I_n + Q$ avec $Q \in \bigoplus\limits_{p=1}^{n-1} \Delta_{p(k+1)} \subset H_{k+1}$; on a alors :

$$\varphi(M) - M = (I_n + Q)M(I_n + C) - M = QM + MC + QMC.$$

Mais d'après la question 34, ces trois termes sont respectivement dans H_{k+1+i}, H_{i+k+1} et $H_{2(k+1)-1}$, donc ($2(k+1) - 1 \geq k + 1$) dans H_{k+1}.

$$\boxed{\text{Il existe } M' \in H_{k+1} \text{ tel que } \varphi(M) = M + M'.}$$

Q 38. On affine à nouveau la preuve précédente : $\varphi(N) - N - NC + CN = (C + Q)N + QNC$. Mais $C + Q = C^2 - C^3 + \cdots + (-1)^{n-1} C^{n-1} \in H_{2(k+1)} \subset H_{k+1}$ et $N \in H_{2(k+1)-1} \subset H_{k+1}$:

$$\boxed{\text{Il existe } N' \in H_{k+1} \text{ tel que } \varphi(N) = N + NC - CN + N'}$$

Q 39. Déjà, $B = \varphi(A) = P^{-1}AP$, avec $P^{-1} \in H_0$, $A \in H_{-1}$ et $P \in H_0$, donc (question 34) :

$$\boxed{B \in H_{-1}}$$

On peut ensuite écrire $T = \sum\limits_{i=0}^{n-1} T^{(i)}$, et la propriété $\varphi(M) - M \in H_{k+1}$ reste vraie dès que $M \in \Delta_i$ avec $i \geq 0$ (reprendre la preuve : la condition $i \leq k$ est inutile), donc $\varphi(T) - T \in H_{k+1}$. Ainsi :

$$B = \varphi(N) + \varphi(T) = A + (NC - CN) + B',$$

avec $B' \in H_{k+1}$.
Bien entendu pour $i \leq k$, $B'^{(i)} = 0$; il reste donc à montrer :

$$(NC - CN)^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq i \leq k-1 \\ NC - CN & \text{si } i = k \end{cases}$$

ce qui revient à dire que $NC - CN \in \Delta_k$. Mais puisque $N \in \Delta_{-1}$ et $C \in \Delta_{k+1}$, c'est une conséquence directe de la question 33.

$$\boxed{B^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN, \text{ et pour tout } i \in [\![-1, k-1]\!],\ B^{(i)} = A^{(i)}.}$$

III.C – L'opérateur de Sylvester

Q 40. Le noyau de $\mathcal{S}$ est le commutant de N qui a été déterminé à la question 32.

$$\boxed{\text{Le noyau de } \mathcal{S} \text{ est constitué des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.}}$$

Q 41. Soit $X \in \Delta_{k+1}$: $\mathcal{S}(X) = NX - XN$ et $N \in \Delta_{-1}$; la question 33 nous assure que $\mathcal{S}(X)$ est la différence de deux éléments de $\Delta_{(k+1)-1}$ donc est dans Δ_k. En notant que ${}^tN \in \Delta_1$ on montre la deuxième inclusion demandée.

$$\boxed{\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k \text{ et } \mathcal{S}^*(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}.}$$

À partir de maintenant, on suppose : $0 \leq k \leq n-1$.

Q 42. Fixons $X \in \Delta_{k+1}$ et $Y \in \Delta_k$: d'une part

$$\langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y \rangle = \operatorname{tr}\left({}^t(NX - XN)Y\right) = \operatorname{tr}({}^tX{}^tNY) - \operatorname{tr}({}^tN{}^tXY),$$

et d'autre part :

$$\langle X, \mathcal{S}_k^*(Y) \rangle = \operatorname{tr}\left({}^tX({}^tNY - Y{}^tN)\right) = \operatorname{tr}({}^tX{}^tNY) - \operatorname{tr}({}^tXY{}^tN).$$

Mais

$$\operatorname{tr}({}^tN{}^tXY) = \operatorname{tr}\left({}^tN({}^tXY)\right) = \operatorname{tr}\left(({}^tXY){}^tN)\right) = \operatorname{tr}\left({}^tXY{}^tN\right),$$

donc :

$$\boxed{\text{Pour } X \in \Delta_{k+1} \text{ et } Y \in \Delta_k : \langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y \rangle = \langle X, \mathcal{S}_k^*(Y) \rangle}$$

Prenons alors $A \in \operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*)$ et $B \in \operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$. Il existe $X \in \Delta_{k+1}$ tel que $B = \mathcal{S}_{k+1}(X)$, et on a donc :

$$\langle A, B \rangle = \langle A, \mathcal{S}_{k+1}(X) \rangle = \langle \mathcal{S}_{k+1}(X), A \rangle = \langle X, \mathcal{S}_k^*(A) \rangle = 0$$

car $A \in \operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*) \text{ et } \operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1}) \text{ sont en somme directe orthogonale.}}$$

Ensuite, $\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*)$ est bien un sous-espace de Δ_k par définition, ainsi que $\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ (question 41 : $\mathcal{S}(\Delta_{k+1}) \subset \Delta_k$) ; il reste donc à vérifier que la somme de leurs dimensions vaut celle de Δ_k, à savoir $n - k$.

- $\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_k^*) = \operatorname{Ker}(\mathcal{S}^*) \cap \Delta_k$ est la droite engendré par D_k, donc est de dimension 1 ;
- $\operatorname{Im}(\mathcal{S}_{k+1})$ est de dimension :

$$\dim(\Delta_{k+1}) - \dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{S}_{k+1})) = (n - (k+1)) - \underbrace{\dim(\operatorname{Ker}(\mathcal{S}) \cap \Delta_{k+1})}_{0} = n - k - 1$$

  ($\operatorname{Ker}(\mathcal{S}) \cap \Delta_{k+1}$ est constitué des matrices triangulaires inférieures qui sont dans Δ_{k+1}, ce qui est un tout petit espace).

On a bien $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{S}_k^*)) + \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{S}_{k+1})) = \dim(\Delta_k)$, ce qui permet de conclure puisque les deux sous-espaces sont en somme directe (orthogonale) :

$$\boxed{\Delta_k = \mathrm{Ker}(\mathcal{S}_k^*) \oplus^\perp \mathrm{Im}(\mathcal{S}_{k+1})}$$

Q 43. Avec un peu de hauteur, on voit qu'il suffit (partie III.B.1) de construire $C \in \Delta_{k+1}$ (ce qui nous laisse $n-(k+1)$ degrés de liberté) tel que $A^{(k)} + NC - CN$ ait ses $n-k$ éléments diagonaux d'ordre k égaux, ce qui fait... $n-k-1$ équations (ça sent bon). Si on y arrive, alors en posant $P = I_n + C$ on aura $B = \varphi(A) = P^{-1}AP$ qui vérifiera exactement les conditions souhaitées sur les diagonales d'ordre $i \in [\![-1, k]\!]$.
J'ai dans un premier temps commencé à écrire des $n-k-1$ équations (d'inconnues les $c_{i,i+k+1}$ pour $1 \leq i \leq n-(k+1)$)... avant de réaliser que parfois dans un problème on utilise ce qui précède ! Observons donc $A^{(k)}$: cette matrice est dans Δ_k, donc la question précédente nous donne l'existence de $C_1 \in \Delta_{k+1}$ tel que $A^{(k)} - (NC_1 - C_1N)$ soit dans $\mathrm{Ker}(\mathcal{S}_k^*)$, c'est-à-dire dans $\mathrm{Vect}(D_k)$. Considérons alors $P = I_n - C_1$. La partie III.B.1 nous assure que $B = P^{-1}AP$ vérifie : pour tout $i \in [\![-1, k-1]\!]$, $B^{(i)} = A^{(i)}$, et $B^{(k)} = A^{(k)} - NC_1 + C_1N$, donc $B^{(k)} \in \mathrm{Vect}(D_k)$ possède comme requis tous ses coefficients diagonaux d'ordre k égaux...

$$\boxed{\text{Ce qu'on voulait démontrer !}}$$

Q 44. Il suffit évidemment de montrer que toute matrice cyclique $A_0 = C(a_0, ..., a_{n-1})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

— On applique le résultat de la question précédente à A_0 (qui est bien de la forme $N+T$) avec $k = 0$: A_0 est semblable à une matrice de la forme $A_1 = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ 1 & a_0 & & \star & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 & a_0 \end{pmatrix}$

— On applique le résultat de la question précédente à A_1 (qui est toujours de la forme $N+T$) avec cette fois $k = 1$: A_1 (donc A_0) est semblable à une matrice de la forme $A_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1' & & & \star \\ 1 & a_0 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & a_1' \\ (0) & & 0 & 1 & a_0 \end{pmatrix}$

— On continue ainsi en appliquant le résultat de la question précédente à la matrice obtenue à l'étape précédente, pour k allant jusqu'à $n-1$, et $C(a_0, ..., a_{n-1}) = A_0$ est finalement semblable à une matrice de Toeplitz.

$$\boxed{\text{Toute matrice cyclique est semblable à une matrice de Toeplitz.}}$$

Terminons par un petit décompte dans ce corrigé...

— nombre d'occurrences du symbole $\Rightarrow$: une seule (sur cette ligne) ;
— nombre d'occurrences du symbole $\Leftrightarrow$: une seule (sur cette ligne) ;
— nombre d'occurrences de « du coup » : une seule (sur cette ligne) ;
— nombre d'occurrences de « au final » : une seule (sur cette ligne).

Après de telles brutalités, on a bien mérité une image de potichat.